

1 Monomios, polinomios y otras expresiones algebraicas

Página 72

1. ¿Cuáles de los siguientes monomios son semejantes a $5x^2$?

$$7x^2, 5x^3, 5x, 5xy, x^2, 3x^2y$$

$7x^2$ y x^2 son semejantes a $5x^2$.

2. Di el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $x^5 - 6x^2 + 3x + 1$

b) $5xy^4 + 2y^2 + 3x^3y^3 - 2xy$

c) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3$

d) $2x^2 - 3x - 10$

a) Grado 5.

b) Grado 6

c) Grado 4.

d) Grado 2.

3. La base de un ortoedro es un cuadrado de lado x . Su altura es y . Expresa mediante un polinomio:

a) El área de la base.

b) El área de una cara lateral.

c) El perímetro de la base.

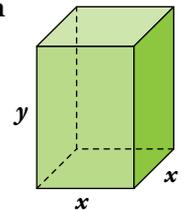
d) El volumen.

a) $A_{\text{BASE}} = x \cdot x = x^2$

b) $A_{\text{CARA LAT.}} = x \cdot y$

c) $P_{\text{BASE}} = x + x + x + x = 4x$

d) $V_{\text{ORT.}} = x \cdot x \cdot y = x^2y$



4. Expresa mediante un polinomio cada uno de estos enunciados:

a) La suma de un número más su cubo.

b) La suma de dos números naturales consecutivos.

c) El perímetro de un triángulo isósceles (llama x al lado desigual e y a los otros dos lados).

d) El área total de un cilindro de 4 m de altura en función del radio de la base, r .

e) El área total de un ortoedro cuya base es un cuadrado de lado l y cuya altura es 5 m.

a) $x + x^3$

b) $n + (n + 1) = 2n + 1$

c) $x + 2y$

d) $2\pi r \cdot 4 + 2\pi r^2 = \pi r(8 + 2r)$

e) $2l^2 + 4 \cdot 5l = 2l(l + 10)$

5. Calcula el valor numérico de la siguiente fracción para $x = 5$:

$$\frac{x}{x^2 + 2x}$$

$$\frac{5}{5^2 + 2 \cdot 5} = \frac{5}{25 + 10} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

2 Operaciones con monomios

Página 73

1. Efectúa las siguientes sumas de monomios. Cuando el resultado no pueda simplificarse, déjalo indicado:

a) $7x - 3x + 8x + 5x - 10x + 2x$

b) $8x^2 - 5x^2 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{7}{3}x^2$

c) $x + 7x - x^2 + 3x + 5x^2 - 2x^2$

d) $4xy^2 - 9xy^2 + xy^2 + 3xy^2$

e) $9x^5 + y^2 + 6y^2 - 13x^5 - 5 + y^3$

a) $7x - 3x + 8x + 5x - 10x + 2x = 9x$

b) $8x^2 - 5x^2 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{7}{3}x^2 = \frac{17}{3}x^2$

c) $x + 7x - x^2 + 3x + 5x^2 - 2x^2 = 11x + 2x^2$

d) $4xy^2 - 9xy^2 + xy^2 + 3xy^2 = -xy^2$

e) $9x^5 + y^2 + 6y^2 - 13x^5 - 5 + y^3 = -4x^5 + 7y^2 - 5 + y^3$

2. Opera.

a) $(3x^2) \cdot (5xy)$

b) $(\sqrt{3}x) \cdot (\sqrt{3}y)$

c) $(3xy)^2 : (2x^2)$

d) $(\sqrt{3}x)^2 \cdot (2x)$

a) $15x^3y$

b) $3xy$

c) $\frac{9}{2}y^2$

d) $6x^3$

3. Siendo $A = 5x^2$, $B = 4x$ y $C = -2x^2$, calcula:

a) $A + C$

b) $2A + 3C$

c) $A^2 - C$

d) $(A \cdot B) : C$

e) $(A : C) \cdot B$

f) $B^2 : C^2$

a) $5x^2 - 2x^2 = 3x^2$

b) $10x^2 - 6x^2 = 4x^2$

c) $25x^4 + 2x^2$

d) $(20x^3) : (-2x^2) = -10x$

e) $-\frac{5}{2} \cdot 4x = -10x$

f) $(16x^2) : (4x^4) = \frac{4}{x^2}$

4. Reduce a una sola fracción, como en el ejemplo:

$$\bullet \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x} = \frac{3}{3x^2} + \frac{x}{3x^2} = \frac{3+x}{3x^2}$$

$$\text{a) } \frac{3}{2x} - \frac{2}{3x}$$

$$\text{b) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{c) } \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x}$$

$$\text{d) } \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$$

$$\text{a) } \frac{3}{2x} - \frac{2}{3x} = \frac{9}{6x} - \frac{4}{6x} = \frac{5}{6x}$$

$$\text{b) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$$

$$\text{c) } \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2x} = \frac{4}{2x^2} + \frac{x}{2x^2} = \frac{4+x}{2x^2}$$

$$\text{d) } \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} = \frac{x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} + \frac{3}{x^3} = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3}$$

3 Operaciones con polinomios

Página 74

1. Quita paréntesis y reduce.

a) $(x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 3x) + (4x^3 - 9x^2 + 7x - 1)$

b) $(5x^4 - 5x^2 - 3x) - (x^3 + 3x^2 + 6x - 11)$

c) $(7x^2 - 9x + 1) - (x^3 - 5x^2 - 4) + (x^3 - 4x^2)$

a) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 3x + 4x^3 - 9x^2 + 7x - 1 = x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

b) $5x^4 - 5x^2 - 3x - x^3 - 3x^2 - 6x + 11 = 5x^4 - x^3 - 8x^2 - 9x + 11$

c) $7x^2 - 9x + 1 - x^3 + 5x^2 + 4 + x^3 - 4x^2 = 8x^2 - 9x + 5$

2. Efectúa.

a) $2 \cdot (3x^2 - 4x)$

b) $-5 \cdot (x^3 - 3x)$

c) $x \cdot (-2x + 3)$

d) $x^2 \cdot (x^2 - x + 1)$

a) $6x^2 - 8x$

b) $-5x^3 + 15x$

c) $-2x^2 + 3x$

d) $x^4 - x^3 + x^2$

3. Sean $P = x^5 - 3x^4 + 5x + 9$, $Q = 5x^2 + 3x - 11$.

Halla:

a) $P + Q$

b) $P - Q$

c) $2P - 3Q$

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad x^5 - 3x^4 \quad + 5x + 9 \\ \quad \quad \quad + \quad \quad \quad 5x^2 + 3x - 11 \\ \hline P + Q = x^5 - 3x^4 + 5x^2 + 8x - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b)} \quad x^5 - 3x^4 \quad + 5x + 9 \\ \quad \quad \quad - \quad \quad \quad 5x^2 + 3x - 11 \\ \hline P - Q = x^5 - 3x^4 - 5x^2 + 2x + 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c)} \quad 2P \rightarrow \quad 2x^5 - 6x^4 \quad \quad + 10x + 18 \\ \quad \quad \quad 3Q \rightarrow - \quad \quad \quad 15x^2 + 9x - 33 \\ \hline 2P - 3Q = 2x^5 - 6x^4 - 15x^2 + x + 51 \end{array}$$

4. Halla los productos siguientes:

a) $3x \cdot (2x + y + 1)$

b) $3a \cdot (a^2 + 2a^4)$

c) $ab^2 \cdot (a - b)$

d) $-5x^3 \cdot (3x^2 + 7x + 11)$

e) $x^2y \cdot (2x - y + 2)$

f) $7x^2y \cdot (3x + y)$

g) $5x^3y^3 \cdot (x^2 + x - 1)$

h) $3a^2b^3 \cdot (3a - b + 1)$

a) $6x^2 + 3xy + 3x$

b) $3a^3 + 6a^5$

c) $a^2b^2 - ab^3$

d) $-15x^5 - 35x^4 - 55x^3$

e) $2x^3y - x^2y^2 + 2x^2y$

f) $21x^3y + 7x^2y^2$

g) $5x^5y^3 + 5x^4y^3 - 5x^3y^3$

h) $9a^3b^3 - 3a^2b^4 + 3a^2b^3$

5. Calcula el polinomio P en cada caso.

a) $2 \cdot P = 6x^3 - 4x^2 - 8x + 2$

b) $x \cdot P = x^3 - 3x^2 - 5x$

c) $4x^2 \cdot P = -12x^5 + 4x^3 - 8x^2$

d) $2xy^2 \cdot P = 2x^2y^2 + 4xy^3 + 6x^2y^3$

a) $P = 3x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

b) $P = x^2 - 3x - 5$

c) $P = -3x^3 + x - 2$

d) $P = \frac{2x^2y^2}{2xy^2} + \frac{4xy^3}{2xy^2} + \frac{6x^2y^3}{2xy^2} = x + 2y + 3xy$

Página 75

6. Dados los polinomios $P = 5x^2 - 3$, $Q = x^2 - 4x + 1$, $R = -5x + 2$, calcula:

a) $P \cdot R$

b) $Q \cdot R$

c) $P \cdot Q$

a) $(5x^2 - 3) \cdot (-5x + 2) = -25x^3 + 10x^2 + 15x - 6$

$$\begin{array}{r} b) \quad x^2 - 4x + 1 \\ \quad \times \quad - 5x + 2 \\ \hline \quad 2x^2 - 8x + 2 \\ - 5x^3 + 20x^2 - 5x \\ \hline - 5x^3 + 22x^2 - 13x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} c) \quad x^2 - 4x + 1 \\ \quad \times \quad 5x^2 - 3 \\ \hline \quad - 3x^2 + 12x - 3 \\ 5x^4 - 20x^3 + 5x^2 \\ \hline 5x^4 - 20x^3 + 2x^2 + 12x - 3 \end{array}$$

7. Opera y simplifica:

a) $3x^2(2x^3 - 1) + 6(4x^2 - 3)$

b) $(x - 3)(x^2 + 1) - x^2(2x^3 + 5x^2)$

c) $(x - 3)(2x + 5) - 4(x^3 + 7x)$

a) $6x^5 - 3x^2 + 24x^2 - 18 = 6x^5 + 21x^2 - 18$

b) $x^3 + x - 3x^2 - 3 - 2x^5 - 5x^4 = -2x^5 - 5x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3$

c) $2x^2 + 5x - 6x - 15 - 4x^3 - 28x = -4x^3 + 2x^2 - 29x - 15$

8. Efectúa $P(x) : Q(x)$ en cada caso y expresa el resultado así:

$$P(x) = Q(x) \cdot \text{COCIENTE} + \text{RESTO}$$

a) $P(x) = 3x^2 - 11x + 5$

$Q(x) = x + 6$

b) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3$

$Q(x) = 3x + 1$

c) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3$

$Q(x) = x$

d) $P(x) = 5x^2 + 11x - 4$

$Q(x) = 5x - 2$

$$\begin{array}{r} a) \quad 3x^2 - 11x + 5 \quad | \quad x + 6 \\ - 3x^2 - 18x \\ \hline \quad - 29x + 5 \\ \quad + 29x + 174 \\ \hline \quad \quad 179 \end{array}$$

$$3x^2 - 11x + 5 = (x + 6)(3x - 29) + 179$$

$$\begin{array}{r} b) \quad 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3 \quad | \quad 3x + 1 \\ - 6x^3 - 2x^2 \\ \hline \quad \quad 0 + 18x + 3 \\ \quad \quad - 18x - 6 \\ \hline \quad \quad \quad - 3 \end{array}$$

$$6x^3 + 2x^2 + 18x + 3 = (3x + 1)(2x^2 + 6) - 3$$

$$\begin{array}{r}
 c) \quad 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3 \quad | \quad x \\
 \underline{- 6x^3} \\
 0 + 2x^2 \\
 \underline{- 2x^2} \\
 0 + 18x \\
 \underline{- 18x} \\
 0 + 3
 \end{array}$$

$$6x^3 + 2x^2 + 18x + 3 = x(6x^2 + 2x + 18) + 3$$

$$\begin{array}{r}
 d) \quad 5x^2 + 11x - 4 \quad | \quad 5x - 2 \\
 \underline{- 5x^2 + 2x} \\
 13x - 4 \\
 \underline{- 13x + \frac{26}{5}} \\
 \frac{6}{5}
 \end{array}$$

$$5x^2 + 11x - 4 = (5x - 2)\left(x + \frac{13}{5}\right) + \frac{6}{5}$$

4 División de un polinomio por $(x - a)$

Página 76

1. Calcula el cociente y el resto en cada caso:

a) $(x^3 - 7x^2 + 9x - 3) : (x - 5)$

b) $(2x^3 + 7x^2 + 2x + 4) : (x + 3)$

c) $(x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x - 6) : (x + 2)$

d) $(4x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 1) : (x - 1)$

e) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{a)} & 1 & -7 & 9 & -3 \\ 5 & & 5 & -10 & -5 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & -8 \end{array}$$

$$C(x) = x^2 - 2x - 1$$

$$R = -8$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{b)} & 2 & 7 & 2 & 4 \\ -3 & & -6 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 7 \end{array}$$

$$C(x) = 2x^2 + x - 1$$

$$R = 7$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{c)} & 1 & -2 & -5 & 3 & -6 \\ -2 & & -2 & 8 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & -3 & 0 \end{array}$$

$$C(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 3$$

$$R = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{d)} & 4 & -3 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & & 4 & 1 & 0 & 5 \\ \hline & 4 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{array}$$

$$C(x) = 4x^3 + x^2 + 5$$

$$R = 4$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} \text{e)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 0 \end{array}$$

$$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$$

$$R = 0$$

Página 77

2. Sea el polinomio $M(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 7x + 8$.

a) Calcula $M(4) = 4^4 - 8 \cdot 4^3 + 15 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 + 8$.

b) Divide, con la regla de Ruffini, $M(x) : (x - 4)$.

c) Comprueba que el resultado del apartado a) coincide con el resto de la división que has realizado en b).

a) $M(4) = 256 - 512 + 240 + 28 + 8 = 20$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -8 & 15 & 7 & 8 \\ 4 & & 4 & -16 & -4 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & 3 & 20 \end{array}$$

c) El resto de dividir por $(x - 4)$ coincide con el valor del polinomio en $x = 4$.

3. El valor de un polinomio, $A(x)$, para $x = 7$ es 54. ¿Qué puedes decir de la división $A(x) : (x - 7)$?

El resto de la división será 54.

4. Del polinomio $H(x)$ sabemos:

$$H(5) = 18 \quad H(-5) = 13$$

a) ¿Cuál es el resto de la división $H(x) : (x - 5)$?

b) ¿Y el de la división $H(x) : (x + 5)$?

a) Sabemos entonces que $R = 18$

b) $R = 13$

5. Considera los polinomios siguientes:

$$P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 9x + 3$$

$$Q(x) = x^4 - 12x^2 - 11x + 9$$

Calcula, utilizando la regla de Ruffini:

a) $P(3)$

b) $P(-1)$

c) $Q(3)$

d) $Q(-1)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -5 & -9 & 3 \\ 3 & & 9 & 12 & 9 \\ \hline & 3 & 4 & 3 & 12 \end{array}$$

$P(3) = 12$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -5 & -9 & 3 \\ -1 & & -3 & 8 & 1 \\ \hline & 3 & -8 & -1 & 4 \end{array}$$

$P(-1) = 4$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -12 & -11 & 9 \\ 3 & & 3 & 9 & -9 & -60 \\ \hline & 1 & 3 & -3 & -20 & -51 \end{array}$$

$Q(3) = -51$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -12 & -11 & 9 \\ -1 & & -1 & 1 & 11 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & -11 & 0 & 9 \end{array}$$

$Q(-1) = 9$

6. Calcula, con ayuda de la regla de Ruffini, el valor del polinomio $2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$ para:

a) $x = -2$

b) $x = -3$

c) $x = 5$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{a)} & 2 & -7 & -17 & 10 \\ -2 & & -4 & 22 & -10 \\ \hline & 2 & -11 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$$P(-2) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{b)} & 2 & -7 & -17 & 10 \\ -3 & & -6 & 39 & -66 \\ \hline & 2 & -13 & 22 & \boxed{-56} \end{array}$$

$$P(-3) = -56$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{c)} & 2 & -7 & -17 & 10 \\ 5 & & 10 & 15 & -10 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$P(5) = 0$$

7. De un polinomio $P(x)$, sabemos que se anula para el valor $x = 8$, es decir, $P(8) = 0$.
¿Qué puedes decir de la división $P(x) : (x - 8)$?

El resto de la división $P(x) : (x - 8)$ será 0 y, por tanto, la división es exacta.

5 Raíces de un polinomio

Página 79

1. Averigua si alguno de los valores 1, -3, 5, -7 es raíz del polinomio $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 4$.

• $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -4 & 2 & 5 & -4 \\ & & 1 & -3 & -1 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & 4 & 0 \end{array}$$

$x = 1$ sí es raíz del polinomio

• $x = 5$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 5 & 1 & -4 & 2 & 5 & -4 \\ & & 5 & 5 & 35 & 200 \\ \hline & 1 & 1 & 7 & 40 & 196 \end{array}$$

$x = 5$ no es raíz del polinomio

• $x = -3$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & -4 & 2 & 5 & -4 \\ & & -3 & 21 & -69 & 192 \\ \hline & 1 & -7 & 23 & -64 & 188 \end{array}$$

$x = -3$ no es raíz del polinomio

• $x = -7$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -7 & 1 & -4 & 2 & 5 & -4 \\ & & -7 & 77 & -553 & 3836 \\ \hline & 1 & -11 & 79 & -548 & 3832 \end{array}$$

$x = -7$ no es raíz del polinomio

2. ¿Cuáles son las raíces de $P(x) = (x - 2)(x + 5)(x - 6)$?

$x = 2$; $x = -5$ y $x = 6$

3. Escribe un polinomio de tercer grado cuyas raíces sean 2, -2 y 3.

$P(x) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$

4. Calcula mentalmente alguna raíz de cada uno de estos polinomios:

a) $x^2 - x$

b) $x^3 - 1$

c) $x^4 + x$

a) $x = 0$

b) $x = 1$

c) $x = 0$

$x = 1$

$x = -1$

5. Busca una raíz entera de cada uno de estos polinomios. Si no la hay, justifica por qué.

$A(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x + 7$

$B(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

$C(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 7x + 3$

$D(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Las raíces enteras deben ser un divisor del término independiente. En este caso los únicos divisores de 7 son ± 1 y ± 7 y vemos cuáles son raíz:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 4 & 2 & 5 & 7 \\ & & 4 & 6 & 11 \\ \hline & 4 & 6 & 11 & 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 4 & 2 & 5 & 7 \\ & & -4 & 2 & -7 \\ \hline & 4 & -2 & 7 & 0 \end{array}$$

$x = -1$ es raíz de $A(x)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 7 & 4 & 2 & 5 & 7 \\ & & 28 & 210 & 1505 \\ \hline & 4 & 30 & 215 & 1512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -7 & 4 & 2 & 5 & 7 \\ & & -28 & 182 & -1309 \\ \hline & 4 & -26 & 187 & -1302 \end{array}$$

En conclusión, solo tiene una raíz entera, $x = -1$.

$B(x)$ no tiene ninguna raíz entera por la comprobación anterior, ya que deberían ser divisores de 1, luego las únicas posibilidades son 1 y -1 , y vemos que ninguna es raíz.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ & & 1 & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & \boxed{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ & & -1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{-1} \end{array}$$

$x = 3$ es una raíz de $C(x)$ ya que:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 1 & -2 & -1 & -7 & 3 \\ & & 3 & 3 & 6 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Ya solo podría tener como raíz ± 1 , pero ninguno hace que el polinomio resultante valga 0. Solo tiene una raíz entera, $x = 3$.

$x = -1$ es una raíz de $D(x)$ ya que:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Viendo que $x = 1$ no es raíz, concluimos que solo tiene una solución entera, $x = -1$.

6. El polinomio $x^3 + 2x^2 - 8x$ tiene tres raíces enteras.

Calcúlalas por tanteo.

Las raíces de $x^3 + 2x^2 - 8x$ son $x = 0$, $x = 2$ y $x = -4$.

6 Factorización de polinomios

Página 81

1. Descompón en factores sacando factor común y utilizando los productos notables.

a) $x^3 + 6x^2 + 9x$

b) $2x^3 - 4x^2 + 2x$

c) $3x^4 - 12x^2$

d) $8x^5 - 24x^4 + 18x^3$

a) $x(x^2 + 6x + 9) = x \cdot (x + 3)^2$

b) $2x(x^2 - 2x + 1) = 2x(x - 1)^2$

c) $3x^2(x^2 - 4) = 3x^2(x + 2)(x - 2)$

d) $2x^3(4x^2 - 12x + 9) = 2x^3(2x - 3)^2$

2. Factoriza con ayuda de la regla de Ruffini.

a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

b) $2x^3 + 6x^2 - x - 30$

c) $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$

d) $3x^5 + x^2 - 24x + 36$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{a)} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & 1 & & & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 2)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

b) Después de probar con todos los divisores de 30, deducimos que este polinomio no tiene raíces enteras.

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{c)} & 1 & 7 & 14 & 8 \\ & -1 & & & \\ \hline & 1 & 6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = (x + 1) \cdot (x + 4) \cdot (x + 2)$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{matrix} -4 \\ -2 \end{matrix}$$

d) Después de probar con todos los divisores de 36, deducimos que este polinomio no tiene raíces enteras.

3. Descompón en el máximo número de factores que sea posible.

a) $2x^4 - 12x^3 + 10x^2$

b) $5x^3 + 10x^4 + 25x^2$

c) $x^3 - x^2 - x - 2$

d) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9$

e) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

f) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

a) $2x^2(x^2 - 6x + 5) = 2x^2(x - 5)(x - 1)$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}$$

b) $5x^2(x + 2x^2 + 5) \rightarrow$ No se puede seguir factorizando.

$$2x^2 + x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 40}}{4} \text{ No tiene solución.}$$

$$c) x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \text{ No tiene solución.}$$

$$d) x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 18x - 9 = (x - 1)^2 \cdot (x^2 - 9) = (x - 1)^2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -8 & 18 & -9 \\ 1 & & 1 & -1 & -9 & 9 \\ \hline & 1 & -1 & -9 & 9 & 0 \\ 1 & & 1 & 0 & -9 & \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 & \end{array}$$

$$e) x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) = (x + 1) \cdot (x + 1)^2 = (x + 1)^3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$f) x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 - 4x + 4) = (x - 2) \cdot (x - 2)^2 = (x - 2)^3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -8 \\ 2 & & 2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

4. Simplifica.

$$a) \frac{5x^3 + 20x^2}{3x^3 - 24x^2 + 48x}$$

$$b) \frac{x^2 + 7}{x^3 - 3x^2 + 7x - 21}$$

$$a) \frac{5x^3 + 20x^2}{3x^3 - 24x^2 + 48x} = \frac{5x^2(x + 4)}{3x(x^2 - 8x + 16)} = \frac{5x^2(x + 4)}{3x(x - 4)^2} = \frac{5x(x + 4)}{3(x - 4)^2}$$

$$b) \frac{x^2 + 7}{x^3 - 3x^2 + 7x - 21} = \frac{x^2 + 7}{(x - 3)(x^2 + 7)} = \frac{1}{x - 3}$$

El polinomio de arriba no se puede factorizar. El polinomio del denominador quedará:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 7 & -21 \\ 3 & & 3 & 0 & 21 \\ \hline & 1 & 0 & 7 & 0 \end{array}$$

7 Preparación para ecuaciones

Página 82

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $3(x - 1) + 5(x - 2) - 7x$

b) $2(2x - 3) + 1 - (x - 5)$

c) $5x + 3(1 - x) - 12 - 2(x - 5)$

d) $10(x - 1) + 2(x + 9) - 4(2 + 3x)$

e) $3x - 1 - (2x + 1) - 1 + (x + 2) + 3$

a) $3x - 3 + 5x - 10 - 7x = x - 13$

b) $4x - 6 + 1 - x + 5 = 3x$

c) $5x + 3 - 3x - 12 - 2x + 10 = 1$

d) $10x - 10 + 2x + 18 - 8 - 12x = 0$

e) $3x - 1 - 2x - 1 - 1 + x + 2 + 3 = 2x + 2$

2. Multiplica por el número indicado y simplifica.

a) $\frac{3(x+2)}{2} + \frac{x-1}{5} - \frac{2(x+1)}{5} - \frac{37}{10}$ por 10

b) $\frac{2x-3}{2} - \frac{x+3}{4} + 4 + \frac{x-1}{2}$ por 4

c) $x + \frac{2x-3}{9} + \frac{x-1}{3} - \frac{12x+4}{9}$ por 9

d) $\frac{2x}{3} - \frac{3y}{2} - 2(x+y) + 3$ por 6

e) $\frac{2(x+1)}{3} - \frac{y}{2} - 1$ por 6

a) $10 \cdot \frac{3(x+2)}{2} + 10 \cdot \frac{x-1}{5} - 10 \cdot \frac{2(x+1)}{5} - 10 \cdot \frac{37}{10} =$

$= 15(x+2) + 2(x-1) - 4(x+1) - 37 = 15x + 30 + 2x - 2 - 4x - 4 - 37 = 13x - 13$

b) $4 \cdot \frac{2x-3}{2} - 4 \cdot \frac{x+3}{4} + 4 \cdot 4 + 4 \cdot \frac{x-1}{2} = 2(2x-3) - (x+3) + 16 + 2(x-1) =$

$= 4x - 6 - x - 3 + 16 + 2x - 2 = 5x + 5$

c) $9 \cdot x + 9 \cdot \frac{2x-3}{9} + 9 \cdot \frac{x-1}{3} - 9 \cdot \frac{12x+4}{9} = 9x + 2x - 3 + 3(x-1) - (12x+4) =$

$= 9x + 2x - 3 + 3x - 3 - 12x - 4 = 2x - 10$

d) $6 \cdot \frac{2x}{3} - 6 \cdot \frac{3y}{2} - 6 \cdot 2(x+y) + 6 \cdot 3 = 2 \cdot 2x - 3 \cdot 3y - 12(x+y) + 18 =$

$= 4x - 9y - 12x - 12y + 18 = -8x - 21y + 18$

e) $6 \cdot \frac{2(x+1)}{3} - 6 \cdot \frac{y}{2} - 6 \cdot 1 = 2 \cdot 2(x+1) - 3y - 6 = 4x + 4 - 3y - 6 = 4x - 3y - 2$

3. Expresa algebraicamente y simplifica.

- a) La suma de un número más su tercera parte.
- b) La suma de las edades de Ana y Raquel, sabiendo que Ana tiene 8 años más que Raquel.
- c) Invertí una cantidad, x , y ha aumentado un 12%. ¿Qué cantidad tengo ahora?
- d) Invertí una cantidad, x , y he perdido el 5%. ¿Qué cantidad tengo ahora?
- e) La suma de tres números consecutivos.
- f) El triple de un número menos su cuarta parte.
- g) La suma de las edades de Alberto y su padre, sabiendo que este tiene 28 años más que aquel.
- h) Un ciclista va a una velocidad v . Otro ciclista viene 10 km/h más rápido. ¿A qué velocidad se acerca el uno al otro?

a) $x + \frac{x}{3} = \frac{4}{3}x$

b) $x + (x + 8) = 2x + 8$

c) $1,12x$

d) $0,95x$

e) $x + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3$

f) $3x - \frac{x}{4} = \frac{11}{4}x$

g) $x + (x + 28) = 2x + 28$

h) $v + (v + 10) = 2v + 10$

Página 83

4. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(x - 1)(x + 1) + (x - 2)^2 - 3$

b) $(x + 2)(x - 3) + x - 3$

c) $(x + 1)^2 - 2x(x + 2) + 14$

d) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 + 2 - x^2 - 6$

a) $x^2 - 1 + x^2 + 4 - 4x - 3 = 2x^2 - 4x$

b) $x^2 + 2x - 3x - 6 + x - 3 = x^2 - 9$

c) $x^2 + 1 + 2x - 2x^2 - 4x + 14 = -x^2 - 2x + 15$

d) $x^2 + 1 + 2x - x^2 - 1 + 2x + 2 - x^2 - 6 = -x^2 + 4x - 4$

5. Multiplica por el número indicado y simplifica:

a) $x(2x + 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} - 3$ por 2

b) $\frac{x(x + 3)}{2} - \frac{(x + 1)^2}{3} + \frac{1}{3}$ por 6

a) $2 \cdot x(2x + 1) - 2 \cdot \frac{(x - 1)^2}{2} - 2 \cdot 3 = 4x^2 + 2x - x^2 - 1 + 2x - 6 = 3x^2 + 4x - 7$

b) $6 \cdot \frac{x(x + 3)}{2} - 6 \cdot \frac{(x + 1)^2}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = 3x^2 + 9x - 2(x^2 + 1 + 2x) + 2 = x^2 + 5x$

6. Expresa algebraicamente y simplifica.

a) El producto de dos números naturales consecutivos.

b) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden x y $x + 5$.

c) El área de un rectángulo cuyas dimensiones (largo y ancho) suman 11 dm.

d) El área de un rectángulo de 200 m de perímetro.

a) $n(n + 1) = n^2 + n$

b) $x^2 + (x + 5)^2 = 2x^2 + 10x + 25$

c) $x(11 - x) = 11x - x^2$

d) $x(100 - x) = 100x - x^2$

7. La diferencia de dos números es 20. Si al menor lo llamamos x :

a) ¿Cómo se designa al mayor?

b) ¿Cómo se designa su producto?

c) ¿Cómo se designa la suma de sus cuadrados?

a) $20 + x$

b) $x(20 + x) = 20x + x^2$

c) $x^2 + (20 + x)^2 = x^2 + 20^2 + x^2 + 40x = 2x^2 + 40x + 400$

Ejercicios y problemas

Página 84

Practica

Monomios

1.  Considera los siguientes monomios:

a) $2x^2$

b) $-3x^3$

c) $\frac{1}{2}x^2$

d) $\frac{3}{4}x$

e) $-\frac{1}{3}x$

f) x^3

- Indica el grado y el coeficiente en cada caso.
- Calcula el valor numérico de cada uno para $x = -1$ y para $x = 1/2$.

a) $2x^2$

Grado = 2; coeficiente = 2

$x = -1 \rightarrow 2 \cdot (-1)^2 = 2 \cdot 1 = 2$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

b) $-3x^3$

Grado = 3; coeficiente = -3

$x = -1 \rightarrow -3 \cdot (-1)^3 = -3 \cdot (-1) = 3$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -3 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$

c) $\frac{1}{2}x^2$

Grado = 2; coeficiente = $\frac{1}{2}$

$x = -1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

d) $\frac{3}{4}x$

Grado = 1; coeficiente = $\frac{3}{4}$

$x = -1 \rightarrow \frac{3}{4} \cdot (-1) = -\frac{3}{4}$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

e) $-\frac{1}{3}x$

Grado = 1; coeficiente = $-\frac{1}{3}$

$x = -1 \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot (-1) = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

f) x^3

Grado = 3; coeficiente = 1

$x = -1 \rightarrow (-1)^3 = -1$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

2.  Opera y simplifica todo lo posible.

a) $-2x^3 + x^3 - 3x^3$

b) $-3x^2 - \frac{2}{5}x^2 + 5x^2$

c) $\frac{1}{2}xy - \frac{3}{4}xy + xy$

d) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x^2 + x^2$

e) $2x \cdot (-3x^2) \cdot (-x)$

f) $\frac{3}{4}x^3 \cdot (-2x^2) \cdot 2x$

g) $-\frac{15x^6}{3x^2} \cdot x$

h) $-\frac{7x^3}{2x^2} \cdot x$

a) $-2x^3 + x^3 - 3x^3 = (-2 + 1 - 3)x^3 = -4x^3$

b) $-3x^2 - \frac{2}{5}x^2 + 5x^2 = \frac{-15}{5}x^2 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{25}{5}x^2 = \frac{8}{5}x^2$

c) $\frac{1}{2}xy - \frac{3}{4}xy + xy = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + 1\right)xy = \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right)xy = \frac{3}{4}xy$

d) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x^2 + x^2 = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10} + 1\right)x^2 = \left(\frac{4}{10} - \frac{1}{10} + \frac{10}{10}\right)x^2 = \frac{13}{10}x^2$

e) $6x^4$

f) $\frac{3}{4} \cdot (-4)x^6 = -3x^6$

g) $-5x^5$

h) $-\frac{7}{2}x^2$

3.  Expresa mediante un monomio estos enunciados:

a) La mitad de un número más su tercera parte.

b) El área de un círculo de radio r .

c) El producto de un número por el triple de otro.

d) El volumen de un ortoedro de dimensiones x , $2x$ y 5 cm.

e) El volumen de una pirámide de altura h cuya base es un cuadrado de lado l .

a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = \frac{5}{6}x$

b) πr^2

c) $x \cdot 3y = 3xy$

d) $x \cdot 2x \cdot 5 = 10x^2$

e) $\frac{l^2h}{3}$

Polinomios

4.  Reduce e indica el grado de cada polinomio:

a) $2x^4 - 3x^2 + 4x$

b) $x^2 - 3x^3 + 2x$

c) $3x^3 - 2x^2 - 3x^3$

d) $2x + 3$

a) Grado 4

b) Grado 3

c) $-2x^2 \rightarrow$ Grado 2

d) Grado 1

5.  Dados los polinomios $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x - 1$ y $Q(x) = 6x^3 + 2x^2 - 7$, calcula $P + Q$ y $P - Q$.

$$P + Q = (2x^4 - 5x^3 + 3x - 1) + (6x^3 + 2x^2 - 7) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x - 8$$

$$P - Q = (2x^4 - 5x^3 + 3x - 1) - (6x^3 + 2x^2 - 7) = 2x^4 - 5x^3 + 3x - 1 - 6x^3 - 2x^2 + 7 = \\ = 2x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 3x + 6$$

6.  Efectúa.

a) $3x(2x^2 - 5x + 1)$

b) $7x^3(2x^3 + 3x^2 - 2)$

c) $-5x(x^4 - 3x^2 + 5x)$

d) $-x^2(x^3 + 4x^2 - 6x + 3)$

a) $3x(2x^2 - 5x + 1) = 6x^3 - 15x^2 + 3x$

b) $7x^3(2x^3 + 3x^2 - 2) = 14x^6 + 21x^5 - 14x^3$

c) $-5x(x^4 - 3x^2 + 5x) = -5x^5 + 15x^3 - 25x^2$

d) $-x^2(x^3 + 4x^2 - 6x + 3) = -x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 3x^2$

7.  Opera y simplifica.

a) $(5x - 2)(3 - 2x)$

b) $x(x - 3)(2x - 1)$

c) $(x^2 - 5x)(x^3 + 2x)$

d) $(3x^3 + 1)(2x^2 - 3x + 5)$

a) $(5x - 2)(3 - 2x) = 15x - 10x^2 - 6 + 4x = -10x^2 + 19x - 6$

b) $x(x - 3)(2x - 1) = (x^2 - 3x)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x = 2x^3 - 7x^2 + 3x$

c) $(x^2 - 5x)(x^3 + 2x) = x^5 + 2x^3 - 5x^4 - 10x^2 = x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 10x^2$

d) $(3x^3 + 1)(2x^2 - 3x + 5) = 6x^5 - 9x^4 + 15x^3 + 2x^2 - 3x + 5$

8.  Calcula el cociente y el resto en estas divisiones:

a) $(3x^2 - 7x + 5) : (3x + 1)$

b) $(4x^3 - x) : (2x + 3)$

c) $(5x^3 - 3x^2 + 8x) : (5x + 2)$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 7x + 5 \quad | \quad 3x + 1 \\ -3x^2 - x \\ \hline -8x + 5 \quad x - \frac{8}{3} \\ 8x + \frac{8}{3} \\ \hline \frac{23}{3} \end{array}$$

Cociente = $x - \frac{8}{3}$

Resto = $\frac{23}{3}$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - x \quad | \quad 2x + 3 \\ -4x^3 - 6x^2 \\ \hline -6x^2 - x \\ 6x^2 + 9x \\ \hline 8x \\ -8x - 12 \\ \hline -12 \end{array}$$

Cociente = $2x^2 - 3x + 4$

Resto = -12

$$\begin{array}{r}
 \text{c) } 5x^3 - 3x^2 + 8x \quad \left| \begin{array}{l} 5x + 2 \\ \hline x^2 - x + 2 \end{array} \right. \\
 \underline{-5x^3 - 2x^2} \\
 -5x^2 + 8x \\
 \underline{5x^2 + 2x} \\
 10x \\
 \underline{-10x - 4} \\
 -4
 \end{array}$$

Cociente = $x^2 - x + 2$
Resto = -4

9. ▢ Las siguientes divisiones son exactas. Efectúalas y expresa el dividendo como producto de dos factores:

a) $(x^5 + 2x^4 + x + 2) : (x + 2)$

b) $(3x^3 + 7x^2 + 7x + 4) : (3x + 4)$

c) $(x^3 - x^2 + 9x - 9) : (x - 1)$

d) $(2x^3 - 3x^2 + 10x - 15) : (2x - 3)$

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } x^5 + 2x^4 + x + 2 \quad \left| \begin{array}{l} x + 2 \\ \hline x^4 + 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^5 - 2x^4} \\
 x + 2 \\
 \underline{-x - 2} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b) } 3x^3 + 7x^2 + 7x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} 3x + 4 \\ \hline x^2 + x + 1 \end{array} \right. \\
 \underline{-3x^3 - 4x^2} \\
 3x^2 + 7x \\
 \underline{-3x^2 - 4x} \\
 3x + 4 \\
 \underline{-3x - 4} \\
 0
 \end{array}$$

$x^5 + 2x^4 + x + 2 = (x + 2)(x^4 + 1)$

$3x^3 + 7x^2 + 7x + 4 = (3x + 4)(x^2 + x + 1)$

$$\begin{array}{r}
 \text{c) } x^3 - x^2 + 9x - 9 \quad \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ \hline x^2 + 9 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 9x - 9 \\
 \underline{-9x + 9} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{d) } 2x^3 - 3x^2 + 10x - 15 \quad \left| \begin{array}{l} 2x - 3 \\ \hline x^2 + 5 \end{array} \right. \\
 \underline{-2x^3 + 3x^2} \\
 10x - 15 \\
 \underline{-10x + 15} \\
 0
 \end{array}$$

$x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9)$

$2x^3 - 3x^2 + 10x - 15 = (2x - 3)(x^2 + 5)$

10. ▢ Expresa mediante un polinomio cada uno de estos enunciados:

a) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos.

b) El área total de un ortoedro de dimensiones x , $2x$ y 5 cm.

c) La cantidad de leche envasada en “ x ” botellas de $1,5$ l y en “ y ” botellas de 1 l.

d) El área de un triángulo rectángulo en el que un cateto mide 3 cm más que el otro.

a) $x^2 + (x + 1)^2 = x^2 + x^2 + 1 + 2x = 2x^2 + 2x + 1$

b) $2 \cdot x \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 5 + 2 \cdot 2x \cdot 5 = 4x^2 + 30x$

c) $1,5x + y$

d) $\frac{x(x + 3)}{2} = \frac{x^2 + 3x}{2}$

Factor común e identidades notables

11.  Sacar factor común en cada polinomio:

a) $9x^2 + 6x - 3$

b) $2x^3 - 6x^2 + 4x$

c) $10x^3 - 5x^2$

d) $x^4 - x^3 + x^2 - x$

e) $410x^5 - 620x^3 + 130x$

f) $72x^4 - 64x^3$

g) $5x - 100x^3$

h) $30x^6 - 75x^4 - 45x^2$

a) $9x^2 + 6x - 3 = 3(3x^2 + 2x - 1)$

b) $2x^3 - 6x^2 + 4x = 2x(x^2 - 3x + 2)$

c) $10x^3 - 5x^2 = 5x^2(2x - 1)$

d) $x^4 - x^3 + x^2 - x = x(x^3 - x^2 + x - 1)$

e) $410x^5 - 620x^3 + 130x = 10x(41x^4 - 62x^2 + 13)$

f) $72x^4 - 64x^3 = 8x^3(9x - 8)$

g) $5x - 100x^3 = 5x(1 - 20x^2)$

h) $30x^6 - 75x^4 - 45x^2 = 15x^2(2x^4 - 5x^2 - 3)$

12.  Completar estas expresiones en tu cuaderno:

a) $(x - 3)^2 = x^2 - \square x + 9$

b) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + \square x + 1$

c) $(x + \square)^2 = x^2 + \square x + 16$

d) $(3x - \square)^2 = \square x^2 - \square x + 4$

a) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

b) $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

c) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

d) $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

13.  Expresar los polinomios siguientes como cuadrado de un binomio (hazlo en tu cuaderno):

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + \square)^2$

b) $49 + 14x + x^2 = (\square + \square)^2$

c) $4x^2 - 20x + 25 = (\square - 5)^2$

d) $1 + 4x + 4x^2 = (\square + \square)^2$

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

b) $49 + 14x + x^2 = (7 + x)^2$

c) $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$

d) $1 + 4x + 4x^2 = (1 + 2x)^2$

Página 85

14. Expresa en cada caso como producto de dos binomios (hazlo en tu cuaderno):

a) $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$

b) $x^2 - 1$

c) $9 - x^2$

d) $4x^2 - 1$

e) $25 - 9x^2$

a) $(x + 4)(x - 4)$

b) $(x + 1)(x - 1)$

c) $(3 + x)(3 - x)$

d) $(2x - 1)(1 + 2x)$

e) $(5 + 3x)(5 - 3x)$

Expresiones de primer grado

15. Opera y simplifica.

a) $6(x + 3) - 2(x - 5)$

b) $3(2x + 1) + 7(x - 3) - 4x$

c) $5(3 - 2x) - (x + 7) - 8$

d) $4(1 - x) + 6x - 10 - 3(x - 5)$

e) $2x - 3 + 3(x - 1) - 2(3 - x) + 5$

f) $2(x + 3) - (x + 1) - 1 + 3(5x - 4)$

a) $6x + 18 - 2x + 10 = 4x + 28$

b) $6x + 3 + 7x - 21 - 4x = 9x - 18$

c) $15 - 10x - x - 7 - 8 = -11x$

d) $4 - 4x + 6x - 10 - 3x + 15 = -x + 9$

e) $2x - 3 + 3x - 3 - 6 + 2x + 5 = 7x - 7$

f) $2x + 6 - x - 1 - 1 + 15x - 12 = 16x - 8$

16. Multiplica por el número indicado en cada caso y simplifica:

a) $\frac{1-2x}{9} - 1 + \frac{x+4}{6}$ por 18

b) $\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} - \frac{x+1}{4}$ por 40

c) $\frac{x-3}{2} - \frac{5x+1}{3} - \frac{1-9x}{6}$ por 6

a) $18\left(\frac{1-2x}{9} - 1 + \frac{x+4}{6}\right) = 2(1-2x) - 18 + 3(x+4) = 2 - 4x - 18 + 3x + 12 = -x - 4$

b) $40\left(\frac{3x+2}{5} - \frac{4x-1}{10} + \frac{5x-2}{8} - \frac{x+1}{4}\right) = 8(3x+2) - 4(4x-1) + 5(5x-2) - 10(x+1) =$
 $= 24x + 16 - 16x + 4 + 25x - 10 - 10x - 10 = 23x$

c) $6\left(\frac{x-3}{2} - \frac{5x+1}{3} - \frac{1-9x}{6}\right) = 3(x-3) - 2(5x+1) - (1-9x) =$
 $= 3x - 9 - 10x - 2 - 1 + 9x = 2x - 12$

17.  Multiplica en cada caso por el mínimo común múltiplo de los denominadores y simplifica la expresión resultante:

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-3}{5} - 2x + 6 - \frac{x-8}{5}$

b) $\frac{1+12x}{4} - \frac{x-4}{12} - \frac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

c) $\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{2(x-3)}{4}$

a) $10\left(\frac{x+1}{2} + \frac{x-3}{5} - 2x + 6 - \frac{x-8}{5}\right) = 5(x+1) + 2(x-3) - 20x + 60 - 2(x-8) =$
 $= 5x + 5 + 2x - 6 - 20x + 60 - 2x + 16 = -15x + 75$

b) $\frac{6(1+12x)}{24} - \frac{2(x-4)}{24} - \frac{3[3(x+1)-(1-x)]}{24} =$
 $= \frac{6+72x}{24} - \frac{2x-8}{24} - \frac{9x+9-3+3x}{24} = \frac{6+72x-2x+8-9x-9+3-3x}{24} =$
 $= \frac{8+58x}{24} = \frac{4+29x}{12}$

c) $60\left(\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{2(x-3)}{4}\right) = 10(3x-2) - 6(4x+1) + 4 \cdot 2 + 15 \cdot 2(x-3) =$
 $= 30x - 20 - 24x - 6 + 8 + 30x - 90 = 36x - 108$

Expresiones de segundo grado

18.  Opera y simplifica.

a) $(x-3)(x+3) + (x-4)(x+4) - 25$

b) $(x+1)(x-3) + (x-2)(x-3) - (x^2 - 3x - 1)$

c) $2x(x+3) - 2(3x+5) + x$

d) $(x+1)^2 - 3x - 3$

e) $(2x+1)^2 - 1 - (x-1)(x+1)$

f) $x(x-3) + (x+4)(x-4) - (2-3x)$

a) $x^2 - 9 + x^2 - 16 - 25 = 2x^2 - 50$

b) $x^2 - 3x + x - 3 + x^2 - 3x - 2x + 6 - x^2 + 3x + 1 = x^2 - 4x + 4$

c) $2x^2 + 6x - 6x - 10 + x = 2x^2 + x - 10$

d) $x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 = x^2 - x - 2$

e) $4x^2 + 4x + 1 - 1 - (x^2 - 1) = 4x^2 + 4x - x^2 + 1 = 3x^2 + 4x + 1$

f) $x^2 - 3x + x^2 - 16 - 2 + 3x = 2x^2 - 18$

19.  Multiplica por el número indicado y simplifica.

a) $(3x + 1)(3x - 1) + \frac{(x - 2)^2}{2} - 1 + 2x$ por 2

b) $\frac{x^2 + 2}{3} - \frac{x^2 + 1}{4} - \frac{x + 15}{12}$ por 12

c) $\frac{(2x - 1)(2x + 1)}{3} - \frac{3x - 2}{6} - \frac{x^2}{3}$ por 6

a) $2 \left((3x + 1)(3x - 1) + \frac{(x - 2)^2}{2} - 1 + 2x \right) = 2(3x + 1)(3x - 1) + (x - 2)^2 - 2 + 4x =$
 $= 2(9x^2 - 1) + x^2 - 4x + 4 - 2 + 4x = 18x^2 - 2 + x^2 + 2 = 19x^2$

b) $12 \left(\frac{x^2 + 2}{3} - \frac{x^2 + 1}{4} - \frac{x + 5}{12} \right) = 4(x^2 + 2) - 3(x^2 + 1) - (x + 5) =$
 $= 4x^2 + 8 - 3x^2 - 3 - x - 5 = x^2 - x$

c) $6 \left(\frac{(2x - 1)(2x + 1)}{3} - \frac{3x - 2}{6} - \frac{x^2}{3} \right) = 2(2x - 1)(2x + 1) - (3x - 2) - 2x^2 =$
 $= 2(4x^2 - 1) - 3x + 2 - 2x^2 = 8x^2 - 2 - 3x + 2 - 2x^2 = 6x^2 - 3x$

20.  Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

a) $\frac{(x + 1)(x - 3)}{2} + x - \frac{x}{4}$

b) $x + \frac{3x + 1}{2} - \frac{x - 2}{3} - x^2 + 2$

c) $\frac{x(x - 1)}{3} - \frac{x(x + 1)}{4} - \frac{3x + 4}{12}$

a) $4 \left(\frac{(x + 1)(x - 3)}{2} + x - \frac{x}{4} \right) = 2(x + 1)(x - 3) + 4x - x = (2x + 2)(x - 3) + 3x =$
 $= 2x^2 - 6x + 2x - 6 + 3x = 2x^2 - x - 6$

b) $6 \left(x + \frac{3x + 1}{2} - \frac{x - 2}{3} - x^2 + 2 \right) = 6x + 3(3x + 1) - 2(x - 2) - 6x^2 + 12 =$
 $= 6x + 9x + 3 - 2x + 4 - 6x^2 + 12 = -6x^2 + 13x + 19$

c) $12 \left(\frac{x(x - 1)}{3} - \frac{x(x + 1)}{4} + \frac{3x + 4}{12} \right) = 4x(x - 1) - 3x(x + 1) + 3x + 4 =$
 $= 4x^2 - 4x - 3x^2 - 3x + 3x + 4 = x^2 - 4x + 4$

Regla de Ruffini

21.  Divide aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^2 - 5x + 1) : (x - 2)$

c) $(2x^3 - 15x - 7) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 1 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & -5 \end{array}$$

$$C(x) = x - 3$$

$$R = -5$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -15 & -7 \\ 3 & & 6 & 18 & 9 \\ \hline & 2 & 6 & 3 & 2 \end{array}$$

$$C(x) = 2x^2 + 6x + 3$$

$$R = 2$$

b) $(x^3 - 3x^2 + 5x + 2) : (x + 1)$

d) $(3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 1) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 5 & 2 \\ -1 & & -1 & 4 & -9 \\ \hline & 1 & -4 & 9 & -7 \end{array}$$

$$C(x) = x^2 - 4x + 9$$

$$R = -7$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 5 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & & -6 & 2 & 0 & -2 \\ \hline & 3 & -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}$$

$$C(x) = 3x^3 - x^2 + 1$$

$$R = -3$$

22.  Calcula el cociente y el resto de estas divisiones:

a) $(5x^2 + 13x + 4) : (x + 3)$

c) $(3x^3 - 2x^2 + 8x - 6) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 5 & 13 & 4 \\ -3 & & -15 & 6 \\ \hline & 5 & -2 & 10 \end{array}$$

$$C(x) = 5x - 2$$

$$R = 10$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -2 & 8 & -6 \\ -1 & & -3 & 5 & -13 \\ \hline & 3 & -5 & 13 & -19 \end{array}$$

$$C(x) = 3x^2 - 5x + 13$$

$$R = -19$$

b) $(x^3 - x^2 - 15x - 11) : (x - 5)$

d) $(x^4 - 2x^3 - 16x^2 - 7x) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -15 & -11 \\ 5 & & 5 & 20 & 25 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 14 \end{array}$$

$$C(x) = x^2 + 4x + 15$$

$$R = 14$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -16 & -7 & 0 \\ 2 & & 2 & 0 & -32 & -78 \\ \hline & 1 & 0 & -16 & -39 & -78 \end{array}$$

$$C(x) = x^3 - 16x - 39$$

$$R = -78$$

23.  Calcula el valor numérico de cada polinomio para el valor de la incógnita que se indica:

a) $5x^2 - 4x + 4$ para $x = -1$

c) $3x^3 - 4x^2 - 16x + 15$ para $x = -2$

$$\begin{array}{r|rrr} & 5 & -4 & 4 \\ -1 & & -5 & 9 \\ \hline & 5 & -9 & 13 \end{array}$$

Valor numérico = 13

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & -16 & 15 \\ -2 & & -6 & 20 & -8 \\ \hline & 3 & -10 & 4 & 7 \end{array}$$

Valor numérico = 7

b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 9$ para $x = 2$

d) $x^4 - x^3 - 17x^2 - 11x$ para $x = 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -3 & 9 \\ 2 & & 2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}$$

Valor numérico = 7

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -17 & -11 & 0 \\ 4 & & 4 & 12 & -20 & -124 \\ \hline & 1 & 3 & -5 & -31 & -124 \end{array}$$

Valor numérico = -124

24.  Busca el valor que debe tomar en cada polinomio el término independiente, m , para que la división sea exacta:

a) $(6x^2 - 5x + m) : (x - 2)$

c) $(x^3 - 9x^2 - 10x + m) : (x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 6 & -5 & m \\ 2 & & 12 & 14 \\ \hline & 6 & 7 & m + 14 \end{array}$$

$$m + 14 = 0 \rightarrow m = -14$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & -10 & m \\ 1 & & 1 & -8 & -18 \\ \hline & 1 & -8 & -18 & m - 18 \end{array}$$

$$m - 18 = 0 \rightarrow m = 18$$

b) $(2x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 9x - m) : (x + 1)$

d) $(2x^4 - 9x^3 - 18x + m) : (x - 5)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -2 & -5 & 9 & -m \\ -1 & & -2 & 4 & 1 & -10 \\ \hline & 2 & -4 & -1 & 10 & -m - 10 \end{array}$$

$$-m - 10 = 0 \rightarrow m = -10$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -9 & 0 & -18 & m \\ 5 & & 10 & 5 & 25 & 35 \\ \hline & 2 & 1 & 5 & 7 & m + 35 \end{array}$$

$$m + 35 = 0 \rightarrow m = -35$$

Página 86

25.  Observa y contesta.

	1	-3	-13	15
1		1	-2	-15
	1	-2	-15	0
-3		-3	15	
	1	-5	0	

a) ¿Cuáles con las raíces del polinomio $P(x)$?

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

b) Factoriza $P(x)$.

a) $x = 1$ $x = -3$ $x = 5$

b) $P(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 5)$

Aplica lo aprendido

26.  Sacar factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$

b) $x^3 - x$

c) $4x^4 - 81x^2$

d) $x^3 + 2x^2 + x$

e) $3x^3 - 27x$

f) $3x^2 + 30x + 75$

a) $x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$

b) $x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

c) $x^2(4x^2 - 81) = x^2(2x + 9)(2x - 9)$

d) $x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

e) $3x(x^2 - 9) = 3x(x + 3)(x - 3)$

f) $3(x^2 + 10x + 25) = 3(x + 5)^2$

27.  Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^4 - 8x^3 + 16x^2$

b) $x^3 - 4x$

c) $9x^3 + 6x^2 + x$

d) $4x^2 - 25$

a) $x^2(x^2 - 8x + 16) = x^2(x - 4)^2$

b) $x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$

c) $x(9x^2 + 6x + 1) = x(3x + 1)$

d) $(2x + 5)(2x - 5)$

28.  Encuentra las raíces de estos polinomios y factorízalos:

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $x^3 - 19x^2 + 34x$

c) $x^3 - x^2 - 5x - 3$

d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

a)

	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

$$b) x^2 - 19x + 34 = 0 \rightarrow x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 136}}{2} = \frac{19 \pm 15}{2} = \begin{cases} 17 \\ 2 \end{cases}$$

$$x^3 - 19x^2 + 34x = x(x - 17)(x - 2)$$

$$c) \begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x - 3)(x + 1) = (x + 1)^2(x - 3)$$

$$d) \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & -9 & -18 \\ -2 & & -2 & 0 & 18 \\ \hline 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x + 2)(x^2 - 9) = (x + 2)(x + 3)(x - 3)$$

29. Simplifica.

a) $\frac{x^2 + 2x}{3x^3 + 6x^2}$

b) $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$

c) $\frac{20x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9}$

d) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12}$

a) $\frac{x^2 + 2x}{3x^3 + 6x^2} = \frac{x(x + 2)}{3x^2(x + 2)} = \frac{1}{3x}$

b) $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25} = \frac{(x + 5)(x - 5)}{(x - 5)^2} = \frac{x + 5}{x - 5}$

c) $20x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 240}}{40} = \frac{2 \pm \sqrt{244}}{40} \rightarrow$ No da raíces enteras.

$$\frac{20x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9} = \frac{20x^2 - 2x - 3}{(x - 3)^2}$$

d) $x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

Luego $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$

$x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = (x - 1)(x + 3)(x + 4)$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 6 & 5 & -12 \\ 1 & & 1 & 7 & 12 \\ \hline 1 & 7 & 12 & 0 \end{array} \quad x^2 + 7x + 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} -3 \\ -4 \end{cases}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x + 3)(x + 4)} = \frac{1}{x + 4}$$

30. En cada caso, desarrolla $A + B$ y simplifica:

a) $A = 4(x - 3) + y$ $B = 3(x + 3) - y - 18$

b) $A = \frac{x+4}{5} - y + 1$ $B = \frac{x-6}{5} + y + 1$

c) $A = -2\left(\frac{x+1}{3} + y - 1\right)$ $B = \frac{x-3}{4} + 2y - 1$

d) $A = 6(x + 2) - 2(y + 7)$ $B = x + 2(y + 1)$

a) $A + B = 4(x - 3) + y + 3(x + 3) - y - 18 = 4x - 12 + y + 3x + 9 - y - 18 = 7x - 21$

b) $A + B = \frac{x+4}{5} - y + 1 + \frac{x-6}{5} + y + 1 = \frac{2x-2}{5} + 2 = \frac{2x-2+10}{5} = \frac{2x+8}{5}$

c) $A + B = -2\left(\frac{x+1}{3} + y - 1\right) + \frac{x-3}{4} + 2y - 1 = \frac{-2x-2}{3} - 2y + 2 + \frac{x-3}{4} + 2y - 1 =$
 $\frac{-2x-2}{3} + \frac{x-3}{4} + 1 = \frac{4(-2x-2) + 3(x-3) + 12}{12} = \frac{-5x-5}{12}$

d) $A + B = 6(x + 2) - 2(y + 7) + x + 2(y + 1) = 6x + 12 - 2y - 14 + x + 2y + 2 = 7x$

31. Expresa algebraicamente.

- a) La edad de Alberto dentro de 22 años, si hoy tiene x años.
- b) La cantidad que se obtiene al invertir x euros y ganar el 11 %.
- c) Por un ordenador y un reproductor de música se pagan 2500 €. Si el ordenador cuesta x euros, ¿cuánto cuesta el reproductor de música?
- d) Se compra un artículo por x euros y pierde el 15 % de su valor. ¿Cuánto costaría ahora?
- e) El perímetro de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide x cm, un cateto, los $3/5$ de la hipotenusa, y el otro cateto, 5 cm menos que esta.
- f) Los lados iguales de un triángulo isósceles de 24 cm de perímetro, si el desigual mide x cm.

a) $x =$ "Edad actual de Alberto". Dentro de 22 años tendrá $x + 22$.

b) $\left. \begin{array}{l} \text{Inversión} = x \\ \text{Ganancia de un 11\%} \rightarrow \text{I.V. es } 1,11 \end{array} \right\} \text{Cantidad obtenida} = 1,11x$

c) Ordenador = x €
 Equipo de música = $2500 - x$ €

d) $\left. \begin{array}{l} x = \text{"precio de compra"} \\ \text{Pérdida del 15\%} \rightarrow \text{I.V. es } 0,85 \end{array} \right\} \text{Precio final} = 0,85x$

e) Los lados son: Hipotenusa = x ; Catetos = $x - 5$ y $\frac{3}{5}x$

Perímetro = $x + x - 5 + \frac{3}{5}x = \frac{13}{5}x - 5$

f) $x =$ "longitud del lado desigual"

Por tanto: $\frac{24-x}{2}$ medirá cada uno de los lados iguales.

32. Expresa algebraicamente y simplifica cada expresión obtenida:

- a) El área de una lámina rectangular de bronce cuya base mide $\frac{5}{3}$ de su altura.
- b) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $16 - x$ y $9 - x$.
- c) El área de un cuadrado de lado $x + 3$.
- d) La diferencia de áreas de dos cuadrados de lados x y $x + 3$, respectivamente.
- e) La superficie de un jardín rectangular de base x metros y perímetro 70 m.
- f) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles si un cateto mide x cm, y el perímetro, 24 cm.
- g) El área de un rombo sabiendo que la longitud de una diagonal, x , es el triple de la otra.

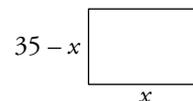
a) Base = $\frac{5}{3}x$ Altura = $x \rightarrow$ Área = $\frac{5}{3}x \cdot x = \frac{5}{3}x^2$

b) Cuadrado de la hipotenusa = $(9 - x)^2 + (16 - x)^2 = 81 - 18x + x^2 + 256 - 32x + x^2 = 2x^2 - 50x + 337$

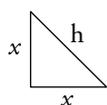
c) Área = $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

d) $\left. \begin{array}{l} \square \rightarrow \text{Área} = x^2 \\ \square \rightarrow \text{Área} = (x + 3)^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Diferencia de áreas} = (x + 3)^2 - x^2 = \\ = x^2 + 6x + 9 - x^2 = 6x + 9 \end{array}$

e) Perímetro = 70 m \rightarrow Semiperímetro = 35 m \rightarrow Altura = $35 - x$
Área = $x(35 - x) = 35x - x^2$



f) Sea h la hipotenusa del triángulo.



Podemos expresar su cuadrado de dos formas distintas:

1. Como el triángulo rectángulo $h^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$

2. Además, como el perímetro es 24, $h = 24 - 2x$, luego:

$h^2 = (24 - 2x)^2 = 576 + 4x^2 - 96x$

g) $\left. \begin{array}{l} \text{Diagonal menor} = x \\ \text{Diagonal mayor} = 3x \end{array} \right\} \rightarrow \text{Área} = \frac{x \cdot 3x}{2} = \frac{3x^2}{2}$

33. Expresa algebraicamente cada enunciado:

- a) El cuadrado de la diferencia de dos números.
- b) La suma de los cuadrados de dos números.
- c) La diagonal de un rectángulo de dimensiones x e y .
- d) El coste de la mezcla de dos tipos de café, cuyos precios son 8 €/kg y 10 €/kg.
- e) El dinero que tengo si llevo monedas de 2 € y de 50 céntimos.

a) $(x - y)^2$

b) $x^2 + y^2$

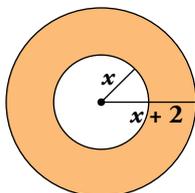
c) $\sqrt{x^2 + y^2}$

d) $\frac{8x + 10y}{x + y}$

e) $2x + 0,50y$

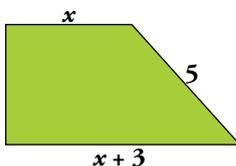
Resuelve problemas

34.  Expresa algebraicamente el área de esta corona circular:



$$A = \pi(x + 2)^2 - \pi x^2 = \pi(x^2 + 4 + 4x - x^2) = 4\pi(x + 1)$$

35.  Expresa algebraicamente el perímetro y el área de este trapecio rectángulo:



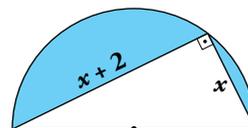
$$h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\text{Perímetro} = x + 5 + x + 3 + 4 = 2x + 12 = 2(x + 6)$$

$$A = \frac{x + 3 + x}{2} \cdot 4 = 2(2x + 3) = 4x + 6$$

36.  Observa la figura y expresa algebraicamente:

- El área del triángulo.
- El radio de la semicircunferencia.
- El área de la zona coloreada.



$$\text{a) } A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{x(x + 2)}{2} = \frac{x^2 + 2x}{2}$$

b) El radio de la semicircunferencia es la mitad de la hipotenusa del triángulo rectángulo.

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(x + 2)^2 + x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 4 + 4x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } A_{\text{ZONA COLOREADA}} &= A_{\text{SEMICÍRCULO}} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 2x + 2) - \frac{x^2 + 2x}{2} = \\ &= \pi \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{4} \right) - \frac{x^2 + 2x}{2} \end{aligned}$$

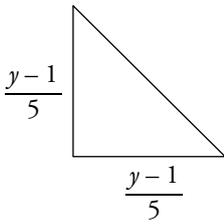
37.  Dos números suman 40. Expresa algebraicamente la suma del menor más la raíz cuadrada del mayor.

Si un número es x , el otro es $40 - x$.

Consideramos, por ejemplo: x = número mayor, $40 - x$ = número menor

Suma del menor más la raíz cuadrada del mayor = $40 - x + \sqrt{x}$

38.  El cateto de un triángulo rectángulo isósceles es $\frac{y-1}{5}$. Expresa algebraicamente la longitud de la hipotenusa y simplifica.



$$h^2 = \left(\frac{y-1}{5}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{5}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{y-1}{5}\right)^2$$

$$h = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{y-1}{5}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{y-1}{5}$$

39.  Un grupo de x estudiantes alquilan un piso por 700 € al mes. Se apuntan 2 más para alquilarlo. Expresa algebraicamente la diferencia de precio en ambos casos (con el grupo inicial y con 2 más).

- x estudiantes alquilan un piso por 700 € al mes \rightarrow cada uno paga $\frac{700}{x}$ €.
- Si fueran $x + 2$ estudiantes, cada uno pagaría $\frac{700}{x + 2}$ €.

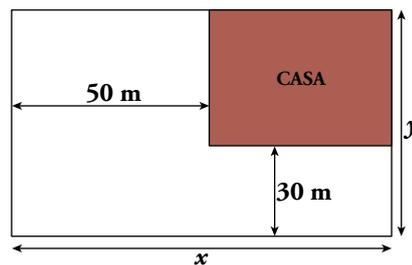
$$\text{Diferencia de precio} = \frac{700}{x} - \frac{700}{x + 2} = \frac{700(x + 2) - 700x}{x(x + 2)} = \frac{1400}{x(x + 2)}$$

40.  Un grupo de x amigos queda para comprar un regalo por 75,60 €. Tres de ellos se presentan sin dinero. Expresa algebraicamente el sobrecoste que eso supone para los demás.

- x amigos pagan por un regalo 75,60 € \rightarrow cada uno pone $\frac{75,60}{x}$ €.
- Si fueran 3 menos ($x - 3$), cada uno pondría $\frac{75,60}{x - 3}$ €.

$$\text{Diferencia de precio} = \frac{75,60}{x - 3} - \frac{75,60}{x} = \frac{75,60x - 75,60(x - 3)}{x(x - 3)} = \frac{226,8}{x(x - 3)}$$

41.  En una parcela de lados x e y se construye una casa en la zona que se indica en el dibujo.



Expresa, en función de x e y , el área de la zona no edificada.

$$A_{\text{CASA}} = (x - 50)(y - 30)$$

$$A_{\text{ZONA NO EDIFICADA}} = xy - (x - 50)(y - 30) = 50y + 30x - 1500$$

42.  Completa las tablas en tu cuaderno y expresa algebraicamente, con una igualdad, cada enunciado:

a) Dentro de dos años, mi padre tendrá el doble de mi edad.

	YO	MI PADRE
HOY	x	y
DENTRO DE 2 AÑOS		

b) Si te doy 4 €, entonces tendrás 1 € más que yo.

	YO	TÚ
TENEMOS	x	y
TE DOY 4 €		

a)

	YO	MI PADRE
HOY	x	y
DENTRO DE 2 AÑOS	$x + 2$	$y + 2$

$$y + 2 = 2(x + 2)$$

$$y + 2 = 2x + 4$$

$$y = 2x + 2$$

b)

	YO	TÚ
TENEMOS	x	y
TE DOY 4 €	$x - 4$	$y + 4$

$$y + 4 = (x - 4) + 1$$

$$y = x - 4 + 1 - 4$$

$$y = x - 7$$

Curiosidades matemáticas

Reflexiona y exprésate utilizando el lenguaje algebraico

Piensa en tres dígitos de forma que, al menos, dos de ellos sean distintos.

Por ejemplo, 5, 8 y 3.
 El número mayor 853
 El número menor 358
 La diferencia... $853 - 358 = 495$

Forma con ellos el mayor número posible..... x y z

Forma con ellos el menor número posible..... z y x

Réstalos..... x y z - z y x

- Comprueba que la diferencia es siempre múltiplo de 9 y de 11 y que sus cifras suman 18.
- Demuestra, utilizando el lenguaje algebraico, que las observaciones anteriores resultan ciertas para cualquier trío de cifras, x , y , z , siendo $x > z$.

AYUDA: Los números de tres cifras se codifican algebraicamente así:

$$\boxed{x} \boxed{y} \boxed{z} = 100x + 10y + z \qquad \boxed{z} \boxed{y} \boxed{x} = 100z + 10y + x$$

$$\boxed{x} \boxed{y} \boxed{z} - \boxed{z} \boxed{y} \boxed{x} = (100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 99x - 99z = 99(x - z)$$

La diferencia siempre es múltiplo de 99 y, por tanto, lo es de 9 y de 11.