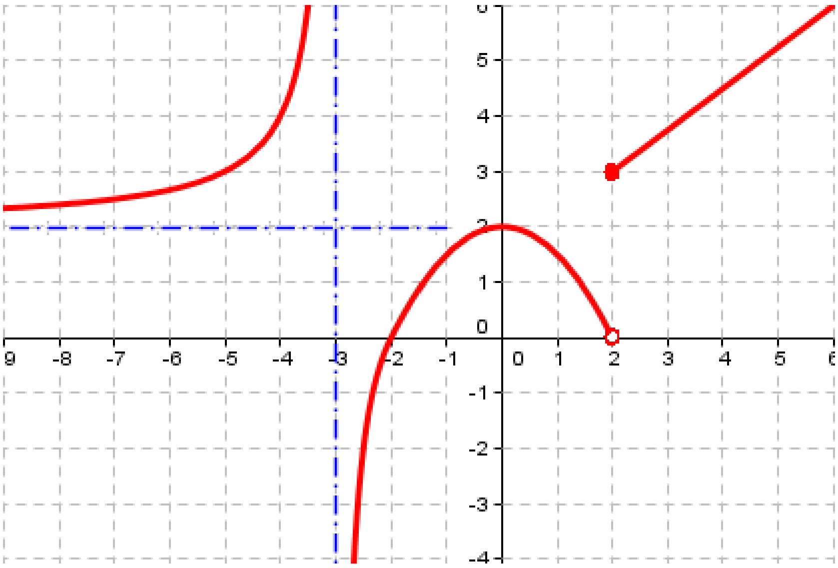
# EXAMEN DE LÍMITES

1. Sobre la gráfica de la función f (x), halla:




a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

i) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ j) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2. Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x} \qquad g(x) = \frac{x^2 - 5}{1 + x}$$

Hallar:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\cdot g(x)$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)+g(x)$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-g(x)$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

3. Sea la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la función.

b) Calcular, si existe, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

4. Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x}$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2x - 1}{3x + 2}\right)^x$

3) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2 + 1}\right)^{3-x}$

5) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x + 2}{x - 1} - \frac{2x + 4}{x^2 - 1}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{4x - 2}{3x + 5}\right)^{x^2+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{4x}{x^2 - 9}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12}$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3 - \sqrt{x - 2}}{\sqrt{2x + 1}}$

11) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}$

12) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

13) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$

14) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

15) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{\sqrt{1 - x^3}}$

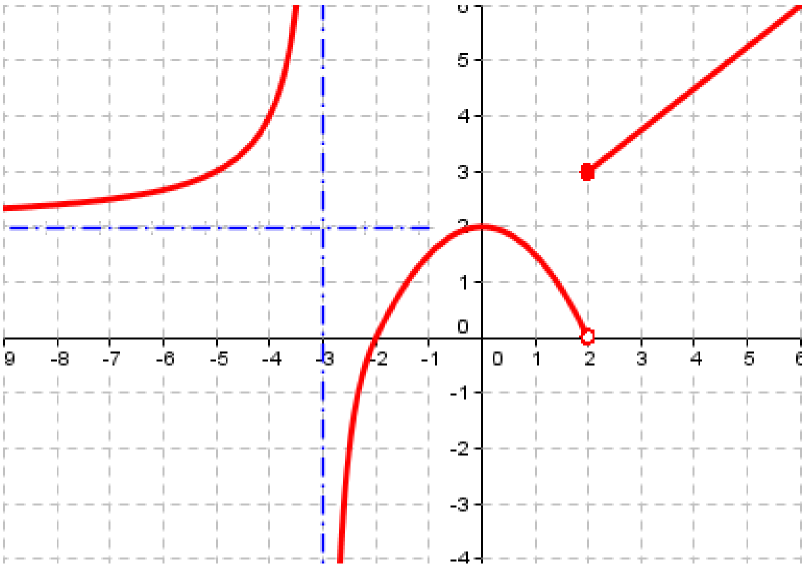
16) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{x + 1}}{x}$

17) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$

18) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 6x}\right)$

SOLUCIONES

1. Sobre la gráfica de la función f (x), halla:




a) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ d) $\lim_{x\to -2} f(x) = 0$

e) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ f) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$

g) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$ h) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$

i) $\lim_{x\to -4} f(x) = 4$ j) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1,5$

2. Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x} \qquad g(x) = \frac{x^2 - 5}{1 + x}$$

Hallar:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ c) $\lim_{x\to +\infty} f(x)\cdot g(x)$ d) $\lim_{x\to +\infty} f(x)+g(x)$ e) $\lim_{x\to +\infty} f(x)-g(x)$ f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ b) $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ c) $\lim_{x\to +\infty} f(x)\cdot g(x) = 1$

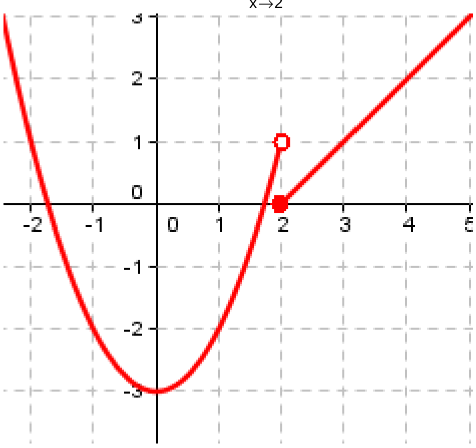
d) $\lim_{x\to +\infty} f(x)+g(x) = +\infty$ e) $\lim_{x\to +\infty} f(x)-g(x) = -\infty$ f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

3. Sea la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la función.

b) Calcular, si existe, $\lim_{x\to 2} f(x)$.




$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} \left(x^2 - 3\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \left(x - 2\right) = 0$$

Al no coincidir los límites laterales, no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$

4. Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x}{x^3+x} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^3-27}{x^2-9} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2+3x+9}{x+3} = \dfrac{27}{6} = \dfrac{9}{2}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{3-x} = 2^{-\infty} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

5) $\lim\limits_{x\to2} \left(\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{2x+4}{x^2-1}\right) = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2+3x+2-2x-4}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\cancel{(x-1)}^2(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x-3)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3} = 0$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4x-2}{3x+5}\right)^{x^2+1} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{+\infty} = +\infty$

8) $\lim\limits_{x\to3} \left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{4x}{x^2-9}\right) = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x+3-4x}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{3-3x}{x^2-9} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x\to3^+ \\ +\infty & \text{si } x\to3^- \end{cases}$

9) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x-3)}{\cancel{(x-3)}(x-4)} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x-3}{x-4} = \dfrac{0}{-1} = 0$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \lim\limits_{x\to1} \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+1}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

12) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{0}{2} = 0$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{\sqrt{x^2-3x+1}} = 3$

14) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \dfrac{1}{4}$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{\sqrt{1-x^3}} = +\infty$

16) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1-x-x-1)}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}\right)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}\right)} = -1$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = 0$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x^2-6x}\right) = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-9-x^2+6x}{\left(\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-6x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x-9}{\left(\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-6x}\right)} = 3$