EXAMEN DE CINEMÁTICA

1º Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un móvil en unidades del SI son:

$$x(t) = 3\,t^2; \quad y(t) = 5\,t.$$

a) Calcula el vector velocidad media entre t =1 s y t = 4 s.
b) Calcula el vector velocidad instantánea en t = 2 s.
c) Calcula el vector aceleración media entre t = 1 s y t = 4 s.
d) Calcula el vector aceleración instantánea en t = 2 s.
e) Calcula la ecuación de la trayectoria.

El vector de posición es $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} = 3t^2\,\vec{\imath} + 5t\,\vec{\jmath}$. De manera que la respuesta al punto a) es:

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{r(4)} - \overrightarrow{r(1)}}{t(4) - t(1)} = \frac{(48\,\vec{\imath} + 20\,\vec{\jmath}) - (3\,\vec{\imath} + 5\,\vec{\jmath})\,m}{3\,s} = \frac{(45\,\vec{\imath} + 15\,\vec{\jmath})\,m}{3\,s} = 15\,\vec{\imath} + 5\,\vec{\jmath}\,m/s.$$

Para resolver el punto b), se deriva la expresión de r(t): $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3 \cdot 2t\,\vec{\imath} + 5\,\vec{\jmath} = 6t\,\vec{\imath} + 5\,\vec{\jmath}$.

De esta manera: $\vec{v}(2) = 12\,\vec{\imath} + 5\,\vec{\jmath}\,m/s$.

Para resolver el apartado c) utilizamos la expresión de v(t) de manera que:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{v(4)} - \overrightarrow{v(1)}}{t(4) - t(1)} = \frac{(24\,\vec{\imath} + 5\,\vec{\jmath}) - (6\,\vec{\imath} + 5\,\vec{\jmath})\,m/s}{3\,s} = \frac{(18\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath})\,m/s}{3\,s} = 6\,\vec{\imath}\,m/s^2$$

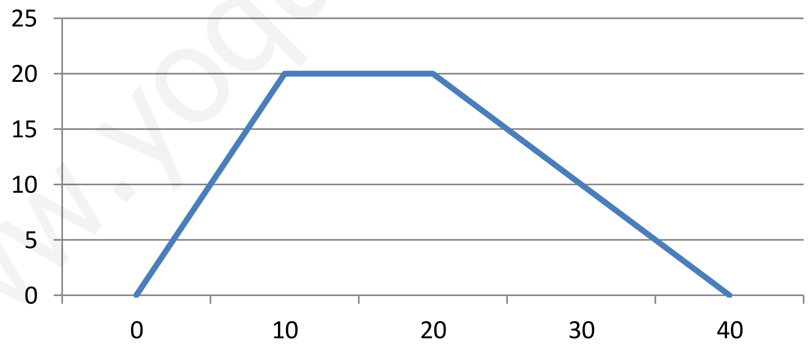
Si derivamos v(t) obtenemos la expresión de a(t): $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\,\vec{\imath}$. Como se ve, es constante.

Así que $\vec{a}(2) = 6\,\vec{\imath}\,m/s^2$.

La ecuación de la trayectoria se halla despejando t en la expresión de *y*(t) y se sustituye en la expresión de *x*(t):

$$t = \frac{y}{5} \Rightarrow x = 3 \cdot \left(\frac{y}{5}\right)^2 = {}^{3}/_{25} \cdot y^2 \Rightarrow \; = 0{,}12 \cdot y^2. \Leftrightarrow \; y = \frac{5}{\sqrt{3}}\sqrt{x}.$$

2º La velocidad de un móvil varía según muestra el siguiente dibujo. Calcula la distancia total recorrida y el valor de la velocidad media del movimiento.



El ejercicio puede resolverse dividiendo el movimiento en tres tramos: el A, de t = 0 s hasta t =10 s, que es un movimiento acelerado; el B, desde t =10 s hasta t = 20 s, que es un movimiento uniforme; y el C, desde t = 20 s hasta t = 40 s, que es un movimiento acelerado (aceleración negativa).

El tramo A tiene aceleración constante de valor $a = \Delta v/\Delta t = (20 - 0)$ m/s / 10 s = 2 m/s^2. El espacio recorrido en este tramo será $\Delta x_A = v_o \cdot \Delta t + ½\, a \cdot (\Delta t)^2 = 0 + ½ \cdot 2$ m/s$^2 \cdot (10$ s$)^2$ = 100 m.

El tramo B tiene velocidad constante, así que $\Delta x_B = v \cdot \Delta t$ = 20 m/s · 10 s = 200 m.

Y en el tramo C la aceleración es constante de valor $a = \Delta v/\Delta t = (0 - 20)$ m/s / 20 s = -1 m/s^2. El espacio recorrido en este tramo será: $\Delta x_C = v_o \cdot \Delta t + ½\, a \cdot (\Delta t)^2$ = 20 m/s · 20 s - ½ · 1 m/s^2 · (20 s)^2 = 200 m.

Con todo esto, el espacio total recorrido es $\Delta x = \Delta x_A + \Delta x_B + \Delta x_C$ = 100 m + 200 m + 200 m = 500 m.

Y la velocidad media será $v_m = \Delta x / \Delta t$ = 500 m / 40 s = 12,5 m/s.

[Hay un modo alternativo y rápido de cálculo: utilizando el hecho de que el área en la gráfica v-t se corresponde con el espacio recorrido, el espacio total recorrido es el área del trapecio de la figura, por lo tanto $\Delta x = \frac{b+B}{2}h = \frac{(10+40)s}{2} \cdot 20\ m/s = 500\ m.$]

3º Justifica:

a) ¿Puede el vector velocidad media ser nulo a pesar de que el móvil sí ha recorrido una distancia distinta de cero?
b) ¿Puede un movimiento tener aceleración constante de 5 m/s^2 y que el módulo de su velocidad no varíe?
c) ¿Puede tener un movimiento circular una aceleración igual a cero en algún instante?
d) Un tren se mueve hacia el este en paralelo a una autovía. Por el carril en sentido este circula un coche. ¿Puede ver un pasajero del tren que el coche se mueve aparentemente hacia el oeste?
e) ¿Puede una persona que circula en bici notar que las gotas de lluvia caen con velocidad constante formando un ángulo de 20º con la vertical mientras que otra persona sentada en el salón de casa ve caer las gotas con velocidad constante perpendicularmente al suelo?

La respuesta a a) es que sí es posible. El vector velocidad media se define como el cociente del vector desplazamiento entre el intervalo de tiempo. Si el móvil ha recorrido una cierta distancia, no nula, tal que la posición final es la misma que la posición inicial, el vector desplazamiento es nulo y por tanto la velocidad media también es un vector nulo.
La respuesta a b) es que sí es posible. La aceleración mide el cambio del vector velocidad, es decir tanto en módulo como en dirección. Aunque el módulo de la velocidad no cambie, si cambia la dirección del movimiento, hay una aceleración (aceleración normal) que puede tomar cualquier valor. Esto es lo que ocurre en un movimiento circular uniforme, por ejemplo.
La respuesta a c) es que no, excepto en un único caso (un tanto anecdótico). Si la aceleración es cero, esto implica que lo es tanto la aceleración tangencial como la normal. Que la aceleración tangencial sea cero significa que el movimiento circular es uniforme. Y si la aceleración normal es cero, esto significa que su velocidad es cero. Es decir, ¡que el cuerpo está parado! Esto contradice que el cuerpo esté en movimiento circular. Por eso la respuesta general es negativa. La excepción sería un cuerpo que gira con velocidad cada vez menor y aceleración también en disminución, hasta acabar deteniéndose un instante y luego reiniciar el movimiento con aceleración creciente. En ese instante de reposo, la velocidad es cero (lo que implica aceleración normal cero) y también la aceleración tangencial es cero. [Esto se corresponde a un movimiento con aceleración variable, del tipo a_T = t, que se anula para t = 0. Para el ejemplo indicado, debería cumplirse también que $\omega(0) = 0$.]
La respuesta a d) es que sí es posible. La velocidad relativa con la que el viajero del tren ve moverse al coche es el vector $\vec{v_r} = \vec{v_c} - \vec{v_t}$, que representa la diferencia de velocidades, o velocidad relativa del coche respecto del tren. Como esa diferencia es un vector, el vector tiene sentido contrario al de movimiento del tren siempre que el tren se mueva más rápido que el coche.
La respuesta a e) es que sí es posible. La respuesta similar a la del apartado anterior, pero ahora las velocidades que se consideran forman un ángulo. El vector velocidad de las gotas de agua es vertical (como observa la persona sentada), mientras que el ciclista se mueve con un vector velocidad que es perpendicular a la de caída de las gotas. La suma (o diferencia) de dos vectores que forman un ángulo recto da una resultante con un ángulo cualquiera (según sean los módulos de las velocidades implicadas). De hecho, la tangente del ángulo de 20º indica cuántas veces es mayor la velocidad del ciclista que la velocidad de caída del agua.

4º Desde una altura de 10 m se lanza un objeto con un ángulo de inclinación de 45º sobre la horizontal y una velocidad inicial de 120 m/s. Calcula:

a) La altura máxima alcanzada.
b) El alcance horizontal máximo.

c) El vector velocidad al llegar al suelo.

El vector velocidad inicial indica que v_{0x} = 120 m/s · cos 45º = 84,85 m/s; también v_{0y} = 120 m/s · sen 45º = 84,85 m/s.
Con esto, las ecuaciones de posición y velocidad son (en unidades SI):

$$= v_{0x} \cdot t = 84{,}85 \cdot t; \quad y = h + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 10 + 84{,}85 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

$$v_x = v_{0x} = 84{,}85; \quad v_y = v_{0y} - g \cdot t = 84{,}85 - 9{,}8 \cdot t$$

Para calcular la altura máxima, se impone la condición de que en ese punto $v_y = 0$. Lo que implica:

$$0 = 84{,}85 - 9{,}8 \cdot t \Rightarrow t = \frac{84{,}85}{9{,}8} = 8{,}66\ s.$$

De donde

$$y_{máx} = 10 + 84{,}85 \cdot 8{,}66 - 4{,}9 \cdot 8{,}66^2 = 377{,}3\ m.$$

Para calcular el alcance horizontal máximo, $x_{máx}$, debemos considerar la condición de que y = 0:

$$0 = 10 + 84{,}85 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \Rightarrow t = \frac{-84{,}85 \pm \sqrt{84{,}85^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-4{,}9)}}{2(-4{,}9)} = \frac{-84{,}85 - 86}{-9{,}8} = 17{,}43\ s.$$

En lo anterior solo se considera la solución positiva para el tiempo. Con ese valor para t, se tiene que:

$$_{máx} = 84{,}85 \cdot 17{,}43 = 1479{,}2\ m.$$

El vector velocidad viene dado por las dos componentes v_x y v_y. Como v_x es constante, solo es necesario evaluar v_y:

$$v_y = 84{,}85 - 9{,}8 \cdot 17{,}43 = -85{,}96\ m/s.$$

Es decir: $\vec{v} = 84{,}85\,\vec{\imath} - 85{,}96\,\vec{\jmath}\ m/s$.

5º Un volante de 20 cm de radio y que gira a 10 rad/s de velocidad angular se detiene dando 3 vueltas desde el instante que comienza a frenar hasta quedar completamente en reposo. Calcula:

a) La aceleración normal de un punto de la periferia justo antes de comenzar a frenar.
b) La aceleración angular media.
c) El tiempo que tarda en detenerse.
d) La velocidad angular cuando ha dado 2 vueltas desde el momento de empezar a frenar.

La aceleración normal puede calcularse directamente como $a_N = \omega_0^2 \cdot r = (10\ rad/s)^2 \cdot 0{,}2\ m = 20\ m/s^2$.
Se puede encontrar la aceleración angular empleando la relación $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\,\alpha\,\Delta\theta$, con lo que:

$$\alpha = \frac{0 - 10^2}{2 \cdot 3 \cdot 2\pi} = -2{,}653\ rad/s^2.$$

Conociendo la aceleración, es inmediato encontrar el tiempo empleando la relación: $\omega = \omega_0 + a \cdot t$.

$$t = \frac{0 - 10}{-2{,}653} = 3{,}77\ s.$$

Se puede calcular la velocidad angular pedida en el último apartado volviendo a emplear la relación:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta = 10^2 - 2 \cdot 2{,}653 \cdot 2 \cdot 2\pi = 33{,}33\ rad^2/s^2\ .$$

$$\omega = \sqrt{33{,}33}\ rad/s = 5{,}77\ rad/s.$$