## Tiro oblicuo

Una moto de agua que va a 60 km/h salta con un ángulo de 15° sobre el mar.

a) ¿Qué distancia saltará?
b) ¿Qué altura máxima alcanzará la moto sobre el mar?

Desde una ventana de una casa que está a 15 m de altura lanzamos un chorro de agua a 20 m/s y con un ángulo de 40° sobre la horizontal. Despreciando el rozamiento con el aire, calcula:

a) Distancia de la base de la casa a que caerá el agua. Resultado: x=52.7 m
b) Velocidad a que el agua llegará al suelo. Resultado: $\vec{v}$=15.32 $\vec{i}$ -21.6 $\vec{j}$ (m/s)

Desde el tejado de una casa que está a 15 m de altura lanzamos una pelota a 30 m/s y con un ángulo de 35° sobre la horizontal. Despreciando el rozamiento con el aire, calcula:

a- Distancia de la base de la casa a que caerá la pelota. Resultado: x=101.9 m
b- Velocidad a que la pelota llegará al suelo. Resultado: $\vec{v}$=24.5 $\vec{i}$ -24.4 $\vec{j}$
c- ¿Dónde estará para t= 2s? Resultado: $\vec{r}$=49 $\vec{i}$ +29.4 $\vec{j}$

Desde la ventana de una casa que está a 40 m de altura lanzamos un balón con una velocidad de 30 m/s y un ángulo de 35º. Despreciando el rozamiento con el aire, calcular:

a) En qué punto chocará contra la pared de la casa de enfrente, que está a 20 de distancia horizontal Resultado: punto (50.65, 20), en metros
b) La velocidad con que choca contra la pared. Resultado: $\vec{v}$=24.57 $\vec{i}$ + 9.1 $\vec{j}$ (m/s)

Desde la cima de una colina que está a 60 m de altura lanzamos un proyectil con una velocidad de 500 m/s y un ángulo de 30º. Despreciando el rozamiento con el aire, calcular:

a) El punto donde llegará el proyectil al suelo.Resultado: punto (21754, 0), en metros
b) La velocidad con que llega al suelo. Resultado: $\vec{v}$=433 $\vec{i}$ - 252.4 $\vec{j}$
c) La posición del punto más alto de la trayectoria. Resultado: $\vec{r}$=10825 $\vec{i}$+ 3185 $\vec{j}$

Lanzamos desde el suelo una pelota con un ángulo de 45° y queremos colarla en una cesta que está a 7 m de distancia horizontal y a 3.5 m de altura.

Calcular con qué velocidad hay que lanzarla.

Resultado: $|v_0|$=11.78 m/s, $\vec{v}$= 8.33 $\vec{i}$ + 8.33 $\vec{j}$ (m/s)

37) Un atleta quiera batir el record del mundo de lanzamiento de peso, establecido en 23,0 m. Sabe que el alcance máximo lo consigue lanzando con un angulo de 45°. Si impulsa el peso desde una altura de 1,75 , ¿con que velocidad mínima debe lanzar?

Resultado: $|\vec{v_0}|$= 14,47 m/s

Una manguera lanza agua horizontalmente a una velocidad de 10 m/s desde una ventana situada a 15 m de altura. ¿A qué distancia de la pared de la casa llegará el chorro de agua al suelo?

Resultado: x= 18,1 m

Una bola que rueda sobre una superficie horizontal situada a 20 m de altura sobre el suelo cae y llega al suelo en un punto situado a una distancia horizontal de 15 m medida desde la base de la superficie. Hallar:

a) La velocidad inicial de la bola en el momento de saltar. Resultado: $\vec{v_0}$= 7,42 $\vec{i}$ (m/s)
b) La velocidad con que llega al suelo. Resultado: $\vec{v}$= 7,42 $\vec{i}$ - 19,8 $\vec{j}$ (m/s)

Lanzamos una bola desde un punto situado a 20 m de altura con un ángulo de 30° por encima de la horizontal y una velocidad de 7.5 m/s. Hallar:

a) El punto en el que llega al suelo. Resultado: $\vec{r}=15{,}83\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$ (m)

b) La velocidad con la que llega al suelo. Resultado: $\vec{v} = 6{,}49\,\vec{i} - 20{,}16\,\vec{j}$ (m/s)

Lanzamos una bola desde un punto situado a 20 m de altura con un ángulo de 30° por debajo de la horizontal y una velocidad de 7.5 m/s. Hallar:

a) El punto en el que llega al suelo. Resultado: $\vec{r}=10{,}97\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$ (m)

b) La velocidad con la que llega al suelo. Resultado: $\vec{v} = 6{,}49\,\vec{i} - 20{,}31\,\vec{j}$ (m/s)

Lanzamos una bola desde un punto situado a 50 m de altura con un ángulo de 45° por encima de la horizontal y una velocidad de 30 m/s. Hallar:

a) La posición del punto más alto de la trayectoria. Resultado: $\vec{r}=45{,}81\,\vec{i} + 72{,}9\,\vec{j}$ (m)

b) La posición y la velocidad de la bola cuando está a 60 m de altura.

Resultado: punto 1 $\vec{r}=11{,}45\,\vec{i} + 60\,\vec{j}$ (m) $\vec{v} = 21{,}21\,\vec{i} + 15{,}92\,\vec{j}$ (m/s)

punto 2 $\vec{r}=80{,}38\,\vec{i} + 60\,\vec{j}$ (m) $\vec{v} = 21{,}21\,\vec{i} - 15{,}93\,\vec{j}$ (m/s)

Una rueda de 30 cm de radio que estaba detenida se pone a girar verticalmente hasta alcanzar 480 rpm en 15 s. En el momento t=10 s salta un pedazo del borde de la rueda con un ángulo de 40°.

Calcular a qué distancia del punto de partida caerá. Resultado: 10 m

El agua de una manguera de los bomberos sale con una velocidad de 25 m/s. Suponiendo que no hay rozamiento con el aire, calcular:

a) La altura máxima que puede alcanzar medida desde la boca de la manguera.

Resultado: $\vec{r} = +\,31{,}25\,\vec{j}$ (m)

b) La distancia horizontal máxima que puede alcanzar medida desde la boca de la manguera.

Resultado: $\vec{r} = 62{,}5\,\vec{i}$ (m)

Calcula la máxima anchura de zanja que puede saltar en horizontal un corredor de parcour (o un saltador de longitud) que alcanza los 10 m/s y salta con un ángulo de 45°.

(Resultado: x = 9,97 m)

Un saltador es capaz de correr a 10 m/s. Calcula dónde cae si salta con:

a) Un ángulo de 30°. Resultado: $\vec{r} = 8{,}66\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$ (m)

b) Un ángulo de 45°. Resultado: $\vec{r} = 10\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$ (m)

c) Un ángulo de 60°. Resultado: $\vec{r} = 8{,}66\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$ (m)

Se lanza una piedra desde el borde de un acantilado sobre el mar de 40 m de altura, con una velocidad de 20 m/s y un ángulo de 50° sobre la horizontal. Si el rozamiento con el aire es despreciable, calcula:

a) El vector velocidad con que entrará en el agua expresado en la forma vectorial ($a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$)

Resultado: $\vec{v} = 12{,}85\,\vec{i} - 32{,}17\,\vec{j}$ (m/s)

b) La altura máxima que alcanzará y la velocidad en ese punto.

Resultado: $\vec{r} = 51{,}74\,\vec{j}$ (m) ; $\vec{v} = 12{,}85\,\vec{i}$ (m/s)

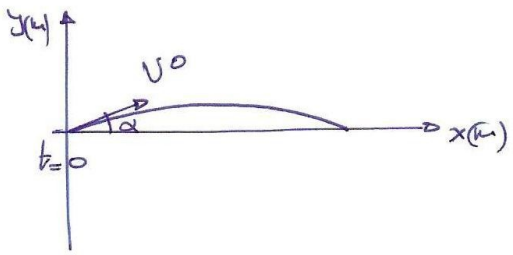
Una moto de agua que va a 60 km/h salta con un ángulo de 15° sobre el mar.

a) ¿Qué distancia saltará?
b) ¿Qué altura máxima alcanzará la moto sobre el mar?

Hipótesis y modelo.

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro oblicuo sobre superficie plana y estática

Esquema




Funciones

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0$

$x = v_{0x}t + x_0$

$v_y = v_{0y} + at$

$v_x = v_{0x}$

$V_0 = 60 \frac{km}{h} \cdot \frac{1000\,m}{1\,km} \cdot \frac{1\,h}{3600\,s} = 16{,}66\ m/s$

$V_{0x} = V_0 \cos\alpha = 16{,}66 \cos 15 = 16{,}1\ m/s$

$V_{0y} = V_0 \operatorname{sen}\alpha = 16{,}66 \cdot \operatorname{sen} 15 = 4{,}31\ m/s$

$y_0 = 0$

$x_0 = 0$

$a_y = -9{,}8\ m/s^2$

Cuestiones

a) Para calcular la posición x del punto de caída, necesitamos calcular el tiempo que tarda en volver al agua. Sabemos que en ese punto $y = 0$ luego, aplicando la función de la posición vertical y:

$y = \frac{1}{2}at^2 + V_{0y}t + y_0 \qquad 0 = \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2 + 4{,}31t + 0$

$(-4{,}9t + 4{,}31)t = 0 \begin{cases} t = 0 \\ -4{,}9t + 4{,}31 = 0 \end{cases} ; \quad t = \frac{-4{,}31}{-4{,}9} = 0{,}88\ s$

$x = 16{,}1 \cdot 0{,}88 + 0 = 14{,}17\ m$

Saltará 14,17 m y caerá en el punto $14{,}17\vec{i} + 0\vec{j}$ (m)

b) Para calcular la altura máxima necesitamos conocer el tiempo en ese punto, del que sabemos que $v_y = 0$

$0 = 4{,}31 + (-9{,}8)t; \quad t = \frac{-4{,}31}{-9{,}8} = 0{,}44\ s$

Portanto $y = \frac{1}{2}(-9{,}8) \cdot (0{,}44)^2 + 4{,}31(0{,}44) + 0 = -0{,}95 + 1{,}90 = 0{,}95\ m$

El punto más alto estará en $(7{,}1\vec{i} + 0{,}95\vec{j})$ (m)

Desde una ventana de una casa que está a 15 m de altura lanzamos un chorro de agua a 20 m/s y con un ángulo de 40° sobre la horizontal. Despreciando el rozamiento con el aire, calcula:

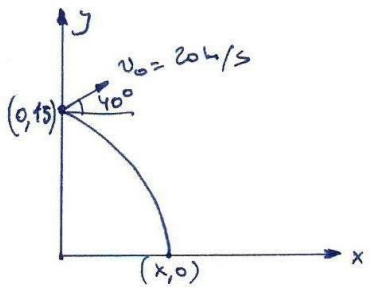
a) Distancia de la base de la casa a que caerá el agua. Resultado: x=52.7 m

b) Velocidad a que el agua llegará al suelo. Resultado: $\vec{v}$=15.32 $\vec{i}$ -21.6 $\vec{j}$ (m/s)

Hipótesis y modelo

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro parabólico sobre superficie plana y estática

Esquema




Funciones

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0$

$x = v_{0x}t + x_0$

$v_y = v_{0y} + at$

$v_x = v_{0x}$

$a_y = -10\ m/s^2$

$v_{0y} = 20 \operatorname{sen} 40 = 12{,}85\ m/s$

$v_{0x} = 20 \cos 40 = 15{,}32\ m/s$

$y_0 = 15\ m$

$x_0 = 0$

$y = -5t + 12{,}85t + 15$

$x = 15{,}32\,t$

$v_y = -10t + 12{,}85$

$v_x = 15{,}32$

Cuestiones

a) en el suelo, y = 0

$0 = -5t^2 + 12{,}85t + 15$

$t = \frac{-12{,}85 \pm \sqrt{(12{,}85)^2 - 4(-5)\cdot 15}}{2(-5)} =$

$= \frac{-12{,}85 \pm 21{,}56}{-10} = \begin{cases} 3{,}44\ s \\ -0{,}87 \end{cases}$

$x = 15{,}32 \cdot 3{,}44 =$

$= 52{,}7\ m$

Aplicando t en el suelo a la función $v_y$ y a $v_x$

b) $\vec{v}_y = -10 \cdot 3{,}44 + 12{,}8 = -21{,}6\vec{j}$ (m/s)

$\vec{v}_x = 15{,}32\vec{i}$ (m/s) $-21{,}6\vec{j}$ (m/s)

$\vec{v} = 15{,}32\vec{i} - 21{,}6\vec{j}$ (m/s)

c) - aumentando el ángulo hasta 45°

- aumentando $v_0$

- aumentando $y_0$

Desde el tejado de una casa que está a 15 m de altura lanzamos una pelota a 30 m/s y con un ángulo de 35° sobre la horizontal. Despreciando el rozamiento con el aire, calcula:

a- Distancia de la base de la casa a que caerá la pelota. Resultado: x=101.9 m

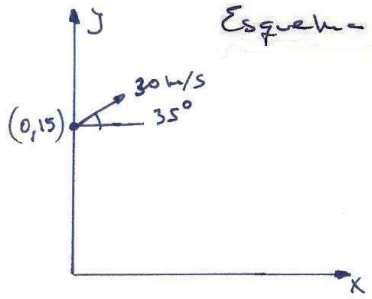
b- Velocidad a que la pelota llegará al suelo. Resultado: $\vec{v}$=24.5 $\vec{i}$ -24.4 $\vec{j}$

c- ¿Dónde estará para t= 2s? Resultado: $\vec{r}$=49 $\vec{i}$ +29.4 $\vec{j}$

Hipótesis y modelo.

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro oblicuo sobre superficie plana y estática

Esquema




Funciones

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0$

$x = v_{0x}t + x_0$

$v_y = v_{0y} + at$

$v_x = v_{0x}$

$a_y = -10 m/s^2$

$v_{0y} = 30 \text{ sen } 35° = 17{,}20 m/s$

$v_{0x} = 30 \cos 35° = 24{,}5 m/s$

$y_0 = 15 m$

$x_0 = 0$

$y = -5t^2 + 17{,}20t + 15$

$x = 24{,}5t$

$v_y = -10t + 17{,}20$

$v_x = 24{,}5$

Cuestiones

a) en el suelo $y = 0$

$0 = -5t^2 + 17{,}20t + 15$

$t = \frac{-17{,}20 \pm \sqrt{(17{,}20)^2 - 4.(-5).15}}{2(-5)} =$

$= \frac{-17{,}20 \pm 24{,}41}{-10} =$ 4,16 s

$x = 24{,}5 \cdot 4{,}16 = 101{,}9 m$

b) Aplicando t en el suelo a $v_y$ y a $v_x$:

$v_y = -10 \cdot 4{,}16 + 17{,}20 = -24{,}4 m/s$

$v_x = 24{,}5 m/s$

$\vec{v} = 24{,}5 \vec{i} - 24{,}4 \vec{j}$ m/s

c) Aplicando t=2s a las funciones x e y:

$y = -5 \cdot 2^2 + 17{,}20 \cdot 2 + 15 =$

$= -20 + 34{,}4 + 15 = 29{,}4 m$

$x = 24{,}5 \cdot 2 = 49 m$

El vector posición cuando t=2s será: $\vec{r}_{2s} = 49\vec{i} + 29{,}4\vec{j}$ m

Desde la ventana de una casa que está a 40 m de altura lanzamos un balón con una velocidad de 30 m/s y un ángulo de 35º. Despreciando el rozamiento con el aire, calcular:

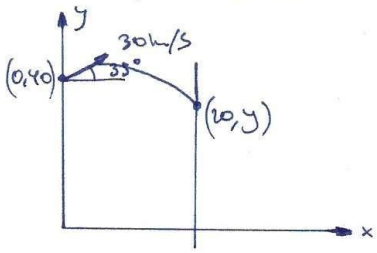
a) En qué punto chocará contra la pared de la casa de enfrente, que está a 20 de distancia horizontal Resultado: punto (50.65, 20), en metros

b) La velocidad con que choca contra la pared. Resultado: $\vec{v}$=24.57 $\vec{i}$ + 9.1 $\vec{j}$ (m/s)

Hipótesis y modelo

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro oblicuo sobre superficie plana y estática

Esquema




Funciones

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0$

$x = v_{0x}t + x_0$

$v_y = v_{0y} + at$

$v_x = v_{0x}$

$a_y = -10\ m/s^2$

$v_{0y} = 30 \operatorname{sen} 35 = 17{,}20\ m/s$

$v_{0x} = 30 \cos 35 = 24{,}57\ m/s$

$y_0 = 40\ m$

$x_0 = 0$

$y = -5t^2 + 17{,}20t + 40$

$x = 24{,}57t$

$v_y = -10t + 17{,}20$

$v_x = 24{,}57$

Cuestiones

a) Al chocar contra la pared, $x = 20\ m$.

Aplicándolo a la función x:

$20 = 24{,}57t$

$t = \frac{20}{24{,}57} = 0{,}81\ s$

Aplicando este tiempo a la función y:

$y = -5(0{,}81)^2 + 17{,}20 \cdot (0{,}81) + 40 = 50{,}65\ m$

b) $v_x = 24{,}57\ m/s$

$v_y = -10 \cdot 0{,}81 + 17{,}20 = 9{,}1\ m/s$

$\vec{v} = 24{,}57\vec{i} + 9{,}1\vec{j}$

Aplicando $t = 0{,}81\ s$ a las funciones $v_x$ y $v_y$:

Desde la cima de una colina que está a 60 m de altura lanzamos un proyectil con una velocidad de 500 m/s y un ángulo de 30º. Despreciando el rozamiento con el aire, calcular:

a) El punto donde llegará el proyectil al suelo. Resultado: punto (21754, 0), en metros

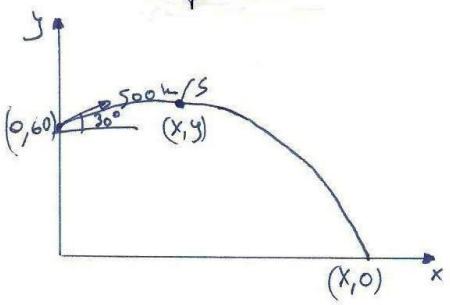
b) La velocidad con que llega al suelo. Resultado: $\vec{v}$=433 $\vec{i}$ - 252.4 $\vec{j}$

c) La posición del punto más alto de la trayectoria Resultado: $\vec{r}$=10825 $\vec{i}$ + 3185 $\vec{j}$

Hipótesis y modelo

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro parabólico sobre superficie plana y estática

Esquema




Funciones

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0$

$x = v_{0x}t + x_0$

$v_y = v_{0y} + at$

$v_x = v_{0x}$

$a_y = -10\,m/s^2$

$v_{0y} = 500 \text{ sen } 30 = 250\,m/s$

$v_{0x} = 500 \cos 30 = 433\,m/s$

$y_0 = 60\,m$

$x_0 = 0$

$y = -5t^2 + 250t + 60$

$x = 433t$

$v_y = -10t + 250$

$v_x = 433\,m/s$

Cuestiones

a) En el suelo $y = 0$

$0 = -5t^2 + 250t + 60$

$t = \frac{-250 \pm \sqrt{(250)^2 - 4\cdot(-5)\cdot 60}}{2\cdot(-5)} =$

$= \frac{-250 \pm 252{,}4}{-10} = \begin{cases} 50{,}24\,s \\ \end{cases}$

$x = 433 \cdot t = 433 \cdot 50{,}24 = 21754\,m$

b) $v_x = 433\,m/s$

$v_y = -10 \cdot 50.24 + 250 = -252{,}4\,m/s$

$\vec{v} = 433\,\vec{i} - 252{,}4\,\vec{j}\ m/s$

c) En el punto más alto, $v_y = 0$

$0 = -10t + 250 ; +10t = 250$

$t = \frac{250}{10} = 25\,s$

$y = -5(25)^2 + 250 \cdot 25 + 60 =$

$= -3125 + 6250 + 60 = 3185\,m$

$x = 433 \cdot 25 = 10.825\,m$

$r_{25} = 10825\,\vec{i} + 3185\,\vec{j}\ m$

Lanzamos desde el suelo una pelota con un ángulo de 45° y queremos colarla en una cesta que está a 7 m de distancia horizontal y a 3.5 m de altura.

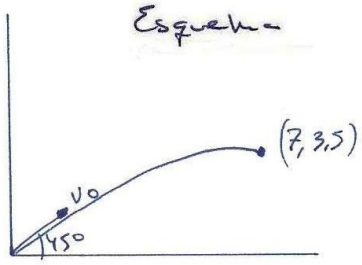
Calcular con qué velocidad hay que lanzarla.

Resultado: $|v_0|$=11.78 m/s, $\vec{v}$= 8.33 $\vec{i}$ + 8.33 $\vec{j}$ (m/s)

Hipótesis y modelo.

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro oblicuo sobre superficie plana y estática

Esquema




Funciones

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0$

$x = v_{0x}t + x_0$

$v_y = v_{0y} + at$

$v_x = v_{0x}$

$a_y = -10\,m/s^2$

$v_{0x} = v_0 \cos 45 \quad m/s$

$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} 45 \quad m/s$

$y_0 = 0$

$x_0 = 0$

$$\left.\begin{aligned} y &= -5t^2 + v_0\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ x &= v_0\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ v_y &= -10t + v_0\frac{\sqrt{2}}{2} \\ v_x &= v_0\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}$$

Cuestiones

Tomando las ecuaciones y y x

$y = -5t^2 + x$

aplicando al punto (7, 3,5)

$3{,}5 = -5t^2 + 7$ ; $5t^2 = 7 - 3{,}5 = 3{,}5$

$t = \sqrt{3{,}5/5} = 0{,}84\,s$

$v_0 = x\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}t} = \frac{7\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 0{,}84} = 11{,}78\,m/s$

$\vec{v} = 11.78\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + 11.78\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} =$

$= 8{,}33\,\vec{i} + 8.33\,\vec{j} \quad m/s$

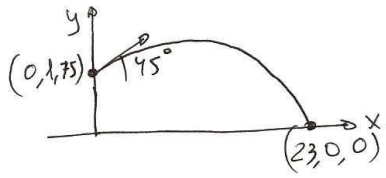
Un atleta quiera batir el record del mundo de lanzamiento de peso, establecido en 23,0 m. Sabe que el alcance maximo lo consigue lanzando con un angulo de 45°. Si impulsa el peso desde una altura de 1,75 , ¿con que velocidad mínima debe lanzar?

Resultado: $|\vec{v_0}|$= 14,47 m/s

Hipótesis y modelo.

- Objeto puntual
- Rozamiento despreciable
- Modelo de tiro oblicuo sobre superficie plana y estática

Esquema




Funciones

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0$

$x = v_{0x}t + x_0$

$v_y = v_{0y} + at$

$v_x = v_{0x}$

$x_0 = 0$

$y_0 = 1,75 m$

$v_{0x} = v_0 \cos 45$

$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} 45$

$a = -9,8 \, m/s^2$

$y = \frac{1}{2}(-9,8)t^2 + v_0 \operatorname{sen} 45 + 1,75$

$x = v_0 \cos 45 \cdot t$

$v_y = -9,8t + v_0 \operatorname{sen} 45$

$v_x = v_0 \cos 45$

Para alcanzar el punto (23, 0) aplicamos estos valores a las funciones de x e y.

$23 = v_0 \cos 45 \cdot t$ ; $t = \frac{23}{v_0 \cos 45}$

$0 = -4,9t^2 + v_0 \operatorname{sen} 45 t + 1,75$

Como $v_0 = \frac{23}{t \cos 45}$

$0 = -4,9t^2 + \frac{23 \cancel{\operatorname{sen} 45} \cancel{t}}{\cancel{t} \cancel{\cos 45}} + 1,75$

$0 = -4,9t^2 + 24,75$ ; $t = \sqrt{\frac{-24,75}{-4,9}} = \sqrt{5,05} = 2,25 s$

Aplicando este tiempo a la función x $v_0 = \frac{23}{2,25 \cdot \cos 45} = 14,47 \, m/s$

Una manguera lanza agua horizontalmente a una velocidad de 10 m/s desde una ventana situada a 15 m de altura. ¿A qué distancia de la pared de la casa llegará el chorro de agua al suelo?

Resultado: x= 18,1 m

Suponemos un tiro horizontal con rozamiento despreciable

Funciones y parámetros

$x = v_{0x} t + x_0$

$v_x = v_{0x}$

$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$

$v_y = a_y t + v_{0y}$

$a_y = -9{,}8\ m/s^2$

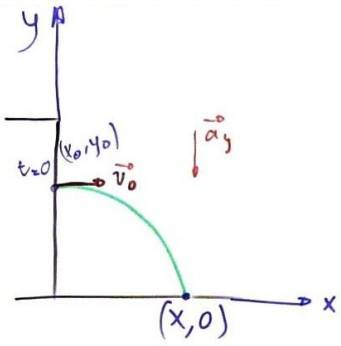
$v_{0x} = 10\ m/s$

$v_{0y} = 0$

$x_0 = 0$

$y_0 = 15\ m$

Esquema




Cálculo del tiempo de caída.

$y = \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2 + 0t + 15$

Cuando $y = 0$

$0 = \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2 + 15$ ; $0 = -4{,}9t^2 + 15$

$t^2 = \frac{-15}{-4{,}9}$ ; $t = \pm\sqrt{\frac{-15}{-4{,}9}} = \pm 1{,}81\ s$

Cálculo de la distancia de caída

$x = 10 \cdot t + 0$

Para $t = 1{,}81\ s$

$x = 10 \cdot 1{,}81 = 18{,}1\ m$

Una bola que rueda sobre una superficie horizontal situada a 20 m de altura sobre el cuelo cae y llega al suelo en un punto situado a una distancia horizontal de 15 m medida desde la base de la superficie. Hallar:

a) La velocidad inicial de la bola en el momento de saltar. Resultado: $\vec{v_0}$= 7,42 $\vec{i}$ (m/s)

b) La velocidad con que llega al suelo. Resultado: $\vec{v}$= 7,42 $\vec{i}$ - 19,8 $\vec{j}$ (m/s)

Suponemos un tiro horizontal con un objeto puntual y sin rozamiento con el aire

Funciones y parámetros

$x = v_{0x} t + x_0$

$v_x = v_{0x}$

$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$

$v_y = a_y t + v_{0y}$

$a_y = -9{,}8 \ m/s^2$

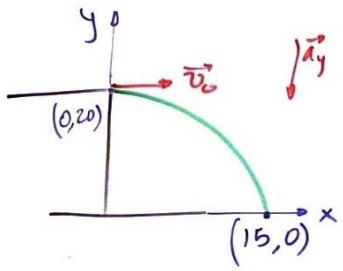
$v_{0x} =$

$v_{0y} = 0$

$x_0 = 0$

$y_0 = 20 m$

Esquema




Sabemos que $x = 15m$ cuando $y = 0m$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2 + 0t + 20 \\ x = V_{0x} t + 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 0 = -4{,}9t^2 + 20 \\ 15 = V_{0x} t \end{array}\right\}$$

$$t = \frac{15}{V_{0x}} \quad ; \quad 0 = -4{,}9\left(\frac{15}{V_{0x}}\right)^2 + 20$$

$$0 = -4{,}9 \cdot \frac{15^2}{V_{0x}^2} + 20 \quad ; \quad -20 = -4{,}9 \cdot \frac{15^2}{V_{0x}^2}$$

$$20 V_{0x}^2 = 4{,}9 \cdot 15^2 \ ; \ V_{0x} = \sqrt{\frac{4{,}9 \cdot 15^2}{20}} = 7{,}42 \ m/s$$

Cálculo del tiempo de caída

$$y = \frac{1}{2} a t^2 + V_{0y} t + y_0$$

$$0 = \frac{1}{2}(-9{,}8) t^2 + 0 \cdot t + 20$$

$$-20 = \frac{1}{2}(-9{,}8) t^2$$

$$\frac{2(-20)}{-9{,}8} = t^2 \qquad t = 2{,}02 \ s$$

$$v_y = (-9{,}8) \cdot 2{,}02 + 0 = -19{,}8 \ m/s$$

$$v_x = 7{,}42 \ m/s^2$$

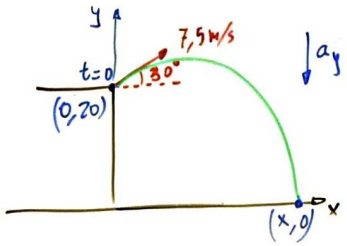
$$\vec{v} = 7{,}42 \ \vec{i} - 19{,}8 \ \vec{j} \ (m/s)$$

Lanzamos una bola desde un punto situado a 20 m de altura con un ángulo de 30° por encima de la horizontal y una velocidad de 7.5 m/s. Hallar:

a) El punto en el que llega al suelo. Resultado: $\vec{r}$=15,83 $\vec{i}$ + 0 $\vec{j}$ (m)

b) La velocidad con la que llega al suelo. Resultado: $\vec{v}$= 6,49 $\vec{i}$ - 20,16 $\vec{j}$ (m/s)

- Suponemos un objeto puntual y sin rozamiento con el aire
- Es un tiro oblicuo parabólico.




Funciones

$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$ $\quad a_y = -9{,}8\ m/s^2$

$x = v_{0x} t + x_0$ $\quad v_{0x} = 7{,}5 \cos 30 = 6{,}49\ m/s$

$v_y = a_y t + v_{0y}$ $\quad v_{0y} = 7{,}5 \text{ sen } 30 = 3{,}75\ m/s$

$v_x = v_{0x}$ $\quad x_0 = 0$

$y_0 = 20\ m$

$y = \frac{1}{2}(-9{,}8) t^2 + 3{,}75 t + 20$ función general

a) En el suelo, $y = 0$

$$0 = -4{,}9 t^2 + 3{,}75 t + 20$$

$$t = \frac{-3{,}75 \pm \sqrt{(3{,}75)^2 - 4\cdot(-4{,}9)\cdot 20}}{2(-4{,}9)} = \frac{-3{,}75 \pm \sqrt{406{,}06}}{-9{,}8} =$$

$$= \frac{-3{,}75 \pm 20{,}15}{-9{,}8} = \begin{cases} 2{,}44\ s \\ \cancel{-1{,}67\ s} \end{cases}$$

La distancia de caída x es

$x = 6{,}49 t + 0$

para $t = 2{,}44\ s$

$x = 6{,}49 \cdot 2{,}44 = 15{,}83\ m$

El objeto cae en $(15{,}83, 0)_{(m)}$

b) Calculamos $v_x$ y $v_y$ para $t = 2{,}44\ s$ y las sumamos.

$v_x = 6{,}49\ m/s$

$v_y = (-9{,}8) \cdot 2{,}44 + 3{,}75 = -20{,}16\ m/s$

La velocidad de llegada al suelo es

$\vec{v} = 6{,}49\ \vec{i} - 20{,}16\ \vec{j}$ (m/s)

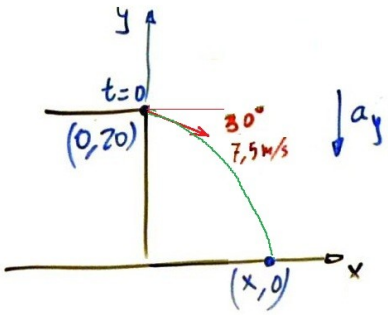
$|\vec{v}| = \sqrt{(6{,}49)^2 + (-20{,}16)^2} = 21{,}18\ m/s$

Lanzamos una bola desde un punto situado a 20 m de altura con un ángulo de 30° por debajo de la horizontal y una velocidad de 7.5 m/s. Hallar:

a) El punto en el que llega al suelo. Resultado: $\vec{r}$=10,97 $\vec{i}$ + 0 $\vec{j}$ (m)

b) La velocidad con la que llega al suelo. Resultado: $\vec{v}$= 6,49 $\vec{i}$ - 20,31 $\vec{j}$ (m/s)

- Suponemos un objeto puntual y sin rozamiento con el aire
- Es un tiro oblicuo parabólico.




Funciones

$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$ $\quad a_y = -9{,}8\ m/s^2$

$x = v_{0x} t + x_0$ $\quad v_{0x} = 7{,}5 \cos 30 = 6{,}49\ m/s$

$v_y = a_y t + v_{0y}$ $\quad v_{0y} = -7{,}5 \operatorname{sen} 30 = -3{,}75\ m/s$

$v_x = v_{0x}$ $\quad x_0 = 0$

$y_0 = 20\ m$

$y = \frac{1}{2}(-9{,}8) t^2 - 3{,}75 t + 20$ función general

En el suelo $0 = -4{,}9 t^2 - 3{,}75 t + 20$

$$t = \frac{+3{,}75 \pm \sqrt{(-3{,}75)^2 - 4\cdot(-4{,}9)\cdot 20}}{2(-4{,}9)} = \frac{+3{,}75 \pm \sqrt{406{,}06}}{-9{,}8} =$$

$$= \frac{+3{,}75 \pm 20{,}15}{-9{,}8} = \begin{cases} 1{,}69\ s \\ -2{,}44\ s \end{cases}$$

La distancia x de caída es

$x = 6{,}49 t + 0$ para $t = 1{,}69\ s$

$x = 6{,}49 \cdot 1{,}69 = 10{,}97\ m$

El objeto cae en $(10{,}97, 0)$ (m)

b) Calculamos $v_x$ y $v_y$ para $t = 1{,}69\ s$ y las sumamos.

$v_x = 6{,}49\ m/s$

$v_y = (-9{,}8)\ 1{,}69 - 3{,}75 = -20{,}31\ m/s$

La velocidad de llegada al suelo es

$\vec{v} = 6{,}49\ \vec{i} - 20{,}31\ \vec{j}$ (m/s)

$|\vec{v}| = \sqrt{(6{,}49)^2 + (-20{,}31)^2} = 21{,}32\ m/s$

Lanzamos una bola desde un punto situado a 50 m de altura con un ángulo de 45° por encima de la horizontal y una velocidad de 30 m/s. Hallar:

a) La posición del punto más alto de la trayectoria. Resultado: $\vec{r}$=45,81 $\vec{i}$ + 72,9 $\vec{j}$ (m)

b) La posición y la velocidad de la bola cuando está a 60 m de altura.

Resultado: punto 1 $\vec{r}$=11,45 $\vec{i}$ + 60 $\vec{j}$ (m) $\vec{v}$= 21,21 $\vec{i}$ + 15,92 $\vec{j}$ (m/s)

punto 2 $\vec{r}$=80,38 $\vec{i}$ + 60 $\vec{j}$ (m) $\vec{v}$= 21,21 $\vec{i}$ - 15,93 $\vec{j}$ (m/s)

- Suponemos un objeto puntual sin rozamiento con el aire.

Funciones y parámetros

$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$

$x = v_{0x} t + x_0$

$v_y = a_y t + v_{0y}$

$v_x = v_{0x}$

$a_y = -9{,}8 \ m/s^2$ $(x_0, y_0)$

$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha = 30 \operatorname{sen} 45 = 21{,}21 \ m/s$

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 30 \cos 45 = 21{,}21 \ m/s$

$y_0 = 50 \ m$

$x_0 = 0$

a) Posición del punto más alto de la trayectoria

Calculamos t en el punto más alto

sabiendo que $v_y = 0$ en el punto más alto

$v_y = -9{,}8t + 21{,}21$

$0 = -9{,}8t + 21{,}21$

$\frac{-21{,}21}{-9{,}8} = t$ ; $t = 2{,}16 \ s$

Calculamos x e y para t = 2,16 s

$y = \frac{1}{2}(-9{,}8)(2{,}16)^2 + 21{,}21 \cdot 2{,}16 + 50 = -22{,}86 + 45{,}81 + 50 = 72{,}9 \ m$

$x = 21{,}21 \cdot 2{,}16 + 0 = 45{,}81 \ m$

El punto más alto está en (45,81, 79,2) metros

b) Posición y velocidad cuando $y = 60\,m$

$$y = \frac{1}{2}(-9{,}8)\,t^2 + 21{,}21 \cdot t + 50$$

$$60 = -4{,}9t^2 + 21{,}21t + 50 \quad ; \quad 0 = -4{,}9t^2 + 21{,}21t + 50 - 60$$

$$0 = -4{,}9t^2 + 21{,}21t - 10$$

$$t = \frac{-21{,}21 \pm \sqrt{(21{,}21)^2 - 4(-4{,}9)(-10)}}{2(-4{,}9)} = \frac{-21{,}21 \pm \sqrt{450 - 196}}{-9{,}8} = \begin{cases} 0{,}54\,s \\ 3{,}79\,s \end{cases}$$

Hay dos puntos en que $y = 60\,m$.

Punto 1) $x = 21{,}21 \cdot 0{,}54 + 0 = 11{,}45\,m$ posición: $(11{,}45, 60)$ metros

$v_y = -9{,}8 \cdot 0{,}54 + 21{,}21 = 15{,}92\,m/s$ velocidad: $(21{,}21\,\vec{i} + 15{,}92\,\vec{j})\,m/s$

Punto 2) $x = 21{,}21 \cdot 3{,}79 + 0 = 80{,}38\,m$ posición $(80{,}38, 60)$ metros

$v_y = -9{,}8 \cdot 3{,}79 + 21{,}21 = -15{,}93\,m/s$ velocidad: $(21{,}21\,\vec{i} - 15{,}93\,\vec{j})\,m/s$

Una rueda de 30 cm de radio que estaba detenida se pone a girar verticalmente hasta alcanzar 480 rpm en 15 s. En el momento t=10 s salta un pedazo del borde de la rueda con un ángulo de 40°.

Calcular a qué distancia del punto de partida caerá. Resultado: 10 m

Suponemos un mcua en la rueda y un tiro oblicuo sin rozamiento en el objeto que salta.

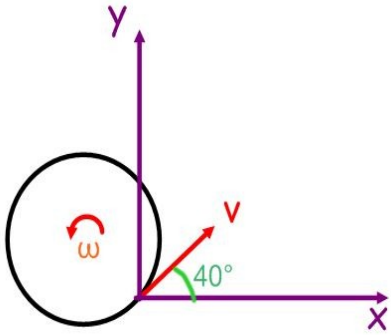
Funciones y parámetros

$\omega = \alpha t + \omega_0$ $\quad y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$ $\quad r = 0{,}3\,m$

$v = \omega r$ $\quad x = v_{0x} t + x_0$ $\quad \omega = 480\,rpm$ para $t = 15\,s$ $\quad x_0 = 0$ $\quad a_y = -9{,}8\,m/s^2$

$a_y = a_x t + v_{0y}$ $\quad \omega_0 = 0$ $\quad y_0 = 0$ $\quad \varphi = 40°$

$v_x = v_{0x}$




a) Calculamos $\alpha$ para calcular $\omega_{10}$ y conocer $v$

$$\omega_{15} = 480 \frac{\text{vueltas}}{\text{min}} \cdot \frac{1\,\text{min}}{60\,s} \frac{2\pi\,rad}{1\,\text{vuelta}} = \frac{480 \cdot 2\pi}{60} = 16\pi \frac{rad}{s}$$

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

$$16\pi = \alpha \cdot 15 + 0 \qquad \alpha = \frac{16\pi}{15}\ rad/s^2$$

Calculamos $\omega$ para $t = 10\,s$

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

$$\omega = \frac{16}{15}\pi \cdot 10 + 0 = \frac{160}{15}\pi = 10{,}6\pi\ rad/s$$

Cálculo de la velocidad del borde para $t = 10\,s$

$$v = \omega r = 6\pi \left(\frac{rad}{s}\right) \cdot 0{,}3\,(m) = 10{,}0\,m/s$$

Como $v_0 = 10\,m/s$ y $\varphi = 40°$

$$v_{0x} = v_0 \cos\varphi = 10 \cos 40° = 7{,}66\,m/s$$

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\varphi = 10 \operatorname{sen} 40° = 6{,}42\,m/s$$

Sabemos que cuando llegue al suelo $y = 0$

$$y = \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2 + 6{,}42t + 0$$

$$0 = -4{,}9t^2 + 6{,}42t \quad ; \quad 0 = (-4{,}9t + 6{,}42)t \qquad \begin{cases} t = 0 \\ -4{,}9t + 6{,}42 = 0 \\ t = \frac{-6{,}42}{-4{,}9} = 1{,}31\,s \end{cases}$$

La distancia horizontal será:

$$x = 7{,}66t + 0 = 7{,}66 \cdot 1{,}31 = \underline{10{,}0\ m}$$

El agua de una manguera de los bomberos sale con una velocidad de 25 m/s. Suponiendo que no hay rozamiento con el aire, calcular:

a) La altura máxima que puede alcanzar medida desde la boca de la manguera.

Resultado: $\vec{r} = +\ 31{,}25\ \vec{j}$ (m)

b) La distancia horizontal máxima que puede alcanzar medida desde la boca de la manguera.

Resultado: $\vec{r} = 62{,}5\ \vec{i}$ (m)

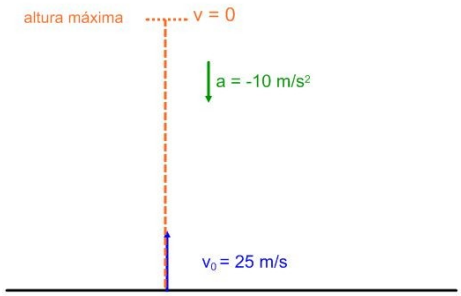
a) No hay rozamientos y suponemos tiro vertical

Funciones y parámetros

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + y_0$ $\quad a = -10\ m/s^2$

$v = at + v_0$ $\quad v_0 = 25\ m/s$

$y_0 = 0$




En el punto más alto $v = 0$

$0 = -10t + 25$

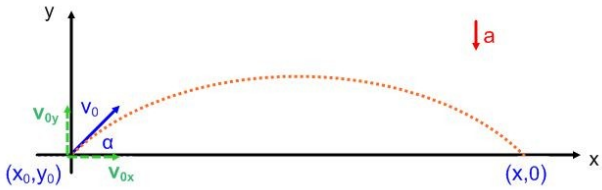
$t = \frac{-25}{-10} = 2{,}5\ s$

La altura será

$y = \frac{1}{2}(-10)(2{,}5)^2 + 25 \cdot 2{,}5 + 0 = 31{,}25\ m$

b) Para alcanzar la máxima distancia horizontal, el ángulo debe ser de 45°

Suponemos un tiro oblícuo sin rozamiento




Funciones y parámetros

$y = \frac{1}{2}a_y t + v_{0y} t + y_0$

$x = v_{0x} t + x_0$

$v_y = a_y t + v_{0y}$

$v_x = v_{0x}$

$a_y = -10\ m/s^2$

$v_{0y} = 25 \operatorname{sen} 45° = 17{,}68\ m/s$

$v_{0x} = 25 \cos 45° = 17{,}68\ m/s$

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

Cuando llegue al suelo $y = 0$

$0 = \frac{1}{2}(-10)t^2 + 17{,}68t + 0$

$-5t^2 + 17{,}68t = 0$

$(-5t + 17{,}68)t = 0 \quad \begin{cases} t = 0 \\ -5t + 17{,}68 = 0 \end{cases}$

$t = \frac{-17{,}68}{-5} = 3{,}53\ s$

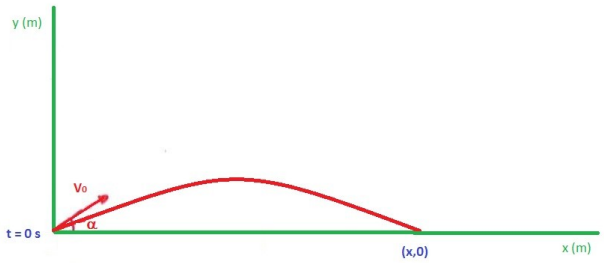
Sustituyendo este tiempo en la x:

$x = 17{,}68 \cdot 3{,}53 + 0 = 62{,}5\ m$

45) Calcula la máxima anchura de zanja que puede saltar en horizontal un corredor de parcour (o un saltador de longitud) que alcanza los 10 m/s y salta con un ángulo de 45°.

(Resultado: x = 9,97 m)

Suponemos objeto puntual
Despreciamos rozamiento
Suponemos sistema plano y estático.



$\operatorname{sen}\alpha = \frac{V_{0y}}{V_0}$

$\cos\alpha = \frac{V_{0x}}{V_0}$

funciones

$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$

$x = v_{0x} t + x_0$

$v_y = a_y t + v_0$

$v_x = v_{x_0}$

parámetros

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$v_{0x} = V_0 \cos\alpha = 10 \cos 45 = 7{,}07 \text{ m/s}$

$v_{0y} = V_0 \operatorname{sen}\alpha = 10 \operatorname{sen} 45 = 7{,}07 \text{ m/s}$

$a_y = -10 \text{ m/s}^2$

$$\left.\begin{array}{l} y = -5t^2 + 7{,}07t \\ x = 7{,}07t \\ v_y = -10t + 7{,}07 \\ v_x = 7{,}07 \text{ m/s} \end{array}\right.$$

Para calcular x de caída necesitamos calcular t en el punto de caída (y = 0)

$0 = -5t^2 + 7{,}07t$

$0 = (-5t + 7{,}07)\,t \quad \begin{cases} t = 0 \\ -5t + 7{,}07 = 0 \end{cases} \qquad t = \frac{-7{,}07}{-5} = 1{,}41 \text{ s}$

En ese tiempo, calculamos x

$x = 7{,}07 \cdot 1{,}41 = 9{,}97 \text{ m}$

47) Un saltador es capaz de correr a 10 m/s. Calcula dónde cae si salta con:

a) Un ángulo de 30°. Resultado: $\vec{r} = 8{,}66\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$ (m)

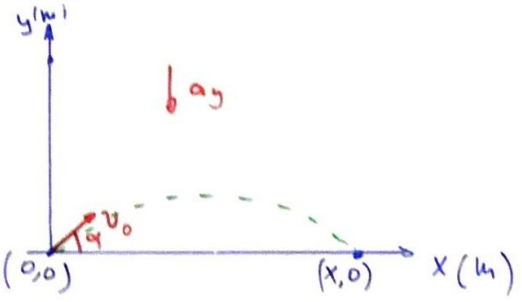
b) Un ángulo de 45°. Resultado: $\vec{r} = 10\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$ (m)

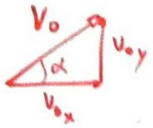
c) Un ángulo de 60°. Resultado: $\vec{r} = 8{,}66\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$ (m)

Suponemos objeto puntual

Despreciamos rozamiento

Suponemos sistema plano y estático.




Funciones y parámetros

$y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0$

$x = v_{0x} t + x_0$

$v_y = a_y t + v_{0y}$

$v_x = v_{0x}$

$v_{saltador} = v_0 = 10\,m/s$

$a_y = -10\,m/s^2$

$v_{0y} = V_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha$

$v_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha$

$y_0 = 0$

$x_0 = 0$

a) Si $\alpha = 30°$, $v_{0y} = 10 \operatorname{sen} 30° = 5\,m/s$

$v_{0x} = 10 \cos 30 = 8{,}66\,m/s$

En el punto de caída, $y = 0$

$y = \frac{1}{2} a t^2 + v_{0y} t + y_0$

$0 = \frac{1}{2}(-10) t^2 + 5t + 0$ ; $-5t^2 + 5t = 0$ ; $t(-5t+5) = 0$

$\begin{cases} t = 0 \\ -5t + 5 = 0 \; ; \; t = \frac{-5}{-5} = 1\,s \end{cases}$

Sustituyendo en x:

$x = v_{0x} t + x_0$

$x = 8{,}66 \cdot 1 + 0 = 8{,}66\,m$

b) Si $\alpha = 45°$, $v_{0y} = 10 \operatorname{sen} 45° = 7{,}07$ m/s

$v_{0x} = 10 \cos 45° = 7{,}07$ m/s

En el punto de caída, $y = 0$

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0$

$0 = \frac{1}{2}(-10)t^2 + 7{,}07t + 0$ ; $-5t^2 + 7{,}07t = 0$; $t(-5t + 7{,}07) = 0$

$\begin{cases} t = 0 \\ -5t + 7{,}07 = 0 \end{cases}$ ; $t = \frac{-7{,}07}{-5} = 1{,}44$ s

Sustituyendo en x:

$x = v_{0x}t + x_0$

$x = 7{,}07 \cdot 1{,}44 + 0 = 10$ m

c) Si $\alpha = 60°$, $v_{0y} = 10 \operatorname{sen} 60° = 8{,}66$ m/s

$v_{0x} = 10 \cos 60° = 5$ m/s

En el punto de caída, $y = 0$

$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0$

$0 = \frac{1}{2}(-10)t^2 + 8{,}66t + 0$ ; $-5t^2 + 8{,}66t = 0$; $t(-5t + 8{,}66) = 0$

$\begin{cases} t = 0 \\ -5t + 8{,}66 = 0 \end{cases}$ ; $t = -\frac{8{,}66}{-5} = 1{,}73$ s

Sustituyendo en x:

$x = v_{0x}t + x_0$

$x = 5 \cdot 1{,}73 = 8{,}65$ m

48) Se lanza una piedra desde el borde de un acantilado sobre el mar de 40 m de altura, con una velocidad de 20 m/s y un ángulo de 50° sobre la horizontal. Si el rozamiento con el aire es despreciable, calcula:

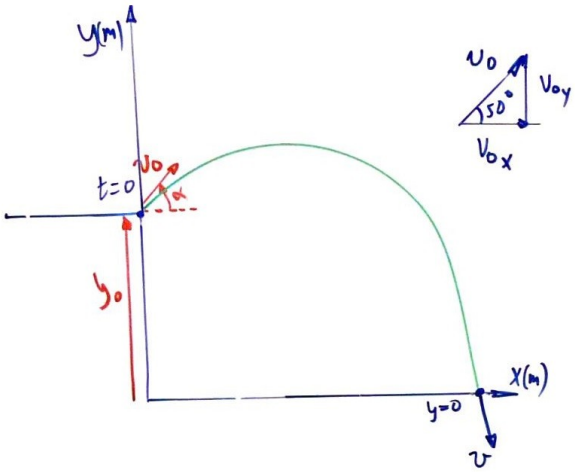
a) El vector velocidad con que entrará en el agua expresado en la forma vectorial ($a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$)

Resultado: $\vec{v} = 12{,}85\,\vec{i} - 32{,}17\,\vec{j}$ (m/s)

b) La altura máxima que alcanzará y la velocidad en ese punto.

Resultado: $\vec{r} = 51{,}74\,\vec{j}$ (m) ; $\vec{v} = 12{,}85\,\vec{i}$ (m/s)

Suponemos un movimiento parabólico sin rozamiento con el aire, objeto puntual y superficie plana




Funciones y parámetros

$y = \frac{1}{2} a_y t + v_{0y} t + y_0$

$x = v_{0x} t + x_0$

$v_y = a_y t + v_{0y}$

$v_x = v_{0x}$

$y_0 = 40\,m \quad x_0 = 0$

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 20 \cos 50° = 12{,}85\,m/s$

$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha = 20 \operatorname{sen} 50° = 15{,}32\,m/s$

$a_y = -10\,m/s^2$

a) Calculamos t de llegada a altura 0 (y=0)

$0 = \frac{1}{2}(-10)t^2 + 15{,}32t + 40$

$0 = -5t^2 + 15{,}32t + 40$

$$t = \frac{-15{,}32 \pm \sqrt{(15{,}32)^2 - 4(-5)\cdot 40}}{2(-5)} = \frac{-15{,}32 \pm \sqrt{1034{,}17}}{-10} =$$

$t_1 = -1{,}68\,s$ ; $t_2 = 4{,}75\,s$

Aplicamos $t_2$ a $v_y$ y a $v_x$:

$v_y = -10 \cdot 4{,}75 + 15{,}32 = -32{,}17\,m/s$

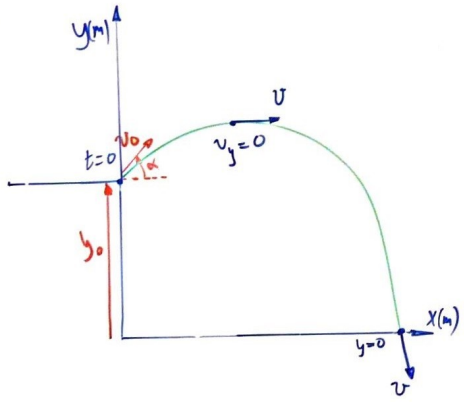
$v_x = v_{0x} = 12{,}85\,m/s$

$\vec{v} = 12{,}85\,\vec{i} - 32{,}17\,\vec{j}$ (m/s)

b) Calculamos t de llegada al punto más alto ($v_y = 0$)

$$0 = -10 \cdot t + 15,32$$

$$t = \frac{-15,32}{-10} = 1,53 \text{ s}$$




La altura máxima es:

$$y = \frac{1}{2}(-10)\cdot(1,53)^2 + 15,32 \cdot 1,53 + 40 =$$

$$= -11,70 + 23,44 + 40 = 51,74 \text{ m}$$

La velocidad vertical ($v_y$) es nula

$$v_x = V_{0x} = 12,85 \text{ m/s}$$

En el punto más alto $\vec{v} = 12,85\,\vec{i}$ (m/s)