EXAMEN LÍMITES DE FUNCIONES

1. Sea la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x}$$

Determina:

a) Asíntota horizontal. (0,5 puntos)

b) Asíntotas verticales. (0,5 puntos)

c) Posición de la gráfica respecto a las asíntota horizontal.(1 punto)

d) Continuidad de la función en los puntos que anulan el denominador. Indica el tipo de discontinuidad.(1,5 puntos)

e) Representa la función.(1 punto)

2.- Resuelve los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}\ \ (1\ punto)$

$b)\ \lim_{x\to \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-6}\right)^{\frac{x^2-2}{x+1}}\ \ (1\ punto)$

$c)\ \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}\ \ (1\ punto)$

$d)\ \lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - 2x\ (1\ punto)$

3.- Determina las asíntotas de la siguiente función:

f(x) $= \frac{x^2 - 4}{x - 1}\ \ (1{,}5\ puntos)$

1. Sea la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x}$$

Determina:

a) Asíntota horizontal. (0,5 puntos)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

En y = 1 encontramos una asíntota horizontal.

b) Asíntotas verticales. (0,5 puntos)

Son candidatos a asíntota vertical los puntos que anulan el denominador en funciones racionales. Veamos los candidatos:

$$x^2 - 2x = 0 \to x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \to x = 2 \end{cases}$$

Los candidatos a A.V. son x = 0 y x = 2. Veamos si son A.V.:

x=0

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x \cdot (x-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

Como no es ∞ x = 0 no es A.V.

x=2

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \left(\frac{4}{0}\right) = \infty$$

x=2 es una A.V.

c) Posición de la gráfica respecto a las asíntota horizontal.(1 punto)

Para ver la posición respecto a la A.H. calculo el resultado de restar la asíntota a la función:

$$f(x)-1=\frac{x^2}{x^2-2x}-1=\frac{x^2}{x^2-2x}-\frac{x^2-2x}{x^2-2x}=\frac{x^2-x^2+2x}{x^2-2x}=\frac{2x}{x^2-2x}$$

Calculo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0^+$$

la función va por arriba cuando x→ $+\infty$

Hago lo mismo para $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0^-$$

la función va por abajo.

d) Continuidad de la función en los puntos que anulan el denominador. Indica el tipo de discontinuidad.(1,5 puntos)

Los puntos que anulan el denominador son 0 y 2.

<u>Continuidad en x=0</u>

$$\nexists f(0)=\frac{0}{0}$$

$$\exists\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2-2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x\cdot(x-2)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x-2}=\frac{0}{-2}=0$$

Encontramos una discontinuidad evitable.

<u>Continuidad en x=2</u>

$$\nexists f(2)=\frac{4}{0}$$

Por otro lado:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2}{x^2-2x}=\infty$$

Tenemos que estudiar los límites laterales:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2}{x^2-2x}=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2}{x\cdot(x-2)}=\lim_{x\to2^+}\frac{x}{x-2}=+\infty$$

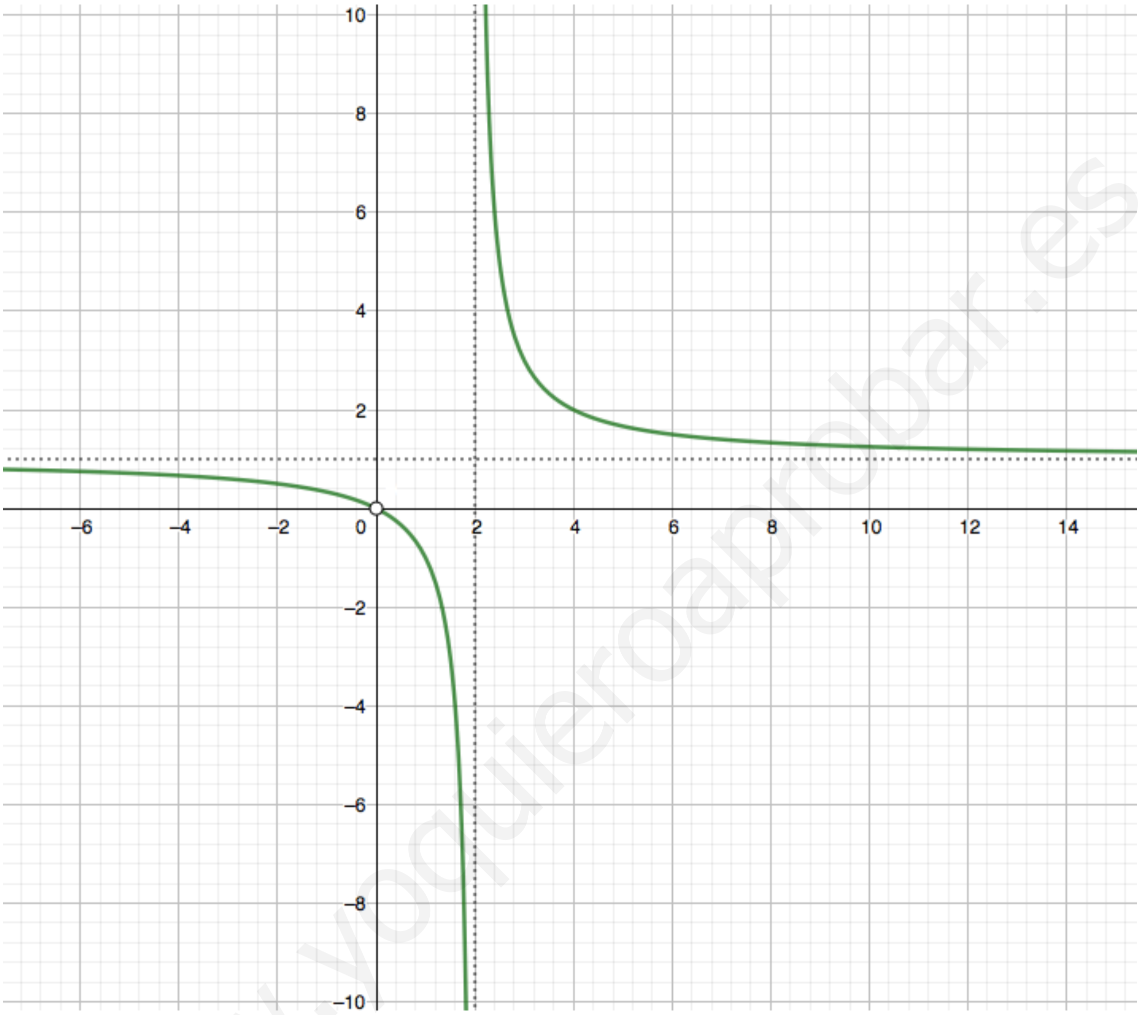
$$\lim_{x\to2^-}\frac{x^2}{x^2-2x}=\lim_{x\to2^-}\frac{x^2}{x\cdot(x-2)}=\lim_{x\to2^-}\frac{x}{x-2}=-\infty$$

Como los límites laterales no coinciden:

$$\nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

y como los límites laterales son $\pm\infty$ en x=2 la función es discontinua de salto infinito.

e) Representa la función.(1 punto)



2.- Resuelve los siguientes límites: (1 punto cada apartado)

$$a)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2}{x^2-5x+6} = \frac{0}{0}$$

para resolverlo factorizamos en el numerador y en el denominador:

$$a)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2}{x-2} = 9$$

$$x^2-5x+6=0\ \to x = \frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm 1}{2} = \begin{cases}3\\2\end{cases}$$

$b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-6}\right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} = 1^{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-6}\right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5}{2x-6}-1\right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5}{2x-6}-\frac{2x-6}{2x-6}\right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5-2x+6}{2x-6}\right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{11}{2x-6}\right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-6}{11}}\right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-6}{11}}\right)^{\frac{2x-6}{11}\cdot\frac{x^2-2}{x+1}\cdot\frac{11}{2x-6}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-6}{11}}\right)^{\frac{2x-6}{11}\cdot\frac{x^2-2}{x+1}\cdot\frac{11}{2x-6}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-6}{11}}\right)^{\frac{2x-6}{11}}\right]^{\frac{x^2-2}{x+1}\cdot\frac{11}{2x-6}} = e^{\frac{11}{2}}$$

$c)\ \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9} = \lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x^2-9)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)\cdot(x+3)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{1}{(x+3)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{1}{6\cdot2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

$d)\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-2x = \infty-\infty$

Resuelvo la indeterminación quedándome con el mayor grado:

$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-2x = \lim_{x\to\infty} x-2x = \lim_{x\to\infty} -x$

En este caso debo calcular los límites cuando x→ $\pm\infty$

Veamos:

$\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$

No coinciden los límites luego $\nexists \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-2x$

3.- Determina las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-1} \quad (1{,}5\ puntos)$$

A.H.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

luego no existe asíntota horizontal.

A.V.

Son candidatos a asíntota vertical son los puntos que anulan el denominador. En este caso x = 1.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x-1} = \infty$$

Luego en x = 1 encontramos una A.V.

A.O.

Existe cuando existe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = L$$

donde L es un número real.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Luego existe una A.O.

La calculo:

$$\begin{array}{rl|l} & x^2+0x-4 & x-1 \\ \cline{3-3} & -x^2+x & x-1 \\ \cline{2-2} & x-4 & \\ & -x+1 & \\ \cline{2-2} & -3 & \end{array}$$

La A.O. es la recta y = x – 1