1 Proporcionalidad simple

Página 51

1. Resuelve mentalmente.

a) Una botella de aceite de tres cuartos de litro cuesta 3,60 €. ¿A cómo sale el litro?

b) Dos máquinas cortacésped siegan un prado en media hora. ¿Cuánto tardarían tres máquinas?

c) Un cicloturista ha recorrido 4 km en 12 minutos. ¿Qué distancia recorrerá en media hora?

d) Un camión, a 60 km/h, tarda en ir de A a B 40 minutos. ¿Cuánto tardará un coche a 80 km/h?

a) El precio de la botella de aceite es directamente proporcional a su capacidad.

ACEITE (litros)	COSTE (€)
0,75	3,60
1	x

D

$$\frac{3,60}{x} = \frac{0,75}{1} \rightarrow x = \frac{3,60 \cdot 1}{0,75} = 4,80 \text{ €}$$

Un litro de aceite cuesta 4,80 €.

b) El tiempo que se tarda en segar el prado es inversamente proporcional al número de máquinas cortacésped que se utilizan.

MÁQUINAS	TIEMPO (min)
2	30
3	x

I

$$\frac{30}{x} = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 2}{3} = 20 \text{ minutos}$$

Tres máquinas tardarían 20 minutos en segar el prado.

c) La distancia recorrida por el cicloturista es directamente proporcional al tiempo.

DISTANCIA (km)	TIEMPO (min.)
4	12
x	30

D

$$\frac{4}{x} = \frac{12}{30} \rightarrow x = \frac{4 \cdot 30}{12} = 10 \text{ km}$$

En media hora el cicloturista recorrerá 10 km.

d) El tiempo que un camión tarda en recorrer una distancia es inversamente proporcional a la velocidad a la que circula.

VELOCIDAD (km/h)	TIEMPO (min)
60	40
80	x

I

$$\frac{40}{x} = \frac{80}{60} \rightarrow \frac{40 \cdot 60}{80} = 30 \text{ min.}$$

Si circula a 80 km/h el camión tardará media hora en ir de A a B.

2. Si cada día gasto 3,60 €, mis ahorros durarán 15 días.

¿Cuánto durarían si gastase 4,50 € diarios?

La duración del dinero ahorrado es inversamente proporcional al gasto diario.

GASTO DIARIO	DÍAS QUE DURAN
3,60	15
4,50	x

I

$$\frac{3,6}{4,5} = \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{3,6 \cdot 15}{4,5} = 12$$

Gastando 4,50 € al día, los ahorros durarían 12 días.

3. Cinco metros y medio de cable eléctrico han costado 4,51 €.

¿Cuánto costarán 8 m 35 cm del mismo tipo de cable?

El coste del cable es directamente proporcional a su longitud.

CABLE (m)	COSTE (€)
5,5	4,51
8,35	x

D

$$\frac{4,51}{x} = \frac{5,5}{8,35} \rightarrow x = \frac{4,51 \cdot 8,35}{5,5} = 6,85 \text{ €}$$

8 m y 35 cm del mismo tipo de cable costarán 6,85 €.

4. Un ganadero tiene reservas de pasto para alimentar a 35 vacas durante 60 días.

¿Cuánto le durarán sus reservas si vende 15 vacas?

El tiempo que un ganadero puede alimentar a sus vacas, con una cantidad fija de pasto, es inversamente proporcional al número de estas.

VACAS	TIEMPO (días)
35	60
20	x

I

$$\frac{60}{x} = \frac{20}{35} \rightarrow x = \frac{60 \cdot 35}{20} = 105 \text{ días}$$

Sus reservas le durarán 105 días si tiene que alimentar a 20 vacas.

5. En el comedor del colegio se han consumido 132 barras de pan durante tres días.

Si una barra cuesta 0,35 €, ¿qué presupuesto debe destinar el administrador para la compra de pan a la semana?

El número de días es directamente proporcional al número de barras de pan consumidas.

Consideramos que el comedor se abre 5 días a la semana.

N.° DE DÍAS	BARRAS DE PAN
3	132
5	x

D

$$\frac{3}{5} = \frac{132}{x} \rightarrow x = \frac{132 \cdot 5}{3} = 220$$

Presupuesto = 220 · 0,35 = 77 € a la semana.

2 Proporcionalidad compuesta

Página 52

1. Por el alquiler de dos bicicletas, durante 3 horas, pagamos ayer 11,10 €. ¿Cuánto nos costará hoy alquilar tres bicicletas durante cinco horas?

BICICLETAS	TIEMPO (horas)	COSTE (€)
2	3	11,10
3	5	x

D

D

$$\frac{11,10}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \rightarrow \frac{11,10}{x} = \frac{2}{5} \rightarrow x = \frac{11,10 \cdot 5}{2} = 27,75 \text{ €}$$

El alquiler de tres bicicletas durante 5 horas costará 27,75 €.

2. Un caño que arroja medio litro por segundo llena un camión cisterna en 3 horas. ¿Qué caudal debería proporcionar para llenar dos cisternas a la hora?

El número de cisternas que se llenan es directamente proporcional al caudal. El tiempo que tarda en llenarse una cisterna es inversamente proporcional al caudal.

N.° DE CISTERNAS	TIEMPO (h)	CAUDAL (l/s)
1	3	0,5
2	1	x

I

D

$$\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{0,5}{x} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 0,5}{1} = 3$$

Para llenar dos cisternas en una hora, es necesario un caudal de 3 l/s.

3. Un jardinero cobra 120 € por dar seis cortes de césped a una parcela de 250 m^2.

a) ¿Cuánto cobrará por dar ocho cortes a una parcela de 400 m^2?

b) ¿Cuántos cortes ha contratado para una parcela de 300 m^2, con un coste de 72 €?

a)

SUPERFICIE (m^2)	CORTES DE CÉSPED	COSTE (€)
250	6	120
400	8	x

D

D

$$\frac{120}{x} = \frac{250}{400} \cdot \frac{6}{8} \rightarrow \frac{120}{x} = \frac{250 \cdot 6}{400 \cdot 8} \rightarrow x = \frac{120\,400 \cdot 8}{250 \cdot 6} = 256$$

Dar 8 cortes de césped a una parcela de 400 m^2 costará 256 €.

b)

SUPERFICIE (m^2)	CORTES DE CÉSPED	COSTE (€)
250	6	120
300	x	72

I D

$$\frac{6}{x} = \frac{300}{250} \cdot \frac{120}{72} \rightarrow \frac{6}{x} = \frac{300 \cdot 120}{250 \cdot 72} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 250 \cdot 72}{300 \cdot 120} = 3 \text{ cortes}$$

Con 72 € se pueden dar 3 cortes de césped a una parcela de 300 m^2.

4. Una cadena de cines, con cinco locales, vende 15 000 entradas en tres semanas. ¿Cuántas entradas puede estimar que vendería a la semana si tuviera siete locales?

LOCALES	SEMANAS	ENTRADAS
5	3	15 000
7	1	x

D

D

$$\frac{15\,000}{x} = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{1} \rightarrow \frac{15\,000}{x} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{15\,000 \cdot 7 \cdot 1}{5 \cdot 3} = 7\,000$$

Si tuviera 7 locales vendería 7 000 entradas en 1 semana.

5. Tres pintores, trabajando 8 horas al día, pintan un muro en 10 días. ¿Cuánto tardarían 5 pintores trabajando 6 horas cada día?

PINTORES	HORAS/DÍA	DÍAS
3	8	10
5	6	x

I

I

$$\frac{10}{x} = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{3} \rightarrow \frac{10}{x} = \frac{6 \cdot 5}{8 \cdot 3} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 8 \cdot 3}{6 \cdot 5} = 8 \text{ días}$$

5 pintores, trabajando 6 horas al día, tardarán 8 días en pintar el muro.

6. Una cuadrilla de 5 obreros ha cobrado 1 050 € por un trabajo que ha durado tres días. ¿Cuántos obreros forman otra cuadrilla que, cobrando las mismas tarifas, ha presentado una factura de 1 680 € por un trabajo de 6 días?

OBREROS	FACTURA (€)	TIEMPO (días)
5	1 050	3
x	1 680	6

D

I

$$\frac{5}{x} = \frac{1\,050}{1\,680} \cdot \frac{6}{3} \rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1\,050 \cdot 6}{1\,680 \cdot 3} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 1\,680 \cdot 3}{1\,050 \cdot 6} = 4 \text{ obreros}$$

La cuadrilla que, por un trabajo de 6 días, ha presentado una factura de 1 680 € está formada por 4 obreros.

3 Repartos proporcionales

Página 53

1. Dos hermanas compran cinco juegos de toallas por 175 €. Una se queda con tres juegos, y la otra, con dos. ¿Cuánto debe pagar cada una?

Cada juego de toallas cuesta 175 : 5 = 35 €.

Quien se queda con 3 juegos pagará 3 · 35 = 105 €.

Quien se queda con 2 juegos pagará 2 · 35 = 70 €.

2. Tres amigas que comparten piso reciben una factura de la compañía eléctrica por un importe de 62,40 €. Amelia llegó al piso hace 60 días; Laura, 20 días después, y Cristina solo lleva en la casa 20 días. ¿Cuánto debe pagar cada una?

Amelia lleva en el piso 60 días.

Laura lleva en el piso 40 días.

Cristina lleva en el piso 20 días.

Se divide el importe de la factura entre el número total de días, 60 + 40 + 20 = 120.

42,4 : 120 = 0,52 € por día

El pago de la factura se hará como sigue:

Amelia → 60 · 0,52 = 31,20 €

Laura → 40 · 0,52 = 20,80 €

Cristina → 20 · 0,52 = 10,40 €

3. Reparte 660 en partes directamente proporcionales a 1, 2 y 3.

1 + 2 + 3 = 6 → 660 : 6 = 110

- 1 → 110 · 1 = 110
- 2 → 110 · 2 = 220
- 3 → 110 · 3 = 330

4. Reparte 660 en partes inversamente proporcionales a 1, 2 y 3.

Repartir 660 en partes inversamente proporcionales a 1, 2 y 3 es equivalente a repartir 660 en partes directamente proporcionales a 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6}$

$660 : \frac{11}{6} = 360$

- 1 → $360 \cdot 1 = 360$
- 2 → $360 \cdot \frac{1}{2} = 180$
- 3 → $360 \cdot \frac{1}{3} = 120$

5. Un conductor profesional ha realizado un viaje de A a B, con un vehículo pesado, a una media de 50 km/h.

A continuación ha regresado conduciendo un utilitario, a 100 km/h. Y por último ha viajado otra vez a B, con una furgoneta, a 80 km/h.

¿Cuánto tiempo ha invertido en cada trayecto, si ha tardado cuatro horas y cuarto en los tres recorridos?

Repartir 255 en partes inversamente proporcionales a 50, 100 y 80 es equivalente a repartir 255 en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$ y $\frac{1}{80}$.

$$\frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{80} = \frac{8+4+5}{400} = \frac{17}{400}$$

$$255 : \frac{17}{400} = 6\,000$$

- Vehículo pesado $\rightarrow \frac{1}{50} \cdot 6\,000 = 120$ minutos = 2 horas
- Utilitario $\rightarrow \frac{1}{100} \cdot 6\,000 = 60$ minutos = 1 hora
- Furgoneta $\rightarrow \frac{1}{80} \cdot 6\,000 = 75$ minutos = 1 hora y cuarto

Por tanto, cuando realizó el trayecto de A a B con un vehículo pesado tardó 2 horas, con un utilitario, tardó 1 hora, y en furgoneta, 1 hora y cuarto.

4 Cálculos con porcentajes

Página 54

Cálculo mental

a) 10 % de 500 **b) 20 % de 400** **c) 5 % de 360**

d) 75 % de 280 **e) 25 % de 88** **f) 50 % de 250**

a) 10 % de 500 = 0,10 · 500 = 50

b) 20 % de 400 = 0,20 · 400 = 80

c) 5 % de 360 = 0,05 · 360 = 18

d) 75 % de 280 = 0,75 · 280 = 210

e) 25 % de 88 = 0,25 · 88 = 22

f) 50 % de 250 = 0,50 · 250 = 125

1. Copia y completa la tabla asociando porcentaje, fracción y número decimal.

82 %	53 %	43 %	**9 %**	7 %	3 %
$\frac{82}{100}$	$\frac{\mathbf{53}}{\mathbf{100}}$	$\frac{43}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{100}}$	$\frac{3}{100}$
0,82	0,53	**0,43**	0,09	0,07	**0,03**

2. Calcula.

a) 32 % de 500 **b) 86 % de 60**

c) 7 % de 850 **d) 5 % de 347**

e) 11,4 % de 4 000 **f) 2,5 % de 88**

g) 0,4 % de 900 **h) 0,01 % de 5 000**

i) 150 % de 398 **j) 400 % de 740**

a) 32 % de 500 = 0,32 · 500 = 160

b) 86 % de 60 = 0,86 · 60 = 51,6

c) 7 % de 850 = 0,07 · 850 = 59,5

d) 5 % de 347 = 0,05 · 347 = 17,35

e) 11,4 % de 4 000 = 0,114 · 4 000 = 456

f) 2,5 % de 88 = 0,025 · 88 = 2,2

g) 0,4 % de 900 = 0,004 · 900 = 3,6

h) 0,01 % de 5 000 = 0,0001 · 5 000 = 0,5

i) 150 % de 398 = 1,50 · 398 = 597

j) 400 % de 740 = 4 · 740 = 2 960

3. Un agricultor, que dispone de 40 hectáreas de terreno, siembra el 65 % de cebada; el 15 %, de trigo, y el resto, de avena. ¿Cuántas hectáreas ocupa la avena?

El porcentaje del terreno sembrado de avena es:

100 % – (65 % + 15 %) = 20 %

Por tanto, de las 40 ha de terreno la avena ocupa:

20 % de 40 ha = 0,2 · 40 = 8 ha

4. Dos hermanos compran un balón que cuesta 42 €. El mayor paga el 60 %. ¿Qué porcentaje paga el pequeño? ¿Cuánto ha de pagar?

Si el mayor paga el 60 %, el pequeño paga el 40 %.

Por tanto, el pequeño paga 40 % de 42 € = 0,4 · 42 = 16,80 €.

5. Un trabajador tiene un salario bruto de 1 400 € al mes, del que le retienen un 15 % de impuestos. ¿Cuánto le retienen? ¿Qué porcentaje del salario bruto se lleva? ¿Cuál es el salario neto?

- Le retienen el 15 % de 1 400 € = 0,15 · 1 400 = 210 €.
- Se lleva 100 % – 15 % = 85 % del salario bruto.
- Salario neto = 85 % de 1 400 € = 0,85 · 1 400 = 1 190 €

6. El ayuntamiento de cierta ciudad sacó a concurso 150 plazas de funcionarios municipales. Se presentaron 2 840 aspirantes de los que un 95 % fue eliminado durante la selección. ¿Se cubrieron todas las plazas?

Si fueron eliminados el 95 % de aspirantes, entonces pasaron la selección el 5 % de 2 840 aspirantes:

$$0{,}05 \cdot 2\,840 = 142 \text{ aspirantes}$$

El ayuntamiento sacó a concurso 150 plazas y únicamente pasaron la selección 142 aspirantes del total presentados. Por tanto, no se cubrieron todas las plazas.

Página 55

Cálculo mental

a) El 50 % de … es 32.

b) El 25 % de … es 12.

c) El 75 % de … es 15.

d) El 20 % de … es 50.

e) El 10 % de … es 21.

f) El 5 % de … es 12.

g) El 30 % de … es 45.

a) $0{,}5 \cdot x = 32 \rightarrow x = \frac{32}{0{,}5} = 64$

b) $0{,}25 \cdot x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{0{,}25} = 48$

c) $0{,}75 \cdot x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{0{,}75} = 20$

d) $0{,}20 \cdot x = 50 \rightarrow x = \frac{50}{0{,}20} = 250$

e) $0{,}10 \cdot x = 21 \rightarrow x = \frac{21}{0{,}10} = 210$

f) $0{,}05 \cdot x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{0{,}05} = 240$

g) $0{,}30 \cdot x = 45 \rightarrow x = \frac{45}{0{,}30} = 150$

Cálculo mental

a) 5 es el … % de 20.

b) 8 es el … % de 80.

c) 9 es el … % de 12.

d) 6 es el … % de 18.

e) 4 es el … % de 80.

f) 6 es el … % de 40.

g) 9 es el … % de 150.

a) $\frac{5}{x} = 20 \rightarrow x = 0{,}25 \rightarrow 25\,\%$

b) $\frac{8}{x} = 80 \rightarrow x = 0{,}10 \rightarrow 10\,\%$

c) $\frac{9}{x} = 12 \rightarrow x = 0{,}75 \rightarrow 75\,\%$

d) $\frac{6}{x} = 18 \rightarrow x = 0{,}33 \rightarrow 33\,\%$

e) $\frac{4}{x} = 80 \rightarrow x = 0{,}05 \rightarrow 5\,\%$

f) $\frac{6}{x} = 40 \rightarrow x = 0{,}15 \rightarrow 15\,\%$

g) $\frac{9}{x} = 150 \rightarrow x = 0{,}06 \rightarrow 6\,\%$

7. Calcula el valor de T en cada caso:

a) 16 % de $T = 52$

b) 24 % de $T = 156$

c) 18 % de $T = 58{,}5$

d) 8 % de $T = 10{,}8$

e) 0,8 % de $T = 5{,}8$

f) 0,25 % de $T = 3$

a) $0{,}16 \cdot T = 52 \rightarrow T = 52 : 0{,}16 = 325$

b) $0{,}24 \cdot T = 156 \rightarrow T = 156 : 0{,}24 = 650$

c) $0{,}18 \cdot T = 58{,}5 \rightarrow T = 58{,}5 : 0{,}18 = 325$

d) $0{,}08 \cdot T = 10{,}8 \rightarrow T = 10{,}8 : 0{,}08 = 135$

e) $0{,}08 \cdot T = 5{,}8 \rightarrow T = 5{,}8 : 0{,}008 = 725$

f) $0{,}0025 \cdot T = 3 \rightarrow T = 3 : 0{,}0025 = 1\,200$

8. Calcula el valor de P en cada caso:

a) P % de 380 = 57 **b) P % de 225 = 9** **c) P % de 190 = 51,3**

d) P % de 46 = 2,88 **e) P % de 2 500 = 5** **f) P % de 1 800 = 27**

a) $\frac{P}{100} \cdot 380 = 57 \rightarrow P = \frac{57}{380} \cdot 100 = 15\%$

b) $\frac{P}{100} \cdot 225 = 9 \rightarrow P = \frac{9}{225} \cdot 100 = 4\%$

c) $\frac{P}{100} \cdot 190 = 51,3 \rightarrow P = \frac{51,3}{190} \cdot 100 = 27\%$

d) $\frac{P}{100} \cdot 46 = 2,88 \rightarrow P = \frac{2,88}{46} \cdot 100 = 6,26\%$

e) $\frac{P}{100} \cdot 2\,500 = 5 \rightarrow P = \frac{5}{2\,500} \cdot 100 = 0,2\%$

f) $\frac{P}{100} \cdot 1\,800 = 27 \rightarrow P = \frac{27}{1\,800} \cdot 100 = 1,5\%$

9. Hoy había en el estadio de fútbol 24 000 aficionados, lo que supone un 80 % de su capacidad total. ¿Cuántos aficionados hay en el campo cuando se llena?

T = capacidad total del campo

80 % de $T = 24\,000 \rightarrow 0,8 \cdot T = 24\,000 \rightarrow T = 24\,000 : 0,8 = 30\,000$ aficionados

Por tanto, cuando el campo se llena hay en él 30 000 aficionados.

10. Elena tenía en su cuenta 5 000 € y ha adquirido un televisor por 750 €. ¿Qué porcentaje de sus ahorros ha gastado?

De un total de 5 000 €, se ha gastado 750 €. ¿Cuánto se ha gastado de cada 100 €?

TOTAL	PARTE
5 000	750
100	x

$$\frac{5\,000}{100} = \frac{750}{x} \rightarrow x = \frac{750 \cdot 100}{5\,000} = 15$$

Se ha gastado el 15 % de sus ahorros.

11. En mi clase somos 16 chicas, lo que supone un $53,\widehat{3}$ % del total de alumnos y alumnas. ¿Cuál es el porcentaje de chicos? ¿Cuántos somos en total?

- Si el porcentaje de chicas es el $53,\widehat{3}$ %, entonces el porcentaje de chicos es:

$$100\,\% - 53,\widehat{3}\,\% = 46,\widehat{7}\,\%$$

- $53,\widehat{3}\,\% = \frac{533 - 53}{9}\,\% = \frac{160}{3}\,\%$

En clase hay 16 chicas que son el $\frac{160}{3}$ % del total, por tanto:

ALUMNOS	PORCENTAJE
16	160/3
x	100

D

$$\frac{16}{x} = \frac{160/3}{100} \rightarrow x = \frac{16 \cdot 100}{160/3} = 30$$

Por tanto, el número total de alumnos de la clase es 30.

12. Compré un ordenador portátil por 490 € y una pantalla supletoria por 135 €. ¿Qué porcentaje del gasto efectuado supone el ordenador? ¿Y la pantalla?

Portátil = 490 €

Pantalla supletoria = 135 €

$\rightarrow$ Gasto total = 490 € + 135 € = 625 €

TOTAL	PARTE
625	490
100	x

D

El precio del ordenador representa el 78,4 % del gasto total y el precio de la pantalla es el 100 % – 78,4 % = 21,6 % del total.

13. Bernardo ha comprado una bicicleta. Sus padres le han subvencionado el 50 %, y su abuela, el 30 %. Alejandro ha puesto el resto que son 108 euros. ¿Cuál era el precio de la bicicleta?

Si sus padres le han subvencionado el 50 % y su abuela el 30 %, Bernardo ha puesto:

100 % – (50 % + 30 %) = 20 % del precio total de la bicicleta (T).

20 % de T = 108 € $\rightarrow$ 0,2 · T = 108 € $\rightarrow$ T = 108 : 0,2 = 540 €

La bicicleta costó 540 €.

14. En un campamento internacional de verano había 16 españoles, 12 ingleses, 14 portugueses, 18 franceses, 3 argentinos y 5 japoneses.

¿Qué porcentaje había de cada nacionalidad?

Total de personas = 16 + 12 + 14 + 18 + 3 + 5 = 68

Españoles:

PERSONAS	PORCENTAJE
68	100
16	x

D

$$\frac{100}{x} = \frac{68}{16} \rightarrow x = \frac{16}{68} \cdot 100 = 23,53\,\%$$

Ingleses:

PERSONAS	PORCENTAJE
68	100
12	x

D

$$\frac{100}{x} = \frac{68}{12} \rightarrow x = \frac{12}{68} \cdot 100 = 17,65\,\%$$

Portugueses:

PERSONAS	PORCENTAJE
68	100
14	x

D

$$\frac{100}{x} = \frac{68}{14} \rightarrow x = \frac{14}{68} \cdot 100 = 20,59\,\%$$

Franceses:

PERSONAS	PORCENTAJE
68	100
18	x

D

$$\frac{100}{x} = \frac{68}{18} \rightarrow x = \frac{18}{68} \cdot 100 = 26,47\,\%$$

Argentinos:

PERSONAS	PORCENTAJE
68	100
3	x

D

$$\frac{100}{x} = \frac{68}{3} \rightarrow x = \frac{3}{68} \cdot 100 = 4,41\,\%$$

Japoneses:

PERSONAS	PORCENTAJE
68	100
5	x

D

$$\frac{100}{x} = \frac{68}{5} \rightarrow x = \frac{5}{68} \cdot 100 = 7,35\,\%$$

Página 57

15. Copia y completa en tu cuaderno.

$C_{INICIAL}$	AUMENTO	$I_{VARIACIÓN}$	C_{FINAL}
850	**32 %**	1,32	1 122
1 080	**25 %**	**1,25**	**1 350**
325	**2 %**	1,02	**331,5**

$C_{INICIAL}$	DESCUENTO	$I_{VARIACIÓN}$	C_{FINAL}
630	20 %	**0,80**	504
85,87	**8 %**	0,92	**79**
338,27	2 %	**0,98**	**331,5**

16. En una tienda de informática han subido todos los productos un 7 %. Un ordenador valía 840 €, y una impresora multifunción, 80 €. ¿Cuánto valen ahora?

Ordenador: $840 + \frac{7 \cdot 840}{100} = 898{,}80$ €

Impresora: $80 + \frac{7 \cdot 80}{100} = 85{,}60$ €

17. Un inversor compra acciones por valor de 15 000 €. Una semana después, se ve obligado a venderlas, a pesar de que han bajado un 4 %. ¿Cuánto dinero obtiene de la venta?

Las acciones han bajado un 4 % $\rightarrow I_{VARIACIÓN} = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

$$C_{FINAL} = I_{VARIACIÓN} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{FINAL} = 0{,}96 \cdot 15\,000 = 14\,400 \text{ €}$$

El inversor obtuvo 14 400 € por la venta de las acciones.

18. ¿Cuánto pagará Iván por un traje que costaba 685 €, si le hacen una rebaja del 25 %?

El traje está rebajado un 25 % $\rightarrow I_{VARIACIÓN} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$$C_{FINAL} = I_{VARIACIÓN} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{FINAL} = 0{,}75 \cdot 685 = 513{,}75 \text{ €}$$

Iván pagará 513,75 € por el traje.

19. Un grupo de amigos y amigas cena en un restaurante que carga en los precios de la carta un 6 % de IVA. La cuenta, sin IVA, asciende a 360 €. ¿Cuánto pagarán por la cena?

IVA = 6 % $\rightarrow I_{VARIACIÓN} = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$

$$C_{FINAL} = I_{VARIACIÓN} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{FINAL} = 1{,}06 \cdot 360 = 381{,}60 \text{ €}$$

La cuenta, IVA incluido, asciende a 381,60 €.

20. ¿Cuánto costaba un vestido que, rebajado un 25 %, sale por 84 €?

Rebaja del 25 % $\rightarrow I_{VARIACIÓN} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$$C_{FINAL} - I_{VARIACIÓN} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow 84 = 0{,}75 \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{INICIAL} = 84 : 0{,}75 = 112 \text{ €}$$

El vestido costaba 112 €.

21. El coste de una reparación de fontanería asciende a 143,99 €, IVA incluido (21 %). ¿Cuál era el importe de la factura antes de cargar el IVA?

IVA = 21 % $\rightarrow$ $I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 + 0{,}21 = 1{,}21$

$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 143{,}99 = 1{,}21 \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow C_{\text{INICIAL}} = 143{,}99 : 1{,}21 = 119$ €

La factura, antes de cargar el IVA, ascendía a 119 €.

22. Un automovilista concierta con su seguro una cuota anual de 520 € el primer año, que bajará a 442 € el segundo año en caso de no sufrir incidencias.

¿En qué porcentaje se rebajará la cuota si se cumple la condición exigida?

$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 442 = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot 520 \rightarrow I_{\text{VARIACIÓN}} = 442 : 520 = 0{,}85$

$I_{\text{VARIACIÓN}} = 0{,}85 \rightarrow$ Rebaja del $(1 - 0{,}85) \cdot 100 = 15\,\%$

En caso de no sufrir incidencias el primer año, la cuota anual del seguro se rebajará un 15 % el segundo año.

23. Un cine recibió 4 600 espectadores con el estreno de la semana pasada, y ya lleva 5 200 para el de esta semana. ¿En qué porcentaje se ha superado ya el número de espectadores de la semana pasada?

$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 5\,200 = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot 4\,600 \rightarrow I_{\text{VARIACIÓN}} = 5\,200 \cdot 4\,600 = 1{,}13$

$I_{\text{VARIACIÓN}} = 1{,}13 \rightarrow$ Aumentao del $(1{,}13 - 1) \cdot 100 = 13\,\%$

El número de espectadores se ha superado en un 13 % respecto a la semana pasada.

Página 58

24. Un pueblo tenía 25 000 habitantes en 1950. Hasta 1975 su población aumentó un 18 % y, después, en el último cuarto del siglo XX, volvió a aumentar un 25 %. ¿Cuántos habitantes tenía en el año 2000?

Aumento del 18 % $\rightarrow$ $I_{V1} = 1{,}18$

Aumento del 25 % $\rightarrow$ $I_{V2} = 1{,}25$

Índice de variación total: $I_{VT} = I_{V1} \cdot I_{V2} = 1{,}18 \cdot 1{,}25 = 1{,}475$

$$C_{FINAL} = I_{VT} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{FINAL} = 1{,}475 \cdot 25\,000 = 36\,875 \text{ habitantes}$$

En el año 2000, el pueblo tenía 36 875 habitantes.

25. Un agricultor vende sus melocotones y sus albaricoques, en el árbol, a un intermediario.

— El intermediario recoge la fruta y la pone en el almacén cargando el precio en un 25 %.

— El almacén, en el proceso de limpia, selección y envasado, revaloriza el producto en un 60 %.

— Del almacén, pasa al transporte refrigerado que lo lleva al mercado central de una gran ciudad europea, proceso en el que se dobla el precio.

— Del mercado central pasa al minorista encareciéndose en un 50 %.

a) ¿Qué variación porcentual hay entre el precio cobrado por el agricultor y el pagado por el consumidor?

b) ¿A qué precio paga los melocotones el consumidor, si el agricultor los cobró a 0,45 €/kg?

c) ¿A cuánto vendió el agricultor los albaricoques, si el consumidor los paga a 2,40 €/kg?

a) • Aumento del 25 % $\rightarrow$ $I_{V1} = 1{,}25$

• Aumento del 60 % $\rightarrow$ $I_{V2} = 1{,}60$

• Se dobla el precio $\rightarrow$ $I_{V3} = 2$

• Aumento del 50 % $\rightarrow$ $I_{V4} = 1{,}50$

Índice de variación total: $I_{VT} = I_{V1} \cdot I_{V2} \cdot I_{V3} \cdot I_{V4} \rightarrow I_{VT} = 1{,}25 \cdot 1{,}60 \cdot 2 \cdot 1{,}50 = 6$

$I_{VT} = 6 \rightarrow$ Entre el precio cobrado por el agricultor y el pagado por el consumidor, ha habido un aumento del $(6 - 1) \cdot 100 = 500\,\%$

b) $C_{FINAL} = I_{VT} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{FINAL} = 6 \cdot 0{,}45 = 2{,}7$ €/kg

El consumidor paga los melocotones a 2,7 €/kg.

c) $C_{FINAL} = I_{VT} \cdot C_{INICIAL} \rightarrow 2{,}40 = 6 \cdot C_{INICIAL} \rightarrow C_{INICIAL} = 2{,}40 : 6 = 0{,}4$ €/kg

El agricultor vendió los albaricoques a 0,4 €/kg.

26. El agua almacenada en un pantano sufre los siguientes cambios a lo largo de un año:

1.er TRIMESTRE: sube el 27 %.

2.º TRIMESTRE: sube el 11 %.

3.er TRIMESTRE: baja el 48 %.

4.º TRIMESTRE: sube el 32 %.

a) ¿Cuál es la variación durante el primer semestre? ¿Y durante el segundo semestre?

b) Si el día 30 de junio había 2 422 hm^3, ¿cuánto había el 1 de enero? ¿Y el 31 de diciembre?

a) A lo largo del primer semestre:

$I_{\text{VARIACIÓN}} = 1{,}27 \cdot 1{,}11 = 1{,}41 \rightarrow$ hay una subida del 41 %

A lo largo del segundo semestre:

$I_{\text{VARIACIÓN}} = 0{,}52 \cdot 1{,}32 = 0{,}69 \rightarrow$ hau una bajada del 31 %

b) El 1 de enero había:

$C_{\text{INICIAL}} \cdot 1{,}41 = 2\,422$

$C_{\text{INICIAL}} = 2\,422 : 1{,}41 = 1\,717{,}73$ hm^3

El 31 de3 diciembre había:

$C_{\text{FINAL}} = 2\,422 \cdot 0{,}69 = 1\,671{,}18$ hm^3

27. Un balón, lanzado a 8 metros de altura, pierde el 60 % de energía en cada bote, y deja de botar cuando cae desde una altura inferior a 25 cm. ¿Cuántos botes dará hasta pararse? (Sugerencia: Utiliza la calculadora).

En cada bote el balón pierde el 60 % de energía $\rightarrow I_V = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

- Altura inicial: h = 8 m = 800 cm
- Primer bote: h = 800 · 0,4 = 320 cm
- Segundo bote: h = 320 · 0,4 = 128 cm
- Tercer bote: h = 128 · 0,4 = 51,2 cm
- Cuarto bote: h = 51,2 · 0,4 = 20,48 cm < 25 cm

Da 4 botes hasta pararse.

28. Un comerciante poco honesto, antes de anunciar unas rebajas del 40 %, aumenta el 40 % el precio de referencia de los artículos, creyendo que, de esa forma, las cosas quedarán igual. Sin embargo, sí hay un cierto descuento.

a) ¿Cuál es el verdadero descuento?

b) Si un traje valía 550 €, ¿cuál será su valor en cada paso del proceso?

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Aumento del 40 \%} \rightarrow \text{Índice de variación: } 1{,}4 \\ \text{Descuento del 40 \%} \rightarrow \text{Índice de variación: } 0{,}6\end{array}\right\} \rightarrow$ Índice de variación: $0{,}6 \cdot 1{,}4 = 0{,}84$

Por tanto, se ha aplicado una rebaja total del 16 %.

b) Tras la primera subida $\rightarrow 550 \cdot 1{,}4 = 770$ €

Tras la rebaja del 40 % $\rightarrow 770 \cdot 0{,}6 = 462$ €

5 Depósitos y préstamos

Página 59

1. Un banco paga el 6 % anual por el dinero depositado. Un inversor pone 20 000 €. Al cabo de un año deja el dinero y los intereses y añade otros 10 000 €. ¿Cuánto dinero le darán al acabar otro año?

- Tras el primer año tendrá: $20\,000 \cdot 1{,}06 = 21\,200$ €.
- Tras añadir 10 000 € tendrá: $21\,200 + 10\,000 = 31\,200$ €.
- Al acabar otro año tendrá: $31\,200 \cdot 1{,}06 = 33\,072$ €.

2. Se depositan 6 000 € al 3 %. Al acabar el año, se saca todo el dinero, se añaden 3 820 € y se deposita todo en otro banco al 5 %. ¿Cuánto dinero hay al final de otro año?

- Tras el primer año: $6\,000 \cdot 1{,}03 = 6\,180$ €
- Se añaden 3 820 €: $6\,180 + 3\,820 = 10\,000$ €
- Tras el segundo año: $10\,000 \cdot 1{,}05 = 10\,500$ €

3. ¿Qué intereses producen 1 000 € en cuatro meses, colocados al 4 % anual? ¿En cuánto se convierten?

Cuatro meses suponen $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ de año.

Un 4 % anual significa $4 \cdot \frac{1}{3} = 1{,}\widehat{3}$ % en cuatro meses:

$$1\,000 \text{ €} \xrightarrow{1{,}\widehat{3}\,\%} 1\,000 \cdot 0{,}01\widehat{3} = 13{,}33 \text{ €}$$

1 000 €, al 4 % anual, producen unos intereses de 13,33 € en cuatro meses. Por tanto, 1 000 € en cuatro meses se convierten en 1 013,33 €.

4. ¿Qué capital, colocado al 3,2 % durante 9 meses, produce unos intereses de 448,80 €?

Nueve meses suponen $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ de año.

Un 3,2 % al año significa $3{,}2 \cdot \frac{3}{4} = 2{,}4$ % en nueve meses.

$$C \xrightarrow{2{,}4\,\%} C \cdot 0{,}024 = 448{,}80 \text{ €} \rightarrow C = 448{,}80 : 0{,}024 = 18\,700 \text{ €}$$

El capital ascendía a 18 700 €.

5. Un capital de 120 000 €, colocado en una cuenta a seis meses, se convierte en 126 750 €. ¿Qué tanto por ciento anual abona la cuenta?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Capital inicial} = 120\,000 \text{ €} \\ \text{Capital final} = 126\,750 \text{ €}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Intereses} = 126\,750 - 120\,000 = 6\,750 \text{ €}$$

- I = interés semestral aplicado $\rightarrow 120\,000 \cdot I = 6\,750 \rightarrow I = 6\,750 : 120\,000 = 0{,}05625$

  Abona un 5,625 % de interés semestral.
- Un 5,625 % en seis meses supone $2 \cdot 5{,}625 = 11{,}25$ % al año.

  Por tanto, la cuenta abona un 11,25 % anual.

Página 60

6. Un inversor coloca 24 000 € al 4,8 % anual durante cinco años. ¿Cuánto tendrá al final de ese periodo?

Tendrá $24\,000 \cdot (1{,}048)^5 \approx 30\,340{,}15$ €.

7. ¿En cuánto se transforman 24 000 € durante 5 años al 4,8 % anual, si los periodos de capitalización son mensuales?

4,8 : 12 = 0,4. Un 4,8 % anual significa un 0,4% mensual.

Como en 5 años hay $5 \cdot 12 = 60$ meses:

$$C_F = 24\,000 \cdot (1{,}004)^{60} \approx 30\,495{,}38 \text{ €}$$

8. Colocando en un banco 10 000 € durante cinco años, se convierten en 13 000 €.

a) ¿Qué interés paga el banco?

b) ¿Qué cantidad se habría retirado si los periodos de capitalización hubieran sido mensuales?

a) Llamando x al índice de variación anual:

$$10\,000 \cdot x^5 = 13\,000 \rightarrow x^5 = 13\,000 : 10\,000 \rightarrow x^5 = 1{,}3 \rightarrow x = \sqrt[5]{1{,}3} \approx 1{,}054$$

El banco pagaba un 5,4 % anual.

b) 5,4 : 12 = 0,45

Un 5,4 % anual significa un 0,45 % mensual. En 5 años hay $5 \cdot 12 = 60$ meses.

$$C_F = 10\,000 \cdot 1{,}0045^{60} \approx 13\,092 \text{ €}$$

Si los periodos de capitalización hubieran sido mensuales, la cantidad que se habría retirado tras cinco años habría sido 13 092 €.

6 Otros problemas aritméticos

Página 61

1. Si mezclamos 12 kg de café de 12,40 €/kg con 8 kg de café de 7,40 €/kg, ¿cuál será el precio de la mezcla?

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ A	12 kg	12,40 €/kg	12 · 12,40 = 148,8 €
CAFÉ B	8 kg	7,40 €/kg	8 · 7,40 = 59,2 €
MEZCLA	20 kg		208 €

Precio de la mezcla = $\frac{\text{COSTE TOTAL}}{\text{CANTIDAD TOTAL}} = \frac{208}{20} = 10,40$ €/kg

2. Si mezclamos un lingote de 3 500 g con un 80 % de oro con otro lingote de 1 500 g con un 95 % de oro, ¿qué proporción de oro habrá en el lingote resultante?

- El lingote resultante pesará 3 500 g + 1 500 g = 5 000 g.
- En el primer lingote hay 0,8 · 3 500 = 2 800 g de oro.

  En el segundo lingote hay 0,95 · 1 500 = 1 425 g de oro.

  En el lingote resultante hay 2 800 + 1 425 = 4 225 g de oro.
- La proporción de oro en el lingote final será: $\frac{4\,225}{5\,000} = 0,845 \rightarrow 84,5\,\%$

3. Un barril contiene 1 *hl* de vino de alta graduación, cotizado a 3,60 €/*l*. Para rebajar el grado alcohólico, se le añaden 20 litros de agua. ¿Cuál es ahora el precio del vino?

- Tenemos 100 + 20 = 120 *l* de "vino aguado".
- Suponiendo que el agua es gratis, el precio total de la mezcla será el mismo que el del vino; es decir: 100 · 3,60 = 360 €.
- Por tanto, el precio del vino aguado será: $\frac{360\ €}{120\ l} = 3\ €/l$

4. ¿Qué cantidad de café superior, a 15 €/kg, hay que mezclar con 100 kilos de otro café, de peor calidad, a 9,50 €/kg, para que la mezcla resulte a 12,50 €/kg?

(Da el resultado con un error menor de 100 g).

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ SUPERIOR	x	15 €/kg	$15x$
CAFÉ INFERIOR	100	9,50 €/kg	9,50 · 100 = 950
MEZCLA	$100 + x$	12,50 €/kg	$12,50 \cdot (100 + x)$

Coste café superior + Coste café inferior = Coste mezcla

$$15x + 950 = 12,50 \cdot (100 + x) \rightarrow 15x + 950 = 1\,250 + 12,50x$$

$$2,5x = 300 \rightarrow x = \frac{300}{2,5} \rightarrow x = 120 \text{ kg}$$

Hay que mezclar 120 kg de café superior.

5. Se mezcla un barril de vino, que se vende a 7,40 € la cántara, con tres barriles de otro vino, que se vende a 5,20 € la cántara.

¿A cómo se ha de vender la cántara de la mezcla para obtener el mismo rendimiento que vendiéndolos por separado?

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
PRIMER VINO	1	7,40 €/cántara	1 · 7,40 = 7,40 €
SEGUNDO VINO	3	5,20 €/cántara	3 · 5,20 = 15,60 €
MEZCLA	4	x	7,40 + 15,60 = 23 €

Precio de la mezcla = $\dfrac{\text{COSTE TOTAL}}{\text{CANTIDAD TOTAL}} = \dfrac{23}{4}$ = 5,75 €/cántara

Se debe vender a 5,75 €.

6. Un litro de agua pesa 999,2 g, y un litro de alcohol, 794,7 g. ¿Cuál es el peso de un litro de la disolución obtenida al mezclar 3 *l* de agua con 7 *l* de alcohol?

En total, tenemos 10 *l* de mezcla.

Los 3 *l* de agua pesan 3 · 999,2 = 2 997,6 g.

Los 7 *l* de alcohol pesan 7 · 794,7 = 5 562,9 g.

La mezcla, en total, pesa 2 997,6 + 5 562,9 = 8 560,5 g.

Por tanto, el peso por litro de la disolución será: $\dfrac{8\,560,5 \text{ g}}{10\ l}$ = 856,05 g/*l*

7. Un joyero quiere fundir un lingote de 2 kg de oro de ley 0,85 con otro lingote de 1,5 kg de oro y cuya ley es 0,9. ¿Cuál es la ley del lingote resultante?

(La ley de una aleación es el cociente entre el peso del metal precioso y el peso total de la aleación).

El lingote resultante pesará 2 + 1,5 = 3,5 kg.

El primer lingote contiene 0,85 · 2 = 1,7 kg de oro.

El segundo lingote contiene 0,9 · 1,5 = 1,35 kg de oro.

El lingote resultante contiene 1,7 + 1,35 = 3,05 kg de oro.

La ley del lingote final será: $\dfrac{3,05}{3,5} \approx 0,87$

Página 62

8. Un coche va a 120 km/h y un camión a 90 km/h.

a) Si el coche sigue al camión a 75 km de distancia, ¿cuánto tardará en alcanzarlo?

b) Si están a 504 km y se dirigen uno hacia el otro, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

a) El coche se aproxima al camión a una velocidad de $120 - 90 = 30$ km/h.

Por tanto, en salvar los 75 km que les separan, tardará: $\frac{75}{30} = 2{,}5$ h.

b) Ahora, el coche y el camión se aproximan a $120 + 90 = 210$ km/h.

Por tanto, tardarán en cruzarse: $\frac{504}{210} = 2{,}4$ h.

9. Dos poblaciones A y B distan 240 km. A las nueve de la mañana sale de A hacia B un camión a una velocidad de 70 km/h. Simultáneamente, un coche sale de B hacia A a 110 km/h. ¿A qué hora se cruzan?

El camión y el coche se aproximan, el uno al otro, a razón de:

$$70 + 110 = 180 \text{ km/h}$$

El tiempo en encontrarse será:

$$t = \frac{\text{Distancia que los separa}}{\text{Velocidad a la que se acercan}} = \frac{240}{180} = \frac{4}{3} \text{ hora} = 1 \text{ h } 20 \text{ min.}$$

10. Un ciclista profesional avanza por una carretera a una velocidad de 38 km/h. Más adelante, a 22 km, un cicloturista avanza en la misma dirección a 14 km/h. ¿Cuánto tarda el uno en alcanzar al otro?

El ciclista profesional se aproxima al cicloturista a razón de:

$$38 - 14 = 24 \text{ km/h}$$

El tiempo hasta el encuentro será:

$$t = \frac{\text{Distancia que los separa}}{\text{Velocidad a la que se acercan}} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12} \text{ hora} = 55 \text{ minutos}$$

11. Unos delincuentes roban un coche y, creyéndose a salvo, se alejan tranquilamente por la autopista a 120 km/h. Sin embargo, un testigo avisa a la policía, que sale en su persecución cinco minutos después y tarda otros doce minutos en darles alcance. ¿A qué velocidad iba la policía?

- Delincuentes:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Velocidad} = 120 \text{ km/h} \\ \text{tiempo} = 5 \text{ min} + 12 \text{ min} = 17 \text{ min} = \frac{17}{60} \text{ h}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Distancia} = 120 \cdot \frac{17}{60} = 34 \text{ km}$$

- Cuando la policía da alcance a los delincuentes también ha recorrido 34 km pero en 12 minutos $\rightarrow \frac{12}{60}$ h $= 0{,}2$ h.

- Policía:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Distancia} = 34 \text{ km} \\ \text{tiempo} = 0{,}2 \text{ h}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Velocidad} = \frac{34}{0{,}2} = 170 \text{ km/h}$$

La policía iba a 170 km/h.

12. **Julián y Cristina viven a una distancia de 3,2 km. Julián telefonea a Cristina y acuerdan salir de inmediato uno al encuentro del otro.**

Julián lo hace a pie, al ritmo de 70 metros por minuto. Cristina sale en bici y el encuentro se produce en 10 minutos. ¿A qué velocidad avanzaba Cristina?

- Julián:

$$\left.\begin{array}{l}\text{velocidad} = 70 \text{ m/min}\\ \text{tiempo} = 10 \text{ min}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Distancia recorrida} = 70 \cdot 10 = 700 \text{ m}$$

- Hasta que se encuentran Julián ha recorrido 700 m, por tanto, Cristina ha recorrido el resto de la distancia que los separaba:

$$3\,200 \text{ m} - 700 \text{ m} = 2\,500 \text{ m}$$

- Cristina:

$$\left.\begin{array}{l}\text{distancia recorrida} = 2\,500 \text{ m}\\ \text{tiempo} = 10 \text{ min}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Velocidad} = \frac{2\,500}{10} = 250 \text{ m/min}$$

Cristina avanzaba a 250 m/min.

Página 63

13. Dos grifos, A y B, abastecen un depósito de agua. Abriendo el primero, el depósito se llena en 5 horas, y abriendo el segundo, en 7 horas.

¿Cuánto tarda en llenarse el depósito si se abren los dos?

- El grifo A llena $\frac{1}{5}$ del depósito en una hora.
- El grifo B llena $\frac{1}{7}$ del depósito en una hora.
- A y B juntos llenan $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35}$ del depósito en una hora.
- A y B llenan juntos el depósito en $\frac{35}{12}$ de hora = 2 h 55 min.

14. Un depósito dispone de dos grifos de abastecimiento. Abriendo el primero, se llena en 3 horas, y abriendo los dos se llena en 2 horas.

¿Cuánto tarda en llenarse el depósito si se abre solo el segundo?

- El primer grifo llena $\frac{1}{3}$ del depósito en una hora.
- Los dos grifos juntos llenan $\frac{1}{2}$ del depósito en una hora.
- El segundo grifo llena $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ del depósito en una hora.
- El segundo grifo llenará el depósito en 6 horas.

15. El embalse que abastece de agua a una ciudad, A, tiene reservas para 8 meses. Por un problema temporal, debe prestar servicio, también, a una ciudad vecina, B, con lo que se calcula que las reservas, para ambas ciudades, se reducen a 5 meses.

¿Cuánto tiempo podría asegurar el abastecimiento en exclusiva de la ciudad B?

- La ciudad A consume $\frac{1}{8}$ del embalse cada mes.
- A y B consumen $\frac{1}{5}$ del embalse cada mes.
- La ciudad B consume $\frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}$ del embalse en un mes.
- El embalse podría asegurar el abastecimiento de la ciudad B durante $\frac{40}{3}$ meses = 13 meses y 10 días (considerando que un mes tiene 30 días).

16. Una bañera dispone de un grifo de agua fría y otro de agua caliente. Abriendo solo el agua fría, se llena en 8 minutos, y abriendo la caliente, en 12 minutos. Dispone también de un desagüe que, cuando está llena, la vacía en 4 minutos.

a) ¿Cuánto tiempo tarda en llenarse si se abren los dos grifos a la vez para obtener agua templada?

b) ¿Qué ocurrirá si, estando vacía, se abren los dos grifos y se olvida colocar el tapón del desagüe?

a) El grifo de agua fría llena, en un minuto, $\frac{1}{8}$ de la bañera.

El grifo de agua caliente llena, en un minuto, $\frac{1}{12}$ de la bañera.

Los dos grifos juntos, en un minuto, llenan $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$ de la bañera.

Si se abren los dos grifos a la vez la bañera se llena en $\frac{24}{5}$ minutos = 4 minutos y 48 segundos.

b) Los dos grifos juntos, en un minuto, llenan $\frac{5}{24}$ de la bañera.

El desagüe, en un minuto, vacía $\frac{1}{4}$ de la bañera.

Como $\frac{5}{24} < \frac{1}{4}$, si se abren los dos grifos y se olvida colocar el tapón del desagüe, la bañera no se llenará nunca.

17. Un peatón ha tardado 35 minutos en el recorrido A-B. Un ciclista ha tardado14 minutos en el recorrido contrario, B-A. Si ambos han salido a la par:

a) ¿Cuánto han tardado en cruzarse?

b) ¿Qué fracción del recorrido ha cubierto cada uno?

a) El peatón recorre, cada minuto, $\frac{1}{35}$ de la distancia entre A y B.

El ciclista recorre, cada minuto, $\frac{1}{14}$ de la distancia entre B y A.

Los dos juntos recorren, cada minuto, $\frac{1}{35} + \frac{1}{14} = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$ de la distancia entre A y B, entonces el peatón y el ciclista tardan 10 minutos en cruzarse.

b) El peatón ha cubierto $\frac{10}{35} = \frac{2}{7}$ del recorrido y el ciclista $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$ del recorrido.

Ejercicios y problemas

Página 64

Practica

1. **Calcula mentalmente.**

a) 50 % de 360 **b) 25 % de 88** **c) 10 % de 1 375**

d) 20 % de 255 **e) 75 % de 800** **f) 30 % de 150**

a) 180 b) 22 c) 137,5

d) 51 e) 600 f) 45

2. **Calcula.**

a) 20 % de 1 240 **b) 12 % de 175**

c) 87 % de 4 000 **d) 95 % de 60**

e) 13 % de 2 400 **f) 7 % de 250**

g) 22 % de 1 353 **h) 5 % de 421**

a) $\frac{20 \cdot 1\,240}{100} = 248$ b) $\frac{12 \cdot 175}{100} = 21$

c) $\frac{87 \cdot 4\,000}{100} = 3\,480$ d) $\frac{95 \cdot 60}{100} = 57$

e) $\frac{13 \cdot 2\,400}{100} = 312$ f) $\frac{7 \cdot 250}{100} = 17,5$

g) $\frac{22 \cdot 1\,353}{100} = 297,66$ h) $\frac{5 \cdot 421}{100} = 21,05$

3. **Copia y completa en tu cuaderno.**

a) Para calcular el 12 %, se multiplica por 0,12.

b) Para calcular el 35 %**, se muliplica por 0,35.**

c) Para calcular el 5 %, se multiplica por 0,05.

d) Para calcular el 2 %**, se multiplica por 0,02.**

4. **Calcula el tanto por ciento que representa:**

a) 42 respecto de 200 **b) 45 respecto de 1 500** **c) 432 respecto de 960**

d) 117 respecto de 650 **e) 575 respecto de 2 500** **f) 195 respecto de 1 300**

g) 8 respecto de 50 **h) 75 respecto de 625**

a) $\frac{42}{100} \cdot 100 = 21\,\%$ b) $\frac{45}{1\,500} \cdot 100 = 3\,\%$ c) $\frac{432}{960} \cdot 100 = 45\,\%$

d) $\frac{117}{650} \cdot 100 = 18\,\%$ e) $\frac{575}{2\,500} \cdot 100 = 23\,\%$ f) $\frac{195}{1\,300} \cdot 100 = 15\,\%$

g) $\frac{8}{50} \cdot 100 = 16\,\%$ h) $\frac{75}{625} \cdot 100 = 12\,\%$

5. **¿Qué índice de variación corresponde a estos aumentos porcentuales?**

a) 8 % **b) 3 %** **c) 17 %** **d) 95 %** **e) 110 %**

a) I.V. = 1,08 b) I.V. = 1,03 c) I.V. = 1,17 d) I.V. = 1,95 e) I.V. = 2,10

6. **¿Qué índice de variación corresponde a estas disminuciones porcentuales?**

a) 96 % **b) 13 %** **c) 35 %** **d) 6 %** **e) 63 %**

a) I.V. = 0,04 b) I.V. = 0,87 c) I.V. = 0,65 d) I.V. = 0,94 e) I.V. = 0,37

7. **Piensa y completa en tu cuaderno.**

a) Al multiplicar por 1,3 se aumenta un 30 **%.**

b) Al multiplicar por 1,08 se aumenta un 8 **%.**

c) Al multiplicar por 0,90 se disminuye un 10 **%.**

d) Al multiplicar por 0,65 se disminuye un 35 **%.**

8. **Calcula el valor de x en cada caso.**

a) El 30 % de x es 21.

b) El 85 % de x es 187.

c) El 32 % de x es 384.

d) El 13 % de x es 97,24.

a) 30 % de $x = 21 \rightarrow 0{,}3 \cdot x = 21 \rightarrow x = 21 : 0{,}3 = 70$

b) 85 % de $x = 187 \rightarrow 0{,}85 \cdot x = 187 \rightarrow x = 187 : 0{,}85 = 220$

c) 32 % de $x = 384 \rightarrow 0{,}32 \cdot x = 384 \rightarrow x = 384 : 0{,}32 = 1\,200$

d) 13 % de $x = 97{,}24 \rightarrow 0{,}13 \cdot x = 97{,}24 \rightarrow x = 97{,}24 : 0{,}13 = 748$

9. **Expresa en un solo porcentaje.**

a) El 40 % del 20 %.

b) El 15 % del 30 %.

c) El 12,5 % del 80 %.

d) El 120 % del 10 %.

a) 8% b) 4,5% c) 10% d) 12%

Aplica lo aprendido

Problemas de proporcionalidad simple y compuesta

10. **Un coche consume 6,4 *l* de combustible cada 100 km. ¿Cuánto gasta en 300 km? ¿Y en 375 km?**

En 300 km gasta $6{,}4 \cdot 3 = 19{,}2$ *l*.

En 375 km gasta $6{,}4 \cdot 3{,}75 = 24$ *l*.

11. **Trabajando 8 horas al día, he tardado 5 días en poner el suelo de una vivienda. ¿Cuántos días habría tardado trabajando 10 horas diarias?**

El número de horas trabajadas al día es inversamente proporcional al número de días que se tarda en hacer un trabajo.

HORAS/DÍA	N.° DE DÍAS
8	5
10	x

I

$$\frac{8}{10} = \frac{x}{5} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 5}{10} = 4$$

Trabajando 10 horas al día, habría tardado 4 días.

12. **Un campesino ha obtenido una cosecha de 40 000 kilos de trigo de un campo que tiene una superficie de 2,5 hectáreas. ¿Qué cosecha puede esperar de un campo próximo de hectárea y media?**

La superficie de un campo y el número de kilos de trigo que se obtienen son magnitudes directamente proporcionales.

SUPERFICIE (ha)	TRIGO (kg)
2,5	40 000
1,5	x

D

$$\frac{2,5}{1,5} = \frac{40\,000}{x} \rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 40\,000}{2,5} = 24\,000$$

Puede esperar una cosecha de 24 000 kg.

13. **Un grifo con un caudal de 45 *l*/h llena un depósito en 8 horas. ¿Cuál debería ser el caudal para llenar la mitad del depósito en 6 horas?**

El grifo en 1 hora arroja 45 *l* $\rightarrow$ En 8 horas arrojará $45 \cdot 8 = 360$ *l*.

La mitad del depósito será $\frac{360\ l}{2} = 180\ l$.

Si se quiere llenar en 6 horas, el caudal será: $\frac{180\ l}{6\ \text{h}} = 30\ l/\text{h}$

14. **Una empresa ha cobrado 30 € por el alquiler de una máquina cortacésped durante 5 días. ¿Cuánto recibirá por el alquiler de dos cortacéspedes durante 4 días?**

El número de máquinas cortacéspedes y el número de días son directamente proporcionales al coste del alquiler.

N.° DE MÁQUINAS	N.° DE DÍAS	COSTE (€)
1	5	30
2	4	x

D

D

$$\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4} = \frac{30}{x} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 5} = 48$$

La empresa ha cobrado 48 € por el alquiler de 2 máquinas durante 4 días.

15. **Un taller fabrica en 10 días 1 600 chaquetas, trabajando 8 horas diarias. ¿Cuánto tardará en hacer 2 000 chaquetas trabajando 10 horas al día?**

El número de chaquetas que se han de confeccionar es directamente proporcional al número de días que se han de trabajar.

Sin embargo, el número de horas de trabajo al día es inversamente proporcional al número de días trabajados.

CHAQUETAS	HORAS/DÍA	N.º DE DÍAS
1 600	8	10
2 000	10	x

I

D

$$\frac{1\,600 \cdot 10}{2\,000 \cdot 8} = \frac{10}{x} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 2\,000 \cdot 8}{1\,600 \cdot 10} = 10$$

Tardará 10 días en hacer 2 000 chaquetas.

16. **Un pintor ha cobrado 480 € por cuatro jornadas de 8 horas. ¿Cuánto cobrarán dos pintores por tres jornadas de 10 horas?**

El número de pintores que trabajan y el número de jornadas trabajadas son directamente proporcionales al sueldo cobrado.

N.º DE PINTORES	JORNADAS	SUELDO
1	4	480
2	3	x

D

D

$$\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{480}{x} \rightarrow x = \frac{480 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 4} = 720$$

720 € es lo que cobrarían 2 pintores trabajando 3 jornadas de 8 h.

Por 3 jornadas de 1 h, 2 pintores cobrarían $\frac{720}{8} = 90$ €.

Por 3 jornadas de 10 h, 2 pintores cobrarían $90 \cdot 10 = 900$ €.

17. **Un tablero de 2,80 m × 1,20 m cuesta 42 €. ¿Cuánto costará otro tablero de 1,65 m × 0,80 m?**

LARGO DEL TABLERO (m)	ANCHO DEL TABLERO (m)	COSTE (€)
2,80	1,20	42
1,65	0,80	x

D

D

$$\frac{42}{x} = \frac{2,80}{1,65} \cdot \frac{1,20}{0,80} \rightarrow \frac{42}{x} = \frac{2,80 \cdot 1,20}{1,65 \cdot 0,80} \rightarrow x = \frac{42 \cdot 1,65 \cdot 0,80}{2,80 \cdot 1,20} = 16,50 \text{ €}$$

Un tablero de 1,65 m × 0,80 m costará 16,50 €.

Problemas de porcentajes

18. **Para comprar un piso de 180 000 €, se ha de pagar, además, un 8 % de IVA y 5 400 € de gastos de notaría y gestión. ¿Cuál es el gasto total?**

180 000 · 1,08 = 194 400

El gasto total es de 194 400 + 5 400 = 199 800 €.

19. **Un especulador compra 6 000 m^2 de terreno a 80 €/m^2. Un año después, vende 2 000 m^2 un 20 % más caro, y el resto, por un 25 % más de lo que le costó. ¿Cuál ha sido su ganancia?**

Precio pagado por el terreno = 6 000 · 80 = 480 000 €

Precio de venta:

2 000 m^2 un 20 % más caro $\rightarrow$ 1,20 · 80 = 96 €/m^2

Venta de 2 000 m^2 $\rightarrow$ 2 000 · 96 = 192 000 €

4 000 m^2 un 25 % más caro $\rightarrow$ 1,25 · 80 = 100 €/m^2

Venta de 4 000 m^2 $\rightarrow$ 4 000 · 100 = 400 000 €

Dinero total conseguido por la venta: 400 000 + 192 000 = 592 000 €

Ganancia = 592 000 – 480 000 = 112 000 €

La ganancia obtenida es de 112 000 €.

20. **De 1 232 hombres encuestados, 924 declaran que colaboran en las tareas del hogar. ¿Qué porcentaje de hombres dice trabajar en casa?**

De un total de 100 hombres, colaboran en las tareas del hogar x.

TOTAL	PARTE
1 232	924
100	x

$$\frac{1\,232}{100} = \frac{924}{x} \rightarrow x = \frac{924 \cdot 100}{1\,232} = 75$$

El 75 % de los hombres dice trabajar en casa.

Página 65

21. En un examen de Matemáticas han aprobado 22 estudiantes, lo que supone el 88 % del total de la clase. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

88 % del total = 22 estudiantes

Total · 0,88 = 22 → Total = 22 : 0,88 = 25

En la clase hay 25 estudiantes.

22. En la sesión de tarde de un teatro se han ocupado hoy 693 butacas, lo que supone el 77 % del total. ¿Cuál es el aforo del teatro?

El aforo es 693 : 0,77 = 900 plazas.

23. En una tienda se anuncian rebajas del 35 %.

a) ¿En cuánto se queda un jersey de 60 €?

b) ¿Cuánto costaba, sin rebaja, una camisa que se queda en 39 €?

a) Rebaja del 35 % → $I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$

$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow C_{\text{FINAL}} = 0{,}65 \cdot 60 = 39$ €

El jersey, con la rebaja, se queda en 39 €.

b) Del apartado anterior se deduce que la camisa, sin rebaja, costaba 60 €.

24. Paula ha pagado 76,50 € por un vestido que costaba 85 €. ¿Qué tanto por ciento le han rebajado?

PRECIO INICIAL (€)	PRECIO FINAL (€)
85	76,5
100	x

$$\frac{85}{100} = \frac{76{,}5}{x} \rightarrow x = \frac{76{,}5 \cdot 100}{85} = 90$$

En un artículo que hubiera costado 100 €, habría pagado 90 €, luego le han rebajado el 10 %.

25. A Irene le han subido el sueldo un 5 % y ahora gana 2 205 €. ¿Cuánto ganaba antes de la subida?

Subida del 5 % → $I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$

$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 2\,205 = 1{,}05 \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow$

$\rightarrow C_{\text{INICIAL}} = 2\,205 : 1{,}05 = 2\,100$ €

Antes de la subida Irene ganaba 2 100 €.

26. En las rebajas pagamos 344,40 € por un anorak rebajado un 18 %. ¿Cuál era el precio sin rebaja?

Rebaja del 18 % $\rightarrow$ $I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$

$$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 344{,}40 = 0{,}82 \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow C_{\text{INICIAL}} = 344{,}40 : 0{,}82 = 420 \text{ €}$$

El precio sin rebajar del anorak era de 420 €.

27. Una empresa automovilística ha exportado, durante este trimestre, 6 210 coches, frente a los 5 400 del trimestre pasado. ¿En qué porcentaje ha aumentado este trimestre respecto al anterior?

$$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 6\,210 = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot 5\,400 \rightarrow I_{\text{VARIACIÓN}} = 6\,210 : 5\,400 = 1{,}15$$

La exportación de coches ha aumentado un 15 % respecto al trimestre anterior.

28. El precio de la vivienda subió un 8 % hace dos años, un 15 % el año pasado y un 10 % este año. ¿Cuál ha sido el porcentaje total de subida?

El índice de variación en los últimos tres años será:

$$1{,}08 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}1 = 1{,}3662 \rightarrow 1{,}3662 - 1 = 0{,}3662$$

El porcentaje de subida es 36,62 %.

29. Un trabajador, que tenía un sueldo de 1 800 €, es ascendido a jefe de sección con un sueldo de 2 200 €. ¿En qué tanto por ciento ha mejorado el sueldo?

$$C_{\text{FINAL}} = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow 2\,200 = I_{\text{VARIACIÓN}} \cdot 1\,800 \rightarrow I_{\text{VARIACIÓN}} = 2\,200 : 1\,800 = 1{,}22$$

Su sueldo ha mejorado un 22 %.

Problemas de depósitos y préstamos

30. Se depositan 15 000 € al 2,5 % anual. Al acabar el año se saca todo el dinero, se añaden 10 000 € y se deposita todo en otro banco al 4 %. ¿Cuánto dinero habrá al acabar el segundo año?

Dinero al finalizar el primer año = 15 000 · 1,025 = 15 375 €

Añade otros 10 000 € $\rightarrow$ 15 375 + 10 000 = 25 375 €

Se depositan en otro banco al 4 % durante otro año $\rightarrow$ 25 375 · 1,04 = 26 390 €

Al acabar el segundo año habrá 26 390 €.

31. Un comerciante pide una prórroga de dos meses por una letra de 2 000 €, con unos intereses del 16 % anual. ¿Cuánto le cuesta la prórroga?

Si la prórroga fuera de un año, tendría que pagar como intereses de demora el 16 % de 2 000:

$$16\,\% \text{ de } 2\,000 = \frac{16 \cdot 2\,000}{100} = 320 \text{ €}$$

Como solo pide una prórroga de 2 meses (sexta parte del año), deberá pagar unos intereses de 320 : 6 = 53,33 €.

La prórroga le cuesta 53,33 €.

32. **Un comerciante pide una prórroga de 4 meses por una letra de 5 000 €, lo que le supone una penalización de 225 €. ¿A qué tanto por ciento le ponen los intereses de demora?**

i = interés cuatrimestral aplicado

$$5\,000 \cdot i = 225 \rightarrow i = 225 : 5\,000 = 0{,}045$$

Se le impone un 4,5 % de interés cuatrimestral por la demora.

Un 4,5 % en cuatro meses significa un 3 · 4,5 = 13,5 % al año.

Por tanto, le aplican un 13,5 % anual por los intereses de demora.

33. **Jorge tiene 24 000 €, y pacta mantener el dinero en un banco durante cinco años, cobrando los beneficios cada año, a un 6 % anual.**

¿Qué beneficio obtiene anualmente? ¿Y en los cinco años del acuerdo?

Dado que los beneficios los retira anualmente, el interés que pacta con el banco es simple.

Beneficio que obtiene en 1 año:

$$6\,\% \text{ de } 24\,000 = \frac{6 \cdot 24\,000}{100} = 1\,440 \text{ €}$$

Beneficio que obtiene en 5 años:

$$5 \cdot 1\,440 = 7\,200 \text{ €}$$

En 1 año obtiene un beneficio de 1 440 €, y en 5 años, 7 200 €.

34. **Tengo 28 500 € colocados al 4,25 % anual. Al terminar el año, sumo los intereses a lo que tenía y lo dejo en el banco con las mismas condiciones. ¿Qué cantidad tendré al cabo de cinco años?**

$C_F = 28\,500 \cdot 1{,}0425^5 = 35\,093{,}38$ €

35. **¿En cuánto se transforman 20 600 € durante 3 años al 6 % anual si los periodos de capitalización son mensuales?**

6 % anual significa 0,5% mensual (6 : 12 = 0,5).

En 3 años hay 36 meses. Por tanto:

$$\text{Capital final} = 20\,600 \cdot 1{,}005^{36} = 24\,651{,}62 \text{ €}$$

36. **Rosa y María colocan, cada una, 6 000 € al 4 % anual durante cuatro años. Rosa retira anualmente los beneficios obtenidos. María da orden de que los beneficios se sumen cada año al capital. ¿Cuál es la diferencia entre los beneficios obtenidos por cada una?**

Rosa negocia su capital bajo un interés simple:

$$\left.\begin{array}{l} C = 6\,000 \text{ €} \\ r = 4 \\ t = 4 \end{array}\right\} \text{Beneficio} \rightarrow I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{6\,000 \cdot 4 \cdot 4}{100} = 960 \text{ €}$$

María negocia su capital bajo un interés compuesto:

Capital final: $6\,000 \cdot 1{,}04^4 = 7\,019{,}15$ €

María gana: 7 019,15 – 6 000 = 1 019,15 €

María obtiene: 1 019,15 – 960 = 59,15 € más de beneficio que Rosa.

Problemas de repartos

37. **Se ha encargado a un orfebre el diseño y la fabricación de un trofeo que ha de pesar 5 kg y ha de estar fabricado con una aleación que contenga tres partes de oro, tres de plata y dos de cobre. ¿Qué cantidad se necesita de cada metal?**

Número total de partes = 3 + 3 + 2 = 8

Cantidad de metal en cada parte = $\frac{5}{8}$ = 0,625 kg

Cantidad de oro → 3 · 0,625 = 1,875 kg = 1 kg 875 g

Cantidad de plata → 3 · 0,625 = 1,875 kg = 1 kg 875 g

Cantidad de cobre → 2 · 0,625 = 1,25 kg = 1 kg 250 g

38. **Tres vecinos de una aldea alquilan una máquina motosierra durante 12 días. Juan la tiene 2 días; Pedro, 3 días; y Rufino, 7 días. El importe del alquiler asciende a 264 euros. ¿Cuánto debe pagar cada uno?**

Número total de días que se alquila la máquina = 12

Precio por día = $\frac{\text{Precio total}}{\text{N.º de días}} = \frac{264}{12} = 22$

Juan debe pagar → 2 · 22 = 44 €

Pedro debe pagar → 3 · 22 = 66 €

Rufino debe pagar → 7 · 22 = 154 €

39. **En un concurso de televisión se distribuyen 155 000 € entre los tres finalistas. El reparto se realiza en partes inversamente proporcionales al número de fallos cometidos durante la prueba:**

A: 3 fallos B: 5 fallos C: 2 fallos

¿Cuánto se lleva cada uno de los finalistas?

Repartir 155 000 € en partes inversamente proporcionales a 3, 5 y 2 es equivalente a repartir dicha cantidad en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{10 + 6 + 15}{30} = \frac{31}{30}$$

$$155\,000 : \frac{31}{30} = 150\,000$$

Finalista A (3 fallos) → $\frac{1}{3} \cdot 150\,000 = 50\,000$ €

Finalista B (5 fallos) → $\frac{1}{5} \cdot 150\,000 = 30\,000$ €

Finalista C (2 fallos) → $\frac{1}{2} \cdot 150\,000 = 75\,000$ €

Otros problemas aritméticos

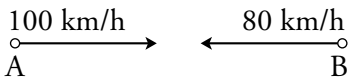
40. **Un fabricante de churros usa una mezcla de aceite que contiene dos partes de aceite de oliva por cada parte de aceite de girasol. Sabiendo que compra el de oliva a 3,40 €/litro y el de girasol a 1,60 €/litro, ¿a cómo le sale el litro de mezcla?**

	CANTIDAD (*l*)	PRECIO (€/*l*)	COSTE TOTAL (€)
ACEITE OLIVA	2	3,40	6,80
ACEITE GIRASOL	1	1,60	1,60
MEZCLA	3		8,40

$$\text{Precio de un litro de mezcla} = \frac{\text{Coste}}{\text{n.° de litros}} = \frac{8,40}{3} = 2,8\ €$$

Página 66

41. Dos poblaciones A y B distan 270 km. A las 12 de la mañana sale de A hacia B un coche que circula a 100 km/h. En el mismo instante, un coche sale de B hacia A circulando a 80 km/h. ¿A qué hora se cruzan?



Ambos vehículos se aproximan a la velocidad de 100 + 80 = 180 km/h.

A una velocidad de 180 km/h, el tiempo que tardan en recorrer los 270 km que separan

A de B es $t = \frac{e}{v} = \frac{270}{180} = 1{,}5$ h.

Por tanto, se cruzarán a las 13 horas y media (una y media de la tarde).

42. Un ciclista sale de un lugar a 18 km/h. Media hora más tarde sale en su persecución, desde el mismo lugar, otro ciclista a 22 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero?

Cuando sale el segundo ciclista, el primero, en media hora, lleva recorridos 9 km.

Los ciclistas se aproximan a 22 – 18 = 4 km/h.

Y 9 km, a una velocidad de 4 km/h se recorren en 2 horas y cuarto.

El segundo ciclista dará alcance al primero en 2 h 15 min.

43. Una furgoneta circula por una carretera a una velocidad de 70 km/h. Treinta kilómetros más atrás, avanza en el mismo sentido un turismo a 100 km/h.

Calcula el tiempo que tarda el turismo en alcanzar a la furgoneta y la distancia que recorre hasta lograrlo.

El turismo se aproxima a la furgoneta a razón de 100 – 70 = 30 km/h

El tiempo hasta que el turismo alcanza a la furgoneta es:

$$t = \frac{\text{Distancia que los separa}}{\text{Velocidad a la que se acerca}} = \frac{30}{30} = 1 \text{ hora}$$

Por tanto, el turismo tarda una hora en alcanzar a la furgoneta y, dado que su velocidad es de 100 km/h, habrá recorrido 100 km hasta lograrlo.

44. Dos manantiales vierten sus aguas en un depósito de 345 litros de capacidad. Si el caudal del primero es de 50 *l*/min, y el del segundo, 40 *l*/min, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el depósito?

El caudal de los dos manantiales será:

50 + 40 = 90 *l*/min.

Los dos manantiales juntos invertirán $\frac{345}{90} \approx 3{,}83$ minutos en llenar 345 *l*.

45. **El depósito de agua potable de cierta población se abastece del manantial del que siempre bebió el pueblo y de un pozo abierto recientemente, cuando aumentó la demanda. El manantial es capaz de llenar el depósito en 6 horas, y la bomba que extrae el agua del pozo, en 10 horas.**

¿En cuánto tiempo se llenará el depósito, actuando ambos recursos conjuntamente?

El manantial, en una hora, llena $\frac{1}{6}$ del depósito.

La bomba que extrae el agua del pozo, en una hora, llena $\frac{1}{10}$ del depósito.

Ambos recursos juntos llenan en una hora:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} \text{ del depósito}$$

Por tanto, el manantial y la bomba llenan el depósito en $\frac{15}{4}$ horas = 3 h 45 min

46. **Un depósito de riego se abastece de dos bombas que extraen agua de sendos pozos. La primera, funcionando en solitario, llena el depósito en 10 horas, pero cuando se ponen las dos en funcionamiento, se llena en 6 horas.**

¿Cuánto tiempo tardaría la segunda bomba, conectada en solitario?

La primera bomba llena, en una hora, $\frac{1}{10}$ del depósito.

Las dos bombas juntas llenan en una hora, $\frac{1}{6}$ del depósito.

La segunda bomba llena, en una hora:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \text{ del depósito.}$$

Por tanto, la segunda bomba conectada en solitario llenaría el depósito en 15 horas.

47. **Los autobuses que cubren el servicio entre dos urbanizaciones tardan 30 minutos en el recorrido A-B y 24 minutos en el recorrido contrario, B-A.**

¿Cuánto tardan en cruzarse dos autobuses que salen a la misma hora, para hacer los recorridos opuestos?

El primer autobús recorre, cada minuto, $\frac{1}{30}$ del recorrido A-B.

El segundo autobús recorre, cada minuto, $\frac{1}{24}$ del recorrido B-A.

Los dos juntos recorren, cada minuto:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{24} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40} \text{ del recorrido entre ambas urbanizaciones}$$

Por tanto, los autobuses tardan en cruzarse $\frac{40}{3}$ minutos = 13 minutos y 20 segundos.

Resuelve problemas

48. **Tres socios invierten en un negocio 272 000 €. El primero pone el 65 %; el segundo, el 20 %, y el tercero, el resto. Si a final de año han conseguido una rentabilidad del 8 % del capital invertido, ¿qué cantidad recibirá cada uno?**

La cantidad que obtienen es 272 000 · 1,08 = 293 760 €.

El primer socio recibe 293 760 · 0,65 = 190 944 €.

El segundo socio recibe 293 760 · 0,20 = 58 752 €.

El tercer socio recibe 293 760 · 0,15 = 44 064 €.

49. **Una carrera ciclista está dotada con un premio de 5 000 € para el ganador más otros 7 200 € a distribuir entre los cuatro siguientes, de forma que a cada uno se le asignará una cantidad inversamente proporcional al puesto conseguido en la carrera.**

¿Cuánto se llevará cada uno de esos cuatro?

Repartir 7 200 € en partes inversamente proporcionales a 2, 3, 4 y 5 es equivalente a repartir dicha cantidad en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{30 + 20 + 15 + 12}{60} = \frac{77}{60}$$

$$7\,200 : \frac{77}{60} = \frac{7\,200 \cdot 60}{77}$$

Al segundo clasificado le corresponden $\left(\frac{7\,200 \cdot 60}{77}\right) \cdot \frac{1}{2} = 2\,805{,}19$ €.

Al tercer clasificado le corresponden $\left(\frac{7\,200 \cdot 60}{77}\right) \cdot \frac{1}{3} = 1\,870{,}13$ €.

Al cuarto clasificado le corresponden $\left(\frac{7\,200 \cdot 60}{77}\right) \cdot \frac{1}{4} = 1\,402{,}60$ €.

Al quinto clasificado le corresponden $\left(\frac{7\,200 \cdot 60}{77}\right) \cdot \frac{1}{5} = 1\,122{,}08$ €.

50. **Un estudiante ocupa un piso de alquiler el día uno de septiembre con la idea de compartirlo con otros dos compañeros. El día 10 entra el segundo inquilino, y el día 25, el tercero.**

¿Cómo deben repartir ese primer mes el recibo del alquiler, que asciende a 605 €?

El primer estudiante ocupa el piso durante 30 días; el segundo, 21 días y el tercero, 6 días. Total, 57 días.

Precio por día = $\frac{605}{57} = 10{,}6$ €

El primer estudiante debe pagar 30 · 10,6 = 318 €.

El segundo estudiante debe pagar 21 · 10,6 = 222,6 ≈ 223 €.

El tercer estudiante debe pagar 6 · 10,6 = 63,6 ≈ 64 €.

51. **Un automóvil ha ido a 90 km/h durante 20 min y a 120 km/h durante los 10 min siguientes. ¿Cuál ha sido la velocidad media en ese tiempo?**

Calculamos el espacio que ha recorrido en cada periodo:

- Durante 20 minutos la velocidad ha sido de 90 km/h.

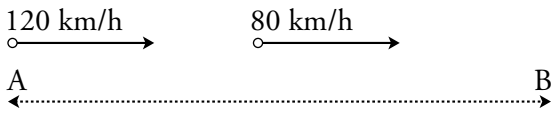
  El espacio que ha recorrido es de $\frac{90}{3}$ = 30 km (20 minutos es la tercera parte de 1 hora).

- Durante 10 minutos la velocidad ha sido de 120 km/h.

  En este tiempo ha recorrido $\frac{120}{6}$ = 20 km (10 minutos es la sexta parte de 1 hora).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Espacio total recorrido} = 30 + 20 = 50 \text{ km}\\ \text{Tiempo invertido} = 20 + 10 + 30 \text{ min} = 0,5 \text{ h}\end{array}\right\} \text{Velocidad media} = \frac{50}{0,5} = 100 \text{ km/h}$$

52. **Un camión sale de A hacia B a 80 km/h. Un cuarto de hora después sale un coche, en la misma dirección, a 120 km/h, llegando ambos a B simultáneamente. ¿Cuál es la distancia entre A y B?**



Ambos vehículos se aproximan a una velocidad de 120 – 80 = 40 km/h.

- Calculamos la distancia que lleva recorrida el camión cuando el coche sale:

  En 1 h recorre 80 km. En $\frac{1}{4}$ h recorre $\frac{80}{4}$ = 20 km.

- El tiempo en recorrer los 20 km que les separan, a una velocidad de 40 km/h es:

$$t = \frac{e}{v} \rightarrow t = \frac{20}{40} = 0,5 \text{ h}$$

El coche y el camión tardan media hora en encontrarse, momento que se produce al final del trayecto. Por tanto, el coche tarda 0,5 h en llegar a B a una velocidad de 120 km/h. Así, la distancia de A a B será de: e = 0,5 h · 120 km/h = 60 km.

53. **Un comerciante compra 30 sacos de 50 kilos de café a 10,50 €/kg y 15 sacos de 40 kilos de otro café, a 14 €/kg. Después, los mezcla y los envasa en bolsas de 400 gramos. ¿A cómo debe vender la bolsa si desea ganar 1,50 céntimos por cada kilo?**

El coste de lo que ha comprado es:

30 · 50 · 10,5 + 15 · 40 · 14 = 24 150 €

Ha comprado 30 · 50 + 15 · 40 = 2 100 kg de café.

Cada kilo de café le ha salido a:

24 150 : 2 100 = 11,50 €/kg

Envasándolos en bolsas de 400 g = 0,4 kg, emplea:

2 100 : 0,4 = 5 250 bolsas

Al venderlo, quiere obtener:

11,50 + 1,50 = 13 €/kg.

Es decir, quiere obtener, en total, 2 100 · 13 = 27 300 €.

Así, debe vender cada bolsa a 27 300 : 5 250 = 5,20 €.

54. **Para la fabricación de cierto refresco, se mezclan 200 litros de un concentrado de zumo de frutas, 50 litros de sirope y 250 litros de agua tratada.**

¿A cómo sale el litro de refresco, si el concentrado de zumo cuesta 2,50 €/*l*; el sirope, 1,50 €/*l*, y el tratamiento del agua sale a 100 € el metro cúbico?

$$\left.\begin{array}{l}\text{El coste del zumo es } 200 \cdot 2,5 = 500 \text{ €} \\ \text{El coste del sirope es } 50 \cdot 1,50 = 75 \text{ €} \\ \text{El coste del agua } (100 \text{ €/m}^3 = 0,1 \text{ €}/l) \text{ es } 250 \cdot 0,1 = 25 \text{ €}\end{array}\right\} \text{Total: } 600 \text{ €}$$

En la mezcla hay un total de 200 + 50 + 250 = 500 *l*.

El litro de refresco sale a 500 : 600 = 0,83 €.

55. **Ejercicio resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

Página 67

56. **Se mezclan 300 kg de pintura de 30 € el kilo con 200 kg de otra pintura más barata. De esta forma, la mezcla sale a 24 € el kilo.**

¿Cuál es el precio de la pintura barata?

	CANTIDAD (kg)	PRECIO (€/kg)	COSTE (€)
PINTURA BARATA	200	?	?
PINTURA CARA	300	30	9 000
MEZCLA	500	24	12 000

Para que el coste de la mezcla sea de 12 000 €, el coste de la pintura barata ha de ser:

$$12\,000 - 9\,000 = 3\,000 \text{ €}$$

El precio por kilo de la pintura barata será:

$$\frac{\text{Coste}}{\text{kilos}} = \frac{3\,000}{200} = 15 \text{ €}$$

57. **Se funde un collar de oro de 450 gramos y ley 0,95 junto con un brazalete, también de oro, de 300 gramos y ley 0,75.**

¿Cuál es la ley del oro resultante?

	PESO	LEY	PESO DE ORO
COLLAR	450 g	0,95	427,5 g
BRAZALETE	300	0,75	225 g
MEZCLA	750 g		652,5 g

$$\text{Ley de la mezcla} = \frac{652,5}{750} = 0,87$$

58. **El 34 % de los asistentes a un congreso sobre la paz son europeos; el 18 %, africanos; el 32 %, americanos, y el resto, asiáticos.**

Sabiendo que hay 51 europeos, ¿cuántos hay de cada uno de los demás continentes?

Llamamos x al número de asistentes al congreso.

$$34\,\% \text{ de } x = 51 \;\rightarrow\; 0,34 \cdot x = 51 \;\rightarrow\; x = 51 : 0,34 = 150$$

El número total de asistentes es de 150 personas.

Calculamos el número de africanos, americanos y asiáticos que hay:

Africanos $\rightarrow$ 18 % de 150 = 0,18 · 150 = 27

Americanos $\rightarrow$ 32 % de 150 = 0,32 · 150 = 48

Asiáticos $\rightarrow$ 150 – 27 – 48 – 51 = 24

Hay 27 africanos, 48 americanos y 24 asiáticos.

59. Celia ha comprado en las rebajas un jersey con un descuento del 15 % y una falda con un descuento del 20 %, y le han salido ambas prendas por el mismo precio.

Si en total se ha gastado 136 €, ¿cuánto se habría gastado si las hubiera comprado antes de las rebajas?

Se ha gastado 136 € y ambas prendas rebajadas le han salido por el mismo precio. Por tanto, el precio rebajado, tanto del jersey como de la falda, es de 68 €.

Jersey:

15 % de descuento $\rightarrow$ $I_{\text{VARIACIÓN}} = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

$68 = 0{,}85 \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow C_{\text{INICIAL}} = 68 : 0{,}85 = 80$ €

Antes de la rebaja, el jersey costaba 80 €.

Falda:

20 % de descuento $\rightarrow$ $I_{\text{VARIACIÓN}} = 0{,}80$

$68 = 0{,}80 \cdot C_{\text{INICIAL}} \rightarrow$ Precio sin rebajar $= 68 : 0{,}80 = 85$ €

Antes de la rebaja, la falda costaba 85 €.

Por tanto, si se hubiera comprado ambas prendas antes de la rebaja se habría gastado:

80 € + 85 € = 165 €

60. Una pareja, al pactar la compra de un piso, acuerda abonar como señal un 5 % del precio, un segundo pago del 65 % a la firma de las escrituras, y el resto en 12 mensualidades de 7 000 euros cada una.

¿Cuál es el precio del piso?

Señal $\rightarrow$ 5 % del precio del piso

Firma de escrituras $\rightarrow$ 65 % del precio del piso

Resto $\rightarrow$ $12 \cdot 7\,000 = 84\,000$, que corresponde al 30 % del valor del piso.

Llamando x al precio del piso:

30 % de $x = 84\,000 \rightarrow 0{,}3 \cdot x = 84\,000 \rightarrow x = 84\,000 : 0{,}3 \rightarrow x = 280\,000$

El precio del piso es de 280 000 €.

61. Se colocan 5 600 € en una cuenta bancaria, al 1,60 % anual, y se retiran al cabo de un año y tres meses.

a) ¿Qué cantidad se retirará si el periodo de capitalización es anual?

b) ¿Y si el periodo de capitalización es mensual?

c) ¿Cuál de las opciones es más beneficiosa?

a) $\left.\begin{array}{l} C = 5\,600 \text{ €} \\ r = 1{,}6\% \text{ anual} \\ t = 1 \text{ año y } 3 \text{ meses} = \dfrac{5}{4} \text{ años} = 1{,}25 \text{ años} \end{array}\right\}$ $C_F = 5\,600 \cdot (1 + 0{,}016)^{1{,}25}$

Se retirarán: $5\,600 \cdot 1{,}016^{1{,}25} = 5\,712{,}22$ €

b) $1{,}6 : 12 = 0{,}1\widehat{3} \rightarrow$ Un 1,6 % anual significa un $0{,}1\widehat{3}$ % mensual.

En un año y tres meses hay 15 meses.

Por tanto, $C_F = 5\,600 \cdot (1 + 0{,}001\widehat{3})^{15} = 5\,600 \cdot 1{,}001\widehat{3}^{\,15} = 5\,713{,}05$ €

c) La segunda opción es ligeramente más beneficiosa que la primera.

62. ¿En qué cantidad se convierte un euro, colocado al 5 % durante 25 años?

$$\left.\begin{array}{l} C = 1 \text{ €} \\ r = 5\% \text{ anual} \\ t = 25 \text{ años} \end{array}\right\} \quad C_F = 1 \cdot (1 + 0{,}05)^{25} = 1{,}05^{25} = 3{,}39 \text{ €}$$

Problemas "+"

63. Un camión ha tardado 3,5 h en el recorrido A-B entre dos ciudades. Un turismo, que salió a la misma hora, ha tardado 2,5 h en el recorrido contrario, B-A.

a) ¿Cuánto han tardado en cruzarse?

b) ¿Qué fracción del recorrido ha cubierto cada uno?

a)
- El camión ha tardado 3,5 h = $\frac{7}{2}$ h en el recorrido A-B, por tanto, el camión recorre cada hora $\frac{1}{7/2} = \frac{2}{7}$ de la distancia entre A y B.
- El turismo ha tardado 2,5 h = $\frac{5}{2}$ h en el recorrido B-A, por lo que el turismo recorre cada hora $\frac{1}{5/2} = \frac{2}{5}$ de la distancia entre B y A.
- Los dos juntos recorren, cada hora, $\frac{2}{7} + \frac{2}{5} = \frac{24}{35}$ de la distancia entre ambas ciudades.
- En conclusión, el camión y el turismo tardan en cruzarse $\frac{35}{24}$ horas = 1 h 27 min 30 s.

b) El camión ha cubierto $\frac{35}{24} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{12}$ del recorrido, y el turismo $\frac{35}{24} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{12}$ del recorrido.

64. Vicente ha pagado 1 003 € por un televisor que estaba rebajado un 15 %. Teniendo en cuenta que le han cargado un 18 % de IVA, ¿cuál era el precio de catálogo, sin rebaja ni IVA?

Llamamos x al precio del televisor en catálogo.

Se hace una rebaja del 15 % (se cobra el 85 %) y se aplica un 18 % de IVA. Por tanto:

$$x \cdot 0{,}85 \cdot 1{,}18 = 1\,003 \rightarrow x = 1\,000 \text{ €}$$

65. **Pablo colocó hace tiempo 48 000 € al 4 % en un banco, dando orden de acumular anualmente los intereses al capital. Si en la actualidad tiene 56 153,21 €, ¿cuántos años dura ya la inversión?**

Llamamos x al número de años que dura la inversión:

$$48\,000 \cdot (1{,}04)^x = 56\,153{,}21 \;\rightarrow\; (1{,}04)^x = 1{,}1699$$

Observamos que:

$$(1{,}04)^2 = 1{,}0816 \qquad (1{,}04)^3 = 1{,}124864 \qquad (1{,}04)^4 = 1{,}1699$$

Se obtiene $x = 4$ años.

66. **¿Cuántos años tarda en doblarse un capital colocado al 4 % anual?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Capital inicial} = C\\ \text{Capital final} = 2C\\ \text{Rédito} = 4\,\%\text{ anual}\end{array}\right\} \rightarrow 2C = C \cdot (1 + 0{,}04)^t = C \cdot 1{,}04^t \rightarrow \frac{2C}{C} = 1{,}04^t \rightarrow 2 = 1{,}04^t$$

Dando valores a t con la calculadora tenemos:

$t = 15 \rightarrow 1{,}04^{15} = 1{,}80$

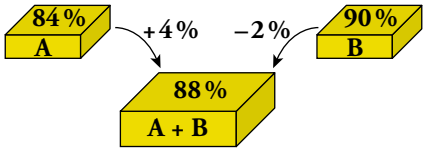
$t = 16 \rightarrow 1{,}04^{16} = 1{,}87$

$t = 17 \rightarrow 1{,}04^{17} = 1{,}95$

$t = 18 \rightarrow 1{,}04^{18} = 2{,}02$

Un capital colocado al 4 % anual tarda en doblarse, aproximadamente, 18 años.

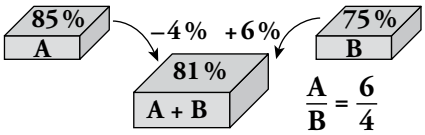
67. **Se funden dos lingotes, el primero con un 84 % de oro y el segundo con un 90 % de oro, formando un único bloque que tiene una riqueza del 88 %. Si el primero pesaba 1,5 kg, ¿cuál era el peso del segundo?**



El 4 % que "gana" A se compensa con el 2 % que "pierde" B. Por tanto, el peso de B debe ser doble que el de A.

B debe pesar el doble que A para que un +4% de A se compense con un –2% de B. Por tanto, B pesaba 3 kg.

68. **Se funden dos lingotes, el primero con un 85 % de plata y el segundo con un 75 %, formando un único bloque de 1,5 kg con una riqueza del 81 % de plata. ¿Cuál era el peso de los lingotes originales?**



Los pesos de A y B deben estar en la proporción $\frac{6}{4}$. Es decir, $A = \frac{6}{4}B = \frac{3}{2}B$.

$$A + B = 1{,}5 \rightarrow \frac{3}{2}B + B = 1{,}5 \rightarrow \frac{5}{2}B = 1{,}5 \rightarrow B = \frac{3}{5} = 0{,}6 \text{ kg}$$

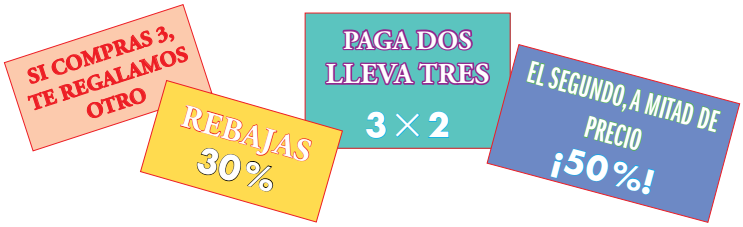
$A = 1{,}5 - 0{,}6 = 0{,}9$ kg

El primer bloque, A, pesaba 900 gramos y el segundo, B, 600 gramos.

Curiosidades matemáticas

El precio baja

Cuatro supermercados de un barrio compiten con sus rebajas.



¿Cuál de las cuatro tiendas hace una rebaja mayor?

PAGA DOS LLEVA TRES 3 × 2 $\rightarrow$ Pagas $\frac{2}{3} = 0,\widehat{6} \rightarrow 66,\widehat{6}\ \%$

EL SEGUNDO, A MITAD DE PRECIO ¡50%! $\rightarrow$ Pagas $\frac{1,5}{2} = 0,75\ \%$

REBAJAS 30% $\rightarrow$ Pagas 70 %

SI COMPRAS 3, TE REGALAMOS OTRO $\rightarrow$ Pagas $\frac{3}{4} = 0,75 \rightarrow 75\ \%$

La primera tienda es la que hace mayor rebaja.