

**Tema 15. LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD****Autoevaluación**

1. Para las siguientes funciones, halla su límite en los puntos  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$  y  $x = 5$ :

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3x + 2}$       b)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - 1}{5 - x}$       c)  $f(x) = e^{\frac{x-1}{2}}$

2. Halla los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{5 - x}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

3. Para las siguientes funciones, halla su límite en los puntos  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$  y  $x = 3$ :

a)  $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 3x}$       b)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + x}$       c)  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x - 3}$

4. Halla los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x+1} - 2}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4}$

5. Halla los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{x-1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{4x - 3}$       c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{x^3 + 3x^2 + 5x - 2}$

6. Para las siguientes funciones, halla su límite en los puntos  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$  y  $x = 3$ :

a)  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2 - x}$       b)  $f(x) = \frac{x-3}{x+1} - \frac{1}{x^2 + x}$       c)  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 - x}$

7. Estudia la continuidad de las siguientes funciones definidas a trozos en el punto  $x = 1$ , y si es continua, indica el valor de  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ :

a)  $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{si } x < 1 \\ 2x-1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 1 \\ x-1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$       c)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x < 1 \\ 1 - x^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Haz una gráfica que confirme tu resultado.

8. Halla los puntos en los que las siguientes funciones no son continuas. ¿Puede evitarse en algún caso la discontinuidad?

a)  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$       b)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x}$       c)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

9. Determina las asíntotas de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$       b)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x}$       c)  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

10. Determina las asíntotas de la función  $f(x) = \frac{2}{x^2 - 3x}$ . Indica también la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

11. Halla el valor que debe tener  $a$  para que sea continua la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 1 \\ 3x - a & x \geq 1 \end{cases}$ .

Justifica tu resultado haciendo una representación gráfica de  $f(x)$ .

12. Halla el valor que debe tener  $a$  para que sea continua cada una de las siguientes funciones en toda la recta real:

a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x < 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 1 \\ x - a, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$       c)  $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4, & \text{si } x < 2 \\ 1 - ax, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

**Soluciones.**

1. a)  $-1$ ;  $\infty$ ;  $-1/6$ ;  $\infty$ ;  $23/12$ . b) No existe;  $-1/4$ ; No existe;  $0$ ;  $\infty$ . c)  $e^{-1/2}$ ;  $1$ ;  $e^{-1}$ ;  $e^{1/2}$ ;  $e^2$ .

2. a) 2. b)  $-1/4$ . c)  $+\infty$ .

3. a)  $\infty$ ;  $1$ ;  $-1$ ;  $1/3$ . b)  $\infty$ ;  $1$ ;  $-1$ ;  $1/3$ . c)  $0$ ;  $-1/2$ ;  $1/4$ ;  $\infty$ .

4. a)  $1/2$ . b) 4. c)  $3/4$ .

5. a) 3. b)  $\infty$ . c) 0.

6. a)  $1$ ;  $\infty$ ;  $1/2$ ;  $-1/2$ . b)  $\infty$ ;  $-3/2$ ;  $\infty$ ;  $-1/12$ . c)  $\infty$ ;  $\infty$ ;  $-2$ ;  $0$ .

7. a) Sí; 1. b) No. c) Sí; 0.

8. a)  $x = -1$ . b)  $x = -2$ ,  $x = 0$ . c)  $x = -1$ ,  $x = 1$ . En  $x = 1$  puede evitarse definiendo  $f(1) = -1/2$ .

9. a) AV:  $x = -1$ ; AH:  $y = 2$ . b) AV:  $x = -2$ ,  $x = 0$ ; AH:  $y = 0$ . c) AV:  $x = 1$ ; AO:  $y = x + 1$ .

10. AV:  $x = 0$  y  $x = 3$ . Si  $x \rightarrow 0^-$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ ; Si  $x \rightarrow 0^+$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ ; Si  $x \rightarrow 3^-$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ ; Si  $x \rightarrow 3^+$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$

AH:  $y = 0$ , Por ambos lados la curva va por encima de la asíntota.

11.  $a = 1$ .



12. a)  $-1$ . b) 2. c)  $-5/6$ .