1 Importancia del sistema de numeración decimal

Página 25

Ejemplo

- **La tabla recoge la población estimada al 01/01/2016 de los tres países del mundo con mayor número de habitantes:**

PAÍS	N.° DE HABITANTES
China	1 374 198 000
India	1 310 214 000
EE.UU.	322 439 000

a) Escribe cómo se lee: ¿Cuántos habitantes tiene EE.UU.?

b) ¿Qué país tiene más habitantes, India o China? ¿Cuántos más?

c) Redondea a la centena de millón las poblaciones de China, India y EE.UU.

- **Variación mensual del índice de paro en cierta comunidad autónoma:**

Marzo → 1,089 % Abril → –1,11 %

d) ¿En cuál de esos meses el paro sufrió mayor variación?

e) ¿En qué mes subió más el paro?

f) ¿Cuál es la diferencia entre la variación de marzo y la de abril?

- **Estas dos cantidades corresponden a la masa de la Tierra (T) y de un átomo de hidrógeno (H). Ambas están expresadas con todas sus cifras y en notación abreviada:**

$$T \to 5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ kg} = 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$H \to 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,660 \text{ kg} = 1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ kg}$$

g) ¿Cuál de las dos notaciones te parece más adecuada para esta clase de números? Explica por qué.

- a) Trescientos veintidós millones cuatrocientos treinta y nueve mil habitantes.

  b) Tiene más habitantes China. 63 984 000 habitantes más.

  c) China → 1 400 000 000

  India → 1 300 000 000

  E.E.U.U. → 300 000 000

- d) Sufrió más variación en abril.

  e) Subió más el paro en marzo.

  f) La diferencia de variación es del 2,199 %

- g) La notación abreviada, puesto que es la más adecuada para números muy grandes y números muy pequeños por ser más práctica y manejable.

2 Tipos de números decimales

Página 26

1. Pasa a forma decimal.

a) $\frac{5}{6}$ **b)** $\frac{3}{16}$ **c)** $\sqrt{2}$

d) $\frac{7}{22}$ **e)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

a) $0,8\widehat{3}$ b) $0,1875$ c) $1,142135\ldots$

d) $0,3\widehat{18}$ e) $0,8755\ldots$

2. ¿Qué puedes decir de cada correspondiente decimal?

a) $\frac{5}{9}$ **b)** $\frac{4}{9}$

c) $\frac{5}{9}-\frac{4}{9}$ **d)** $\frac{5}{9}+\frac{4}{9}$

a) $0,\widehat{5}$ → Periódico puro b) $0,\widehat{4}$ → Periódico puro

c) $0,\widehat{1}$ → Periódico puro d) 1 → Exacto

3. En el problema que se propone a continuación, sustituye m y p por números enteros para obtener, en cada caso, un decimal exacto, otro periódico puro y otro periódico mixto:

Un caminante avanza m metros en p pasos.

¿Cuántos metros avanza en cada paso?

Decimal exacto: $m = 18$ metros; $p = 4$ pasos

En cada paso avanza $\frac{18}{4} = 4,5$ metros.

Periódico puro: $m = 10$ metros; $p = 3$ pasos

En cada paso avanza $\frac{10}{3} = 3,\widehat{3}$ metros.

Periódico mixto: $m = 13$ metros; $p = 15$ pasos

En cada paso avanza $\frac{13}{15} = 0,8\widehat{6}$ metros.

3 De decimal a fracción

Página 27

1. Completa el proceso para expresar como fracción el número A.

$$A = 0,48\overset{\frown}{5}\left\{\begin{array}{l} 1\,000 \cdot A = 485,555\ldots \\ \underline{-100 \cdot A = -48,555\ldots} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} 1\,000 \cdot A &=& 485,555\ldots \\ -100 \cdot A &=& -48,555\ldots \\ \hline 900 \cdot A &=& 437 \end{array} \qquad \text{Luego } A = \frac{437}{900}$$

2. Identifica cuáles de los números siguientes son racionales y halla la fracción que les corresponde:

a) $6,78$

b) $6,\overset{\frown}{78}$

c) $6,7\overset{\frown}{8}$

d) $3,101001000100001\ldots$

e) $0,00\overset{\frown}{4}$

f) $\pi = 3,14159265359\ldots$

g) $0,\overset{\frown}{004}$

Son racionales a), b), c), e) y g).

a) $6,78 = \frac{678}{100} = \frac{339}{50}$

b) $N = 6,\overset{\frown}{78} \rightarrow \begin{array}{rcl} 100N &=& 678,\overset{\frown}{78} \\ -N &=& -6,\overset{\frown}{78} \\ \hline 99N &=& 672 \end{array}$ Luego $N = \frac{672}{99} = \frac{224}{33}$

c) $N = 6,7\overset{\frown}{8} \rightarrow \begin{array}{rcl} 100N &=& 678,\overset{\frown}{8} \\ -10N &=& -67,\overset{\frown}{8} \\ \hline 90N &=& 611 \end{array}$ Luego $N = \frac{611}{90}$

d) No es racional.

e) $N = 0,00\overset{\frown}{4} \rightarrow \begin{array}{rcl} 1\,000N &=& 4,\overset{\frown}{4} \\ -100N &=& -0,\overset{\frown}{4} \\ \hline 900N &=& 4 \end{array}$ Luego $N = \frac{4}{900} = \frac{1}{225}$

f) No es racional.

g) $N = 0,\overset{\frown}{004} \rightarrow \begin{array}{rcl} 1\,000N &=& 4,\overset{\frown}{004} \\ -N &=& -0,\overset{\frown}{004} \\ \hline 999N &=& 4 \end{array}$ Luego $N = \frac{4}{999}$

3. **En la información nutricional de las mermeladas de cierta marca, figuran los siguientes contenidos en azúcar por kilo de producto:**

CIRUELA: 0,240 kg **FRESA: $0,\overset{\frown}{4}$ kg**

MELOCOTÓN: $0,\overset{\frown}{36}$ kg **NARANJA: $0,3\overset{\frown}{6}$ kg**

Indica, con una fracción, el contenido en azúcar de cada clase de mermelada.

CIRUELA: $0{,}240 \text{ kg} = \dfrac{240}{1000} = \dfrac{6}{25} \text{ kg}$

FRESA: $0,\overset{\frown}{4} \text{ kg} = \dfrac{4}{9}$

$$N = 0,\overset{\frown}{4} \rightarrow \begin{array}{r@{\;=\;}r} 10N & 4,\overset{\frown}{4} \\ -N & -0,\overset{\frown}{4} \\ \hline 9N & 4 \end{array}$$

MELOCOTÓN: $0,\overset{\frown}{36} \text{ kg} = \dfrac{36}{99} = \dfrac{4}{11}$

$$N = 0,\overset{\frown}{36} \rightarrow \begin{array}{r@{\;=\;}r} 100N & 36,\overset{\frown}{36} \\ -N & -0,\overset{\frown}{36} \\ \hline 99N & 36 \end{array}$$

NARANJA: $0,3\overset{\frown}{6} \text{ kg} = \dfrac{33}{90} = \dfrac{11}{30}$

$$N = 0,3\overset{\frown}{6} \rightarrow \begin{array}{r@{\;=\;}r} 100N & 36,\overset{\frown}{6} \\ -10N & -3,\overset{\frown}{6} \\ \hline 90N & 33 \end{array}$$

4 Utilización de cantidades aproximadas

Página 28

1. Aproxima, con un número adecuado de cifras significativas, las siguientes cantidades:

a) Superficie de la Península Ibérica: 583 254 km^2.

b) Media de visitas semanales a la página web de una empresa de venta de casas: 13 585.

c) Número de granos en un kilo de arroz: 11 892 583.

d) Número de turistas llegados a cierta localidad costera en el mes de agosto: 87 721.

e) Cantidad de leche en cada uno de los 6 vasos entre los que se ha distribuido una botella de litro.

f) Peso de cada una de las 12 cadenetas fabricadas con un kilo de oro.

a) La cantidad se puede dar con todas sus cifras: 583 254 km^2

Para simplificar se puede decir que la superficie es de 580 000 km^2.

b) 14 000 visitas semanales de media.

c) 12 000 000 granos de arroz.

d) 90 000 turistas.

e) Cada vaso contiene, aproximadamente, 0,17 litros.

f) Aproximadamente 83 gramos.

Página 29

2. **¿Qué cota darías para el error absoluto, tomando las siguientes aproximaciones en el ejercicio resuelto?**

Trozo de cinta → 266,7 cm

Visitantes de un museo → 184 000

Manifestantes → 230 000

Trozo de cinta → ERROR ABSOLUTO < 0,05 cm

Visitantes de un museo → ERROR ABSOLUTO < 500

Manifestantes → ERROR ABSOLUTO < 5 000

3. **Da una cota del error absoluto en estos redondeos:**

23 483 215 → 23 000 000

0,0034826 → 0,0035

ERROR ABSOLUTO < 500 000

ERROR ABSOLUTO < 0,00005

4. **Da una cota del error absoluto en cada valoración de la actividad 1 de la página anterior.**

a) E.A. < 5 000

b) E.A. < 500

c) E.A. < 500 000

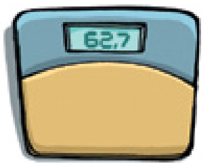
d) E.A. < 500

e) 0,005 *l*

f) 0,5 g

Página 30

5. **Berta compra una báscula de baño. En las explicaciones de funcionamiento trae el siguiente ejemplo:**

62,7 kg ≤  **< 62,8 kg**

a) ¿Con qué error absoluto trabaja la báscula?

b) La báscula marca para Berta 52,3 kg, y para su marido, 85,4 kg. Da una cota del error relativo para cada pesada.

a) E.A. < 0,05 kg

b) Berta: E.R. $< \dfrac{0,05}{52,3} = 9,56 \cdot 10^{-4}$

Marido: E.R. $< \dfrac{0,05}{85,4} = 5,84 \cdot 10^{-4}$

6. **Da una cota del error relativo en las valoraciones del ejercicio 4 de la página anterior.**

a) E.R. $< \dfrac{5\,000}{585\,000} = 8,54 \cdot 10^{-3}$

b) E.R. $< \dfrac{500}{13\,500} = 0,037$

c) E.R. $< \dfrac{500\,000}{11\,000\,000} = 0,045$

d) E.R. $< \dfrac{500}{85\,500} = 5,85 \cdot 10^{-3}$

e) E.R. $< \dfrac{0,005}{0,17} = 0,029$

f) E.R. $< \dfrac{0,5}{83} = 6,02 \cdot 10^{-3}$

7. **¿Verdadero o falso?**

a) El error relativo es siempre menor que uno.

b) Cuanto más pequeño sea el error absoluto, más fina es la medición.

c) Cuanto mayor sea el error relativo mayor es también la finura de la medición.

d) El error absoluto nunca es menor que el relativo.

a) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Falso.

d) Falso.

5 La notación científica

Página 31

1. Expresa con todas sus cifras.

a) $\mathbf{2{,}63 \cdot 10^8}$ **b)** $\mathbf{5{,}8 \cdot 10^{-7}}$

a) $2{,}63 \cdot 10^8 = 263\,000\,000$ b) $5{,}8 \cdot 10^{-7} = 0{,}00000058$

2. Pon en notación científica, con tres cifras significativas.

a) $\mathbf{262\,930\,080\,080\,000}$ **b)** $\mathbf{2\,361 \cdot 10^9}$

c) $\mathbf{0{,}000000001586}$ **d)** $\mathbf{0{,}256 \cdot 10^{-10}}$

a) $262\,930\,080\,080\,000 \approx 2{,}63 \cdot 10^{14}$ b) $2\,361 \cdot 10^9 \approx 2{,}36 \cdot 10^{12}$

c) $0{,}000000001586 \approx 1{,}59 \cdot 10^{-9}$ d) $0{,}256 \cdot 10^{-10} = 2{,}56 \cdot 10^{-11}$

3. Expresa en gramos, utilizando la notación científica.

a) La masa de la Tierra: 5 974 trillones de toneladas.

b) La masa de un electrón: $\mathbf{9{,}10 \cdot 10^{-31}}$ **kilos.**

a) $5{,}974 \cdot 10^{27}$ g (trillones, 10^{18}; mover la coma, 10^3; toneladas $\rightarrow$ g, 10^6)

b) $9{,}10 \cdot 10^{-28}$ g (kg $\rightarrow$ g, 10^3)

4. Considera el dato del ejemplo de arriba:

Población de China: 1 330 140 000 habitantes

Toma una aproximación con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo.

Aproximación: 1 330 000 000 habitantes.

ERROR ABSOLUTO < 5 000 000

ERROR RELATIVO $< \dfrac{5\,000\,000}{1\,330\,000\,000} = 3{,}76 \cdot 10^{-3}$

5. El volumen de la Tierra, aproximadamente, es:

$$\mathbf{1\,083\,210\,000\,000\ km^3}$$

Exprésalo en metros cúbicos, con tres cifras significativas, y da una cota del error absoluto y otra del error relativo.

$1{,}08 \cdot 10^{21}$

ERROR ABSOLUTO $< 5 \cdot 10^{18}$

ERROR RELATIVO $< \dfrac{5 \cdot 10^{18}}{1{,}08 \cdot 10^{21}} = 4{,}63 \cdot 10^{-3}$

Página 32

6. Calcula.

a) $2,25 \cdot 10^{15} - 3,44 \cdot 10^{14}$

b) $1,05 \cdot 10^{-9} + 1,8 \cdot 10^{-9}$

c) $1,8 \cdot 10^{11} \cdot 1,4 \cdot 10^{-4}$

d) $4,25 \cdot 10^{6} : 1,7 \cdot 10^{-9}$

e) $\dfrac{6,21 \cdot 10^{-7}}{4,60 \cdot 10^{6}}$

f) $\dfrac{9,5 \cdot 10^{7} - 3,4 \cdot 10^{8}}{4,1 \cdot 10^{11}}$

a) $2,25 \cdot 10^{15} - 0,344 \cdot 10^{15} = (2,25 - 0,344) \cdot 10^{15} = 1,906 \cdot 10^{15}$

b) $(1,05 + 1,8) \cdot 10^{-9} = 2,85 \cdot 10^{-9}$

c) $(1,8 \cdot 1,4) \cdot 10^{11-4} = 2,52 \cdot 10^{7}$

d) $(4,25 : 1,7) \cdot 10^{6-(-9)} = 2,5 \cdot 10^{15}$

e) $\dfrac{6,21}{4,60} \cdot 10^{-7-6} = 1,35 \cdot 10^{-13}$

f) $\dfrac{(0,95 - 3,4) \cdot 10^{8}}{4,1 \cdot 10^{11}} = \dfrac{-2,45 \cdot 10^{8}}{4,1 \cdot 10^{11}} = \dfrac{-2,45}{4,1} \cdot 10^{8-11} = -0,59 \cdot 10^{-3} = -5,9 \cdot 10^{-4}$

7. Busca los datos necesarios y calcula.

a) ¿Cuántas veces cabría la Luna dentro de la Tierra?

b) ¿Cuántas Lunas habría que juntar para conseguir la masa de la Tierra?

a) Volúmenes: Tierra = $1,0833 \cdot 10^{12}$ km^3 Luna = $2,199 \cdot 10^{10}$ km^3

$\dfrac{1,0833 \cdot 10^{12}}{2,199 \cdot 10^{10}} = 0,49 \cdot 10^2 = 49$ veces cabría la Luna dentro de la Tierra.

b) Masas: Tierra = $5,972 \cdot 10^{24}$ kg Luna = $7,349 \cdot 10^{22}$ kg

$\dfrac{5,972 \cdot 10^{24}}{7,349 \cdot 10^{22}} = 0,81 \cdot 10^2 = 81$ Lunas habría que juntar

8. Busca los datos necesarios y calcula.

Si explotara una estrella en Alfa Centauri, ¿cuánto tiempo tardaríamos en saberlo en la Tierra?

La estrella Alfa Centauri se encuentra a 4,5 años luz de la Tierra. La luz tardará entonces 4,5 años en llegar a la Tierra.

4,5 años = $4,5 \cdot 365,25$ días = $4,5 \cdot 365,25 \cdot 24$ h = $3,9 \cdot 10^4$ horas.

9. Calcula la masa, en gramos, de una molécula de agua con los datos siguientes:

— Masa molar del agua: 18 g/mol

— N.° de Avogadro: $6,022 \cdot 10^{23}$

(Busca información sobre el significado del número de Avogadro).

El número de Avogadro es el número de moléculas en un mol de una sustancia cualquiera.

Por tanto, en un mol de agua que pesa 18 g, hay $6,022 \cdot 10^{23}$ moléculas, por lo que cada una pesará:

$$\frac{18}{6,022 \cdot 10^{23}} = 2,99 \cdot 10^{-23} \text{ g}$$

Página 33

10. Halla con calculadora.

a) $\mathbf{1/300^5}$

b) $\mathbf{(3{,}145 \cdot 10^{-7}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{18})}$

c) $\mathbf{5{,}83 \cdot 10^9 + 6{,}932 \cdot 10^{12} - 7{,}5 \cdot 10^{10}}$

a) $\dfrac{1}{300^5} = \dfrac{1}{3^5 \cdot 100^5} = \dfrac{1}{243 \cdot 10^{10}} = \dfrac{1}{243} \cdot 10^{-10} \approx 0{,}00412 \cdot 10^{-10} = 4{,}12 \cdot 10^{-13}$

b) $(3{,}145 \cdot 10^{-7}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{18}) = (3{,}145 \cdot 2{,}5) \cdot 10^{11} = 7{,}863 \cdot 10^{11}$

c) $5{,}83 \cdot 10^9 + 6{,}932 \cdot 10^{12} - 7{,}5 \cdot 10^{10} = 0{,}00583 \cdot 10^{12} + 6{,}932 \cdot 10^{12} - 0{,}075 \cdot 10^{12} =$

$= (0{,}00583 + 6{,}932 - 0{,}075) \cdot 10^{12} = 6{,}863 \cdot 10^{12}$

Ejercicios y problemas

Página 34

Practica

Relación entre número decimal y fracción

1. **Calcula mentalmente el número decimal equivalente a cada fracción.**

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{8}{5}$ **d)** $\frac{17}{10}$

e) $\frac{15}{100}$ **f)** $\frac{45}{2}$ **g)** $\frac{7}{20}$ **h)** $\frac{31}{25}$

a) 0,75 b) 0,2 c) 1,6 d) 1,7

e) 0,15 f) 22,5 g) 0,35 h) 1,24

2. **Transforma en número decimal las siguientes fracciones:**

a) $\frac{121}{9}$ **b)** $\frac{753}{4}$ **c)** $\frac{1}{18}$ **d)** $\frac{2}{11}$ **e)** $\frac{49}{8}$

a) $13,\overset{\frown}{4}$ b) 188,25 c) $0,0\overset{\frown}{5}$ d) $0,\overset{\frown}{18}$ e) 6,125

3. **Clasifica los siguientes números racionales en decimales exactos y decimales periódicos:**

a) $\frac{13}{8}$ **b)** $\frac{139}{27}$ **c)** $\frac{25}{11}$

d) $\frac{9}{250}$ **e)** $\frac{131}{66}$ **f)** $\frac{223}{18}$

a) 1,625 b) $5,\overset{\frown}{148}$ c) $2,\overset{\frown}{27}$

d) 0,036 e) $1,9\overset{\frown}{84}$ f) $12,3\overset{\frown}{8}$

Son decimales exactos a) y d), y decimales periódicos, b), c), e) y f).

4. **Expresa en forma de fracción irreducible.**

a) $1,321$ **b)** $2,\overset{\frown}{4}$ **c)** $0,008$ **d)** $5,\overset{\frown}{54}$

e) $2,\overset{\frown}{35}$ **f)** $0,\overset{\frown}{036}$ **g)** $0,\overset{\frown}{945}$ **h)** $0,11\overset{\frown}{6}$

a) $1,321 = \frac{1321}{1000}$

b) $\left.\begin{array}{r} 10N = 24,444\ldots \\ N = 2,444\ldots \end{array}\right\}$ Restando: $10N - N = 22 \to 9N = 22 \to N = \frac{22}{9} \to 2,\overset{\frown}{4} = \frac{22}{9}$

c) $0,008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}$

d) $\left.\begin{array}{r} 100N = 554,545454\ldots \\ N = 5,545454\ldots \end{array}\right\}$ Restando: $100N - N = 549 \to N = \frac{549}{99} = \frac{61}{11} \to 5,\overset{\frown}{54} = \frac{61}{11}$

e) $\left.\begin{aligned} 100N &= 235,3535\ldots \\ N &= 2,3535\ldots \end{aligned}\right\}$ Restando: $100N - N = 233 \rightarrow N = \dfrac{233}{99} \rightarrow 2,\overset{\frown}{35} = \dfrac{233}{99}$

f) $\left.\begin{aligned} 1\,000N &= 36,3636\ldots \\ 10N &= 0,3636\ldots \end{aligned}\right\}$ Restando: $1\,000N - 10N = 36 \rightarrow N = \dfrac{36}{990} = \dfrac{2}{55}$

Por tanto: $0,0\overset{\frown}{36} = \dfrac{2}{55}$

g) $\left.\begin{aligned} 1\,000N &= 945,945945\ldots \\ N &= 0,945945\ldots \end{aligned}\right\}$ Restando: $1\,000N - N = 945 \rightarrow N = \dfrac{945}{999} = \dfrac{35}{37}$

Por tanto: $0,\overset{\frown}{945} = \dfrac{35}{37}$

h) $\left.\begin{aligned} 1\,000N &= 116,6666\ldots \\ 100N &= 11,6666\ldots \end{aligned}\right\}$ Restando: $1\,000N - 100N = 105 \rightarrow N = \dfrac{105}{900} = \dfrac{7}{60}$

Por tanto: $0,11\overset{\frown}{6} = \dfrac{7}{60}$

5. **Comprueba, pasando a fracción, que los siguientes números decimales corresponden a números enteros:**

$$1,\overset{\frown}{9};\quad 2,\overset{\frown}{9};\quad 7,\overset{\frown}{9};\quad 11,\overset{\frown}{9}$$

Observando el resultado obtenido, ¿qué número entero le corresponde a $126,\overset{\frown}{9}$?

- Llamamos: $N = 1,999\ldots \rightarrow 10N = 19,999\ldots$

  $10N - N = 19 - 1 \rightarrow 9N = 18 \rightarrow N = 2$

  Luego: $1,\overset{\frown}{9} = 2$
- Llamamos: $N = 2,99\ldots \rightarrow 10N = 29,99\ldots$

  $10N - N = 29 - 2 \rightarrow 9N = 27 \rightarrow N = 3$

  Luego: $2,\overset{\frown}{9} = 3$
- Llamamos: $N = 7,99\ldots \rightarrow 10N = 79,99\ldots$

  $10N - N = 79 - 7 \rightarrow 9N = 72 \rightarrow N = 8$

  Por tanto: $7,\overset{\frown}{9} = 8$
- Llamamos: $N = 11,99\ldots \rightarrow 10N = 119,99\ldots$

  $10N - N = 119 - 11 \rightarrow 9N = 108 \rightarrow N = 12$

  Luego: $11,\overset{\frown}{9} = 12$

A $126,\overset{\frown}{9}$, le corresponde el número entero 127.

6. **Ordena de menor a mayor.**

$$5,53;\quad 5,\overset{\frown}{53};\quad 5,5\overset{\frown}{3};\quad 5,5;\quad 5,56;\quad 5,\overset{\frown}{5}$$

$5,5 < 5,53 < 5,5\overset{\frown}{3} < 5,\overset{\frown}{53} < 5,\overset{\frown}{5} < 5,56$

7. **¿Cuáles de los siguientes números pueden expresarse como fracción?:**

$$3{,}45;\ 1{,}00\overset{\frown}{3};\ \sqrt{2};\ 2+\sqrt{5};\ \pi;\ 1{,}\overset{\frown}{117}$$

Escribe la fracción que representa a cada uno en los casos en que sea posible.

Se pueden expresar como fracción: $3{,}45$; $1{,}00\overset{\frown}{3}$ y $1{,}\overset{\frown}{142857}$

- $3{,}45 = \dfrac{345}{100} = \dfrac{69}{20}$
- $1{,}00\overset{\frown}{3}$

$$\left.\begin{array}{r} 1\,000N = 1003{,}333\ldots \\ 100N = 100{,}333\ldots \end{array}\right\}\ 1\,000N - 100N = 903 \to N = \frac{903}{900} = \frac{301}{300} \to 1{,}00\overset{\frown}{3} = \frac{301}{300}$$

- $1{,}\overset{\frown}{142857}$

$$\left.\begin{array}{r} 1\,000\,000N = 1142\,857{,}142857\ldots \\ N = 1{,}142857\ldots \end{array}\right\}\ 1\,000\,000N - N = 1\,142\,856 \to N = \frac{1142\,856}{999\,999} = \frac{8}{7}$$

$1{,}\overset{\frown}{142857} = \dfrac{8}{7}$

8. **Escribe, en cada caso, un decimal exacto y un decimal periódico comprendidos entre los números dados:**

a) $3{,}5$ **y** $3{,}6$ **b)** $3{,}\overset{\frown}{4}$ **y** $3{,}\overset{\frown}{5}$ **c)** $3{,}2\overset{\frown}{5}$ **y** $3{,}2\overset{\frown}{56}$

a) Exacto → 3,55 Periódico → $3{,}5\overset{\frown}{1}$

b) Exacto → 3,47 Periódico → $3{,}4\overset{\frown}{52}$

c) Exacto → 3,26 Periódico → $3{,}25\overset{\frown}{8}$

Números aproximados. Errores

9. **Aproxima a las centésimas.**

a) 0,318 **b)** 3,2414 **c)** 18,073

d) $\dfrac{100}{71}$ **e)** $\dfrac{25}{13}$ **f)** $\dfrac{65}{7}$

a) 0,32

b) 3,24

c) 18,07

d) $\dfrac{100}{71} = 1{,}4084507$ → la aproximación a las centésimas es 1,41

e) $\dfrac{25}{13} = 1{,}9230769$ → la aproximación a las centésimas es 1,92

f) $\dfrac{65}{7} = 9{,}2857142$ → la aproximación a las centésimas es 9,29

10. **Calcula:**

a) El error absoluto cometido en cada una de las aproximaciones realizadas en el ejercicio anterior.

b) Una cota del error relativo cometido en cada caso.

a) a) E. absoluto = |0,318 – 0,32| = 0,002 b) E. absoluto = |3,2414 – 3,24| = 0,0014

c) E. absoluto = |18,073 – 18,07| = 0,003 d) E. absoluto = $\left|\frac{100}{71} - 1,41\right| \approx 0,0015$

e) E. absoluto = $\left|\frac{25}{13} - 1,92\right| \approx 0,003$ f) E. absoluto = $\left|\frac{65}{7} - 9,29\right| \approx 0,004$

b) En todos los casos, al haber redondeado a las centésimas, el error absoluto es menor que 0,005.

a) Error relativo < $\frac{0,005}{0,318} < 0,016$ b) Error relativo < $\frac{0,005}{3,2414} < 0,002$

c) Error relativo < $\frac{0,005}{18,073} < 0,0003$ d) Error relativo < $\frac{0,005}{100/71} < 0,004$

e) Error relativo < $\frac{0,005}{25/13} < 0,003$ f) Error relativo < $\frac{0,005}{65/7} < 0,00054$

11. **Expresa con un número adecuado de cifras significativas.**

a) Audiencia de cierto programa de televisión: 3 017 849 espectadores.

b) Tamaño de un virus: 0,008375 mm.

c) Resultado de 15^7.

d) Precio de un coche: 18 753 €.

e) Presupuesto de un ayuntamiento: 987 245 €.

f) Porcentaje de votos de un candidato a delegado: 37,285 %.

g) Capacidad de un pantano: 3 733 827 000 *l*.

a) 3 000 000 espectadores. b) 0,008 mm

c) 15^7 = 170 859 375 → 170 000 000 d) 19 000 €

e) 1 000 000 € f) 37 %

g) 3 750 000 000 *l*

12. **Calcula, en cada uno de los apartados del ejercicio anterior, el error absoluto y el error relativo de las cantidades dadas como aproximaciones.**

a) Error absoluto = 17 849; Error relativo = $\frac{17\,849}{3\,017\,849} \approx 0,006$

b) Error absoluto = 0,000375; Error relativo = $\frac{0,000375}{0,008375} \approx 0,04$

c) Error absoluto = 859 375; Error relativo = $\frac{859\,375}{170\,859\,375} \approx 0,005$

d) Error absoluto = 247; Error relativo = $\frac{247}{18\,753} \approx 0,013$

e) Error absoluto = 12 755; Error relativo = $\frac{12\,755}{987\,245} \approx 0{,}013$

f) Error absoluto = 0,285; Error relativo = $\frac{0{,}285}{37{,}285} \approx 0{,}008$

g) Error absoluto = 16 173 000; Error relativo = $\frac{16\,173\,000}{3\,733\,827\,000} \approx 0{,}004$

13. **Indica, en cada caso, en cuál de las aproximaciones se comete menor error absoluto:**

a) $1{,}3\overset{\frown}{7} \approx$ **1,3** / **1,4**

b) $\frac{17}{6} \approx$ **2,8** / **2,9**

a) Si tomamos 1,3 como aproximación de 1,37 → Error absoluto = $|1{,}37 - 1{,}3| = 0{,}07$.

Si tomamos 1,4 → Error absoluto = $|1{,}37 - 1{,}4| = 0{,}03$.

Se comete menor error absoluto tomando 1,4 como valor aproximado.

b) Tomando 2,8 como aproximación → Error absoluto = $\left|\frac{17}{6} - 2{,}8\right| = 0{,}0\overset{\frown}{3}$.

Tomando 2,9 → Error absoluto = $\left|\frac{17}{6} - 2{,}9\right| = 0{,}0\overset{\frown}{6}$.

Hay menor error absoluto tomando 2,8 como aproximación.

Notación científica

14. **Expresa con una potencia de base 10.**

a) **1 000** **b)** **1 000 000** **c)** **1 000 000 000**

d) **0,001** **e)** **0,000001** **f)** **0,000000001**

a) 10^3 b) 10^6 c) 10^9

d) 10^{-3} e) 10^{-6} f) 10^{-9}

15. **Expresa con todas las cifras.**

a) $6{,}25 \cdot 10^8$ **b)** $2{,}7 \cdot 10^{-4}$ **c)** $3 \cdot 10^{-6}$

d) $5{,}18 \cdot 10^{14}$ **e)** $3{,}215 \cdot 10^{-9}$ **f)** $-4 \cdot 10^{-7}$

a) 625 000 000 b) 0,00027 c) 0,000003

d) 518 000 000 000 000 e) 0,000000003215 f) –0,0000004

16. **Escribe en notación científica.**

a) **4 230 000 000** **b)** **0,00000004**

c) **84 300** **d)** **0,000572**

a) $4{,}23 \cdot 10^9$ b) $4 \cdot 10^{-8}$

c) $8{,}43 \cdot 10^4$ d) $5{,}72 \cdot 10^{-4}$

Página 35

17. **Relaciona cada uno de estos números con la medida de una de las magnitudes indicadas debajo:**

Números: $5{,}97 \cdot 10^{21}$; $1{,}5 \cdot 10^{-1}$; $9{,}1 \cdot 10^{-31}$

Magnitudes:

Paso de un tornillo en milímetros.

Masa del electrón en kilogramos.

Masa de la Tierra en toneladas.

$5{,}97 \cdot 10^{21}$ → Masa de la Tierra en toneladas.

$1{,}5 \cdot 10^{-1}$ → Paso de un tornillo en milímetros.

$9{,}1 \cdot 10^{-31}$ → Masa del electrón en kilogramos.

18. **Expresa en notación científica.**

a) Recaudación de las quinielas en una jornada de liga de fútbol: 1 628 000 €.

b) Diámetro, en metros, de una punta de alfiler: 0,1 mm.

c) Presupuesto destinado a Sanidad: 525 miles de millones.

d) Diámetro de las células sanguíneas: 0,00075 mm.

a) $1{,}628 \cdot 10^6$ €

b) 10^{-1} mm $= 10^{-4}$ m

c) $525 \underbrace{\text{miles}}_{10^3} \text{ de } \underbrace{\text{millones}}_{10^6} = 525 \cdot 10^3 \cdot 10^6 = 525 \cdot 10^9 = 5{,}25 \cdot 10^{11}$ €

d) $7{,}5 \cdot 10^{-4}$ mm

19. **Reduce.**

a) $\dfrac{10^5 \cdot 10^2}{10^6}$ **b)** $\dfrac{10^2 \cdot 10^4}{10^8}$ **c)** $\dfrac{10^5 \cdot 10^7}{10^4 \cdot 10^8}$ **d)** $\dfrac{10^0 \cdot 10^1}{10^2 \cdot 10^3}$

a) $\dfrac{10^{5+2}}{10^6} = \dfrac{10^7}{10^6} = 10^{7-6} = 10$

b) $\dfrac{10^{2+4}}{10^8} = \dfrac{10^6}{10^8} = 10^{6-8} = 10^{-2}$

c) $\dfrac{10^{5+7}}{10^{4+8}} = \dfrac{10^{12}}{10^{12}} = 10^0 = 1$

d) $\dfrac{10^1}{10^5} = 10^{-4}$

20. **Calcula mentalmente:**

a) $(1{,}5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^5)$

b) $(3 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{-3})$

c) $(4 \cdot 10^{-12}) : (2 \cdot 10^{-4})$

d) $\sqrt{9 \cdot 10^4}$

e) $(2 \cdot 10^{-3})^3$

f) $\sqrt[3]{8 \cdot 10^{-6}}$

a) $(1{,}5 \cdot 2) \cdot 10^{7+5} = 3 \cdot 10^{12}$

b) $(3 : 2) \cdot 10^{6-(-3)} = 1{,}5 \cdot 10^9$

c) $(4 : 2) \cdot 10^{-12-(-4)} = 2 \cdot 10^{-8}$

d) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{10^4} = 3 \cdot 10^{4/2} = 3 \cdot 10^2$

e) $2^3 \cdot (10^{-3})^3 = 8 \cdot 10^{-9}$

f) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{10^{-6}} = 2 \cdot 10^{-6/3} = 2 \cdot 10^{-2}$

21. **Calcula con lápiz y papel, expresa el resultado en notación científica y compruébalo con la calculadora.**

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8)$ **b)** $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^5)$ **c)** $(1{,}2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6})$

d) $(6 \cdot 10^{-7})^2$ **e)** $\sqrt{121 \cdot 10^{-6}}$ **f)** $(5 \cdot 10^4)^3$

a) $(3{,}5 \cdot 4) \cdot 10^{7+8} = 14 \cdot 10^{15} = 1{,}4 \cdot 10^{16}$

b) $(5 \cdot 2{,}5) \cdot 10^{-8+5} = 12{,}5 \cdot 10^{-3} = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$

c) $(1{,}2 : 5) \cdot 10^{7-(-6)} = 0{,}24 \cdot 10^{13} = 2{,}4 \cdot 10^{12}$

d) $36 \cdot 10^{-14} = 3{,}6 \cdot 10^{-13}$

e) $11 \cdot 10^{-6/2} = 11 \cdot 10^{-3} = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$

f) $125 \cdot 10^{12} = 1{,}25 \cdot 10^{14}$

22. **Calcula utilizando la notación científica y comprueba, después, con la calculadora.**

a) $5{,}3 \cdot 10^8 - 3 \cdot 10^{10}$ **b)** $3 \cdot 10^{-5} + 8{,}2 \cdot 10^{-6}$

c) $3{,}1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$ **d)** $6 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-8}$

a) $5{,}3 \cdot 10^8 - 300 \cdot 10^8 = (5{,}3 - 300) \cdot 10^8 = -294{,}7 \cdot 10^8 = -2{,}947 \cdot 10^{10}$

b) $3 \cdot 10^{-5} + 0{,}82 \cdot 10^{-5} = (3 + 0{,}82) \cdot 10^{-5} = 3{,}82 \cdot 10^{-5}$

c) $310 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^{10} = (310 + 2) \cdot 10^{10} = 312 \cdot 10^{10} = 3{,}12 \cdot 10^{12}$

d) $0{,}6 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-8} = (0{,}6 - 5) \cdot 10^{-8} = -4{,}4 \cdot 10^{-8}$

23. **Expresa en notación científica y calcula.**

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^2$ **b)** $\dfrac{0{,}000541 \cdot 10\,318\,000}{1\,520\,000 \cdot 0{,}00302}$ **c)** $\dfrac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0{,}00003 - 0{,}00015}$

a) $(7{,}58 \cdot 10^4)^4 : (1{,}2 \cdot 10^4)^2 = [(7{,}58)^4 \cdot 10^{16}] : [(1{,}2)^2 \cdot 10^8] = \dfrac{(7{,}58)^4}{(1{,}2)^2} \cdot 10^{16-8} =$

$= 2\,292{,}52 \cdot 10^8 = 2{,}29252 \cdot 10^{11} \approx 2{,}29 \cdot 10^{11}$

b) $\dfrac{5{,}41 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}0318 \cdot 10^7}{1{,}52 \cdot 10^6 \cdot 3{,}02 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{(5{,}41 \cdot 1{,}0318) \cdot 10^3}{(1{,}52 \cdot 3{,}02) \cdot 10^3} = \dfrac{5{,}582038}{4{,}5904} \approx 1{,}216$

c) $\dfrac{2{,}7 \cdot 10^6 - 13 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{-5} - 15 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{(2{,}7 - 13) \cdot 10^6}{(3 - 15) \cdot 10^{-5}} = \dfrac{-10{,}3 \cdot 10^6}{-12 \cdot 10^{-5}} = 0{,}858\overset{\frown}{3} \cdot 10^{11}$

24. **Utiliza la calculadora para efectuar las siguientes operaciones y expresa el resultado con dos y con tres cifras significativas.**

a) $(4{,}5 \cdot 10^{12}) \cdot (8{,}37 \cdot 10^{-4})$ **b)** $(5{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot (3{,}25 \cdot 10^{-9})$

c) $(8{,}4 \cdot 10^{11}) : (3{,}2 \cdot 10^{-6})$ **d)** $(7{,}8 \cdot 10^{-7})^3$

a) $(4{,}5 \cdot 8{,}37) \cdot 10^{12-4} = 37{,}665 \cdot 10^8 \approx 3{,}7665 \cdot 10^9$

Con 3 cifras significativas $\rightarrow 3{,}77 \cdot 10^9$

Con 2 cifras significativas $\rightarrow 3{,}8 \cdot 10^9$

b) $(5{,}2 \cdot 3{,}25) \cdot 10^{-4-9} = 16{,}9 \cdot 10^{-13} = 1{,}69 \cdot 10^{-12} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-12}$

c) $(8{,}4 : 3{,}2) \cdot 10^{11-(-6)} = 2{,}625 \cdot 10^{17} \approx 2{,}63 \cdot 10^{17} \approx 2{,}6 \cdot 10^{17}$

d) $(7{,}8)^3 \cdot 10^{-7 \cdot 3} = 474{,}552 \cdot 10^{-21} = 4{,}74552 \cdot 10^{-19} \approx 4{,}75 \cdot 10^{-19} \approx 4{,}8 \cdot 10^{-19}$

25. **Calcula utilizando la notación científica. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto cometido en cada caso:**

a) $(7{,}5 \cdot 10^6) : (0{,}000086)$

b) $\dfrac{13\,000\,000 - 2\,700\,000}{0{,}00015 \cdot 0{,}00003}$

c) $328\,000\,000 \cdot (0{,}0006)^2$

d) $(45\,000)^2 - 85\,400\,000$

a) $(7{,}5 \cdot 10^6) : (8{,}6 \cdot 10^{-5}) = (7{,}5 : 8{,}6) \cdot 10^{6-(-5)} = 0{,}872093023 \cdot 10^{11} = 8{,}72093023 \cdot 10^{10}$

El resultado con tres cifras significativas es $8{,}72 \cdot 10^{10}$.

ERROR ABSOLUTO $< 5 \cdot 10^7$

b) $\dfrac{1{,}3 \cdot 10^7 - 0{,}27 \cdot 10^7}{15 \cdot 10^{-5} - 3 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{1{,}03 \cdot 10^7}{12 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{1{,}03 \cdot 10^7}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} = 0{,}858\overset{\frown}{3} \cdot 10^{11} = 8{,}58\overset{\frown}{3} \cdot 10^{10}$

Tomando tres cifras significativas, obtenemos $8{,}58 \cdot 10^{10}$.

ERROR ABSOLUTO $< 5 \cdot 10^7$

c) $3{,}28 \cdot 10^8 \cdot (6 \cdot 10^{-4})^2 = 3{,}28 \cdot 10^8 \cdot 36 \cdot 10^{-8} = 3{,}28 \cdot 36 = 118{,}08 = 1{,}1808 \cdot 10^2$

El resultado, con tres cifras significativas, es $1{,}18 \cdot 10^2$.

ERROR ABSOLUTO $< 5 \cdot 10^{-1}$

d) $(4{,}5 \cdot 10^4)^2 - 8{,}54 \cdot 10^7 = 20{,}25 \cdot 10^8 - 8{,}54 \cdot 10^7 = 193{,}96 \cdot 10^7 = 1{,}9396 \cdot 10^9$

Tomando tres cifras significativas, obtenemos $1{,}94 \cdot 10^9$.

ERROR ABSOLUTO $< 5 \cdot 10^6$

Aplica lo aprendido

26. **Comprueba, pasando a fracción, que el resultado de estas operaciones es un número entero.**

a) $6{,}\overset{\frown}{17} + 3{,}\overset{\frown}{82}$

b) $4{,}\overset{\frown}{36} : 0{,}\overset{\frown}{16}$

c) $2{,}6\overset{\frown}{9} + 9{,}3$

d) $1{,}4 : 1{,}\overset{\frown}{5} + 0{,}1$

a) • Pasamos $6{,}\overset{\frown}{17}$ a fracción:

$N = 6{,}1717\ldots \qquad 100N = 617{,}1717\ldots$

$100N - N = 617 - 6 \rightarrow 99N = 611 \rightarrow N = \dfrac{611}{99} \rightarrow 6{,}\overset{\frown}{17} = \dfrac{611}{99}$

• Pasamos $3{,}\overset{\frown}{82}$ a fracción:

$N = 3{,}8282\ldots \qquad 100N = 382{,}8282\ldots$

$100N - N = 382 - 3 \rightarrow 99N = 379 \rightarrow N = \dfrac{379}{99} \rightarrow 3{,}\overset{\frown}{82} = \dfrac{379}{99}$

Por tanto: $6{,}\overset{\frown}{17} + 3{,}\overset{\frown}{82} = \dfrac{611}{99} + \dfrac{379}{99} = \dfrac{990}{99} = 10$

b) • Pasamos $4,\overset{\frown}{36}$ a fracción:

$N = 4,3636...$ $\qquad 100N = 436,3636...$

$100N - N = 436 - 4 \rightarrow 99N = 432 \rightarrow N = \dfrac{432}{99} \rightarrow 4,\overset{\frown}{36} = \dfrac{432}{99}$

• Pasamos $0,\overset{\frown}{16}$ a fracción:

$N = 0,1616...$ $\qquad 100N = 16,1616...$

$100N - N = 16 - 0 \rightarrow 99N = 16 \rightarrow N = \dfrac{16}{99} \rightarrow 0,\overset{\frown}{16} = \dfrac{16}{99}$

Por tanto: $4,\overset{\frown}{36} : 30,\overset{\frown}{16} = \dfrac{432}{99} : \dfrac{16}{99} = \dfrac{432}{16} = 27$

c) • Pasamos a fracción el número $2,6\overset{\frown}{9}$:

$N = 2,6999...$ $\qquad 10N = 26,9999...$ $\qquad 100N = 269,9999...$

$100N - 10N = 269 - 26 \rightarrow 90N = 243 \rightarrow N = \dfrac{243}{90} \rightarrow 2,6\overset{\frown}{9} = \dfrac{243}{90}$

• Pasamos a fracción el número 9,3: $\quad 9,3 = \dfrac{93}{10}$

Por tanto: $2,6\overset{\frown}{9} + 9,3 = \dfrac{243}{90} + \dfrac{93}{10} = \dfrac{243}{90} + \dfrac{837}{90} = \dfrac{1080}{90} = 12$

d) • Pasamos a fracción los números decimales exactos:

$1,4 = \dfrac{14}{10}$ $\qquad 0,1 = \dfrac{1}{10}$

• Pasamos a fracción el número $1,\overset{\frown}{5}$:

$N = 1,555...$ $\qquad 10N = 15,555...$

$10N - N = 15 - 1 \rightarrow 9N = 14 \rightarrow N = \dfrac{14}{9} \rightarrow 1,\overset{\frown}{5} = \dfrac{14}{9}$

Por tanto: $1,4 : 1,\overset{\frown}{5} + 0,1 = \dfrac{14}{10} : \dfrac{14}{9} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{10}{10} = 1$

27. **Utiliza la calculadora para expresar en forma decimal las siguientes fracciones:**

$$\frac{179}{5},\ \frac{23}{6},\ \frac{59}{8},\ \frac{129}{20},\ \frac{425}{9},\ \frac{45}{7}$$

Observa los denominadores y razona sobre qué condición ha de cumplir una fracción para que pueda transformarse en un decimal exacto o periódico.

$\dfrac{79}{5} = 15,8$ $\qquad \dfrac{23}{6} = 3,8\overset{\frown}{3}$ $\qquad \dfrac{59}{8} = 7,375$

$\dfrac{129}{20} = 6,45$ $\qquad \dfrac{425}{9} = 47,\overset{\frown}{2}$ $\qquad \dfrac{45}{7} = 6,\overset{\frown}{428571}$

Una fracción se transforma en un número decimal exacto si el denominador de la fracción solo tiene como factores primos el 2 y el 5. Eso le ocurre a las fracciones $\dfrac{79}{5}$, $\dfrac{59}{8}$ y $\dfrac{129}{20}$.

Sin embargo, si el denominador tiene factores distintos de 2 o 5, la expresión decimal correspondiente es periódica. Eso le ocurre a las fracciones $\dfrac{23}{6}$, $\dfrac{425}{9}$ y $\dfrac{45}{7}$.

28. **Di cuál es la vigésima cifra decimal de estos números cuando los expresamos como decimales.**

a) $\mathbf{\dfrac{47}{111}}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{123}{990}}$ **c)** $\mathbf{\dfrac{45}{13}}$

a) $\dfrac{47}{111} = 0,\overset{\frown}{423}$ → La vigésima cifra decimal ($20 = 6 \cdot 3 + 2$) coincidirá con la que ocupa la segunda posición; en este caso, el 2.

b) $\dfrac{123}{990} = 0,1\overset{\frown}{24}$ → La vigésima cifra decimal coincidirá con la primera cifra del periodo ($20 - 1 = 19$ y $19 = 9 \cdot 2 + 1$); en este caso, el 2.

c) $\dfrac{45}{13} = 3,\overset{\frown}{461538}$ → La vigésima cifra decimal coincidirá con la que ocupa el segundo lugar ($20 = 6 \cdot 3 + 2$); en este caso, el 6.

29. **Los números 2,5 y 2,6 son dos aproximaciones del valor $n = 18/7$.**

a) Calcula el error absoluto en cada caso. ¿Cuál de los dos es más próximo a n?

b) Calcula en cada caso una cota del error relativo.

a) $\dfrac{18}{7} \approx 2,571$

La aproximación 2,6 está más próxima a $\dfrac{18}{7}$.

Aproximando a 2,5 → Error absoluto = $2,571 - 2,5 = 0,071$

Aproximando a 2,6 → Error absoluto = $2,6 - 2,571 = 0,029$

b) Tomando como aproximación 2,5 → Error relativo = $\dfrac{0,071}{18/7} < 0,028$.

Tomando como aproximación 2,6 → Error relativo = $\dfrac{0,029}{18/7} < 0,0113$.

Página 36

30. **Escribe una aproximación de los siguientes números con un error menor que cinco milésimas:**

a) 5,7468 **b) 12,5271** **c) 8,0018**

a) Tomando 5,75 como aproximación, el error absoluto que se comete es:

$$5{,}75 - 5{,}7468 = 3{,}2 \cdot 10^{-3} < 0{,}005$$

b) Aproximando a 12,53 el error absoluto será: $2{,}53 - 12{,}5271 = 2{,}9 \cdot 10^{-3} < 0{,}005$

c) Tomando 8 como aproximación, el error absoluto será: $8{,}0018 - 8 = 1{,}8 \cdot 10^{-3} < 0{,}005$

31. **Indica cuánto ha de valer n para que se verifique cada igualdad:**

a) $0{,}0000000023 = 2{,}3 \cdot 10^{n}$

b) $87{,}1 \cdot 10^{-6} = 8{,}71 \cdot 10^{n}$

c) $1\,250\,000 = 1{,}25 \cdot 10^{n}$

d) $254{,}2 \cdot 10^{4} = 2{,}542 \cdot 10^{n}$

e) $0{,}000015 \cdot 10^{-2} = 1{,}5 \cdot 10^{n}$

a) $0{,}0000000023 = 2{,}3 \cdot 10^{-9} \rightarrow n = -9$

b) $87{,}1 \cdot 10^{-6} = \dfrac{87{,}1}{10} \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 8{,}71 \cdot 10^{-5} \rightarrow n = -5$

c) $1\,250\,000 = 1{,}25 \cdot 10^{6} \rightarrow n = 6$

d) $254{,}2 \cdot 10^{4} = \dfrac{254{,}2}{100} \cdot 10^{4} \cdot 10^{2} = 2{,}542 \cdot 10^{6} \rightarrow n = 6$

e) $0{,}000015 \cdot 10^{-2} = 1{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-2} = 1{,}5 \cdot 10^{-7} \rightarrow n = -7$

32. **Un coche comprado hace 7 años por 17 500 €, se vende hoy por 5 800 €. ¿Cuál ha sido el coste por día? Da una cota del error absoluto y otra del error relativo de tu respuesta.**

El valor que ha perdido el coche es 17 500 – 5 800 = 11 700 €.

7 años = 7 · 365 días = 2 555 días

El coste por día será $\dfrac{11\,700}{2\,555} = 4{,}58$ €.

ERROR ABSOLUTO $< 0{,}005$

ERROR RELATIVO $< \dfrac{0{,}005}{4{,}58} < 1{,}09 \cdot 10^{-3}$

33. **Un caminante se entretiene contando sus pasos en un circuito de senderismo, señalizado con banderolas cada 100 metros.**

En 100 metros → 123 pasos

En 500 metros → 622 pasos

En un kilómetro → 1 214 pasos

¿Cuánto avanza por término medio en cada paso?

¿Qué dato has utilizado? Explica por qué.

Eln los 100 primeros metros avanza, en cada paso, $\frac{100}{123}$ = 0,81 metros.

En los 500 primeros metros avanza, en cada paso, $\frac{500}{622}$ = 0,8 metros.

En los 1 000 primeros metros avanza, en cada paso, $\frac{1000}{1214}$ = 0,82 metros.

Por término medio, en cada paso avanza 0,82 metros. Se ha utilizado el último dato, los pasos que ha dado en los últimos 1 000 metros, ya que en este dato están incluidos los anteriores.

34. **Ejercicio resuelto.**

Ejercicio resuelto en el libro del alumnado.

35. **El presupuesto destinado a infraestructuras para cierta región es de 3 430 millones de euros.**

a) Expresa la cantidad en notación científica.

b) Da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometido al tomar dos cifras significativas.

a) 3 430 millones = $3\,430 \cdot 10^6 = 3{,}43 \cdot 10^9$ €.

b) Con dos cifras significativas, la cantidad es $3{,}4 \cdot 10^9$; es decir, 34 cientos de millones de euros.

ERROR ABSOLUTO < 0,5 cientos de millones = $0{,}5 \cdot 10^2 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^7$

ERROR RELATIVO < $\frac{0{,}5 \text{ cientos de millones}}{3\,430 \text{ millones}} = \frac{50}{3\,430} < 0{,}02$

36. **El consumo de agua en España es, aproximadamente, de 142 litros por habitante y día.**

¿Cuál es el consumo anual, en metros cúbicos, de toda la población? Da el resultado en notación científica con una cota del error absoluto y otra del error relativo.

142 *l* por habitante y día, luego serán $142 \cdot 365 = 51\,830 = 5{,}183 \cdot 10^4$ *l* al año.

En España, al finalizar 2015, había una población de aproximadamente 46,5 millones de personas, es decir, $4{,}65 \cdot 10^7$ personas.

Luego: $(5{,}183 \cdot 10^4) \cdot (4{,}65 \cdot 10^7) = 24{,}1 \cdot 10^{11} = 2{,}41 \cdot 10^{12}$ *l* será el consumo de toda la población en un año.

Pasamos el resultado a m^3: $2{,}41 \cdot 10^{12}\ l = 2{,}41 \cdot 10^{12}\ dm^3 = 2{,}41 \cdot 10^9\ m^3$

ERROR ABSOLUTO < $0{,}005 \cdot 10^9$

ERROR RELATIVO < $\frac{0{,}005 \cdot 10^9}{2{,}41 \cdot 10^9} = 2{,}07 \cdot 10^{-3}$

37. **La masa del Sol es unas 330 000 veces la de la Tierra, y esta es $5{,}97 \cdot 10^{21}$ t. Expresa en notación científica la masa del Sol en kilogramos.**

$M_{Sol} = 330\,000 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{21} = 33 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{25} = 1{,}9701 \cdot 10^{27}$ t

$M_{Sol} = 1{,}9701 \cdot 10^{30}$ kg

Resuelve problemas

38. **Dos problemas inversos.**

a) Un ciclista avanza a la velocidad de 22,7 km/h. ¿Cuál es su velocidad en metros por segundo?

b) Un peatón camina a razón de dos pasos por segundo, avanzando 0,85 m en cada paso. ¿Cuál es su velocidad en kilómetros por hora?

a) $\dfrac{22{,}7 \cdot 1000}{3\,600} = 6{,}3$ m/s

b) $v = \dfrac{e}{t} = \dfrac{1{,}7 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 1{,}7$ m/s $\rightarrow \dfrac{1{,}7 : 1000}{1/3\,600} = \dfrac{1{,}7 \cdot 3\,600}{1000} = 6{,}12$ km/h

39. **Un conductor se detiene a repostar en una gasolinera cuando se enciende la luz de reserva. Pone 54,8 litros de gasoil, a 1,047 €/*l* y no vuelve a repostar hasta que se vuelve a encender el piloto de reserva, 912 km después.**

a) ¿Cuánto abona en la gasolinera?

b) ¿Cuál es el gasto en combustible de su vehículo? (en litros/100 km)

c) ¿Cuál es el gasto, en euros, por cada 100 km?

a) $54{,}8 \cdot 1{,}047 = 57{,}38$ €

b) Ha gastado, en 912 km, 54,8 *l*. Por tanto en 100 km habrá gastado:

$\dfrac{54{,}8}{912} \cdot 100 = 6{,}01$ *l*

c) Por cada 100 km, gastará $6{,}01 \cdot 1{,}047 = 6{,}29$ €

40. **Una máquina embotelladora llena 5 botellas de refresco cada 1,55 segundos. ¿Cuánto tardará en llenar una tanda de 20 000 botellas?**

Botellas de refresco	Tiempo
5	1,55
20 000	x

Luego $x = \dfrac{1{,}55 \cdot 20\,000}{5} = 6\,200$ segundos

Tardará 6 200 segundos en llenar una tanda de 20 000 botellas

41. **Un hostelero compra una partida de 100 botellas de vino, de 75 *cl*, a 6,80 €/botella, y lo ofrece en el restaurante a 11,90 € la botella y 3,50 € la copa de 15 *cl*.**

¿Cuál es finalmente la ganancia si ha colocado 73 botellas enteras y el resto por copas?

- La compra le supone 100 · 6,80 = 680 €
- Las 73 botellas enteras las vende por: 73 · 11,90 = 868,70 €
- Con 100 – 73 = 27 botellas restantes puede servir 135 copas

  27 · 75 = 2 025 *cl* en las 27 botellas

  $\frac{2\,025}{15} = 135$ copas

  Luego con las copas gana: 135 · 3,50 = 472,50 €
- En total gana 868,70 + 472,50 = 1 341,20 €
- Las ganancias son 1 341,20 – 680 = 661,20 €

Página 37

42. **Una fábrica de alimentos para ganado prepara cierto tipo de pienso con los siguientes componentes, cantidades y precios:**

	CANTIDAD	PRECIO
MAÍZ	1,75 t	178 €/t
CEBADA	2,150 t	164 €/t
COLZA	0,5 t	327 €/t
SALVADO	0,85 t	275 €/t
HARINA DE PESCADO	250 kg	1,58 €/kg
OTROS		375 €

Después comercializa el pienso envasado en sacos de 20 kilos. ¿A cuánto sale cada saco?

Maíz $\rightarrow$ 1,75 · 178 = 311,50 €

Cebada $\rightarrow$ 2,150 · 164 = 352,60 €

Colza $\rightarrow$ 0,5 · 327 = 163,50 €

Salvado $\rightarrow$ 0,85 · 275 = 233,75 €

Harina de pescado $\rightarrow$ 250 · 1,58 = 395 €

Otros $\rightarrow$ 375 €

En total: 1 831,35 €

El total de pienso asciende a:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Maíz} = 1\,750 \text{ kg}\\ \text{Cebada} = 2\,150 \text{ kg}\\ \text{Colza} = 500 \text{ kg}\\ \text{Salvado} = 850 \text{ kg}\\ \text{Harina de pescado} = 250 \text{ kg}\end{array}\right\}\ 5\,500 \text{ kg}$$

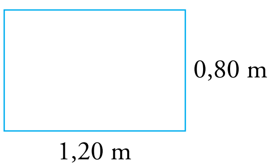
Podemos envasar $\dfrac{5\,500}{20} = 275$ sacos

Cada saco costará: $\dfrac{1831,35}{275} = 6,66$ €

43. **Vamos a comprar un tablero de aglomerado de 1,20 m × 0,80 m.**

a) ¿Cuánto nos costará si se vende a 13,85 €/m²?

b) ¿Cuánto pesará si el catálogo anuncia 6,99 kg/m²?

a) 

$\longrightarrow$ Superficie = 0,96 m²

Costará 0,96 · 13,85 = 13,30 €

b) Pesará 0,96 · 6,99 = 6,71 Kg

44. **El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g, y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Con cuántos virus igualaríamos el peso de una ballena?**

1 t tiene 10^6 g; por tanto, 138 t tendrán $1,38 \cdot 10^8$ g.

Como un virus pesa 10^{-18} g, entonces la ballena azul necesita:

$\frac{1,38 \cdot 10^8}{10^{-18}} = 1,38 \cdot 10^{26}$ virus para conseguir su peso.

45. **Si en 50 kg de arena hay unos $3 \cdot 10^6$ granos, ¿cuántos granos habrá en una tonelada?**

1 tonelada = 1 000 kg = $20 \cdot 50$ kg

En 50 kg hay $3 \cdot 10^6$ granos. En 1 tonelada habrá $20 \cdot 3 \cdot 10^6 = 60 \cdot 10^6 = 6 \cdot 10^7$ granos.

46. **La dosis de una vacuna es 0,05 cm³. Si tiene 100 000 000 bacterias por cm³, ¿cuántas bacterias hay en una dosis? Exprésalo en notación científica.**

En 1 cm³ hay 10^8 bacterias $\rightarrow$ en una dosis habrá:

$0,05 \cdot 10^8 = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^8 = 5 \cdot 10^6$ bacterias

47. **Si la velocidad de crecimiento del cabello humano es $1,6 \cdot 10^{-8}$ km/h, ¿cuántos centímetros crece el pelo en un mes? ¿Y en un año?**

Calculamos el número de horas que hay en un mes: $30 \cdot 24 = 720$ h

Crecimiento del pelo en 1 mes:

$1,6 \cdot 10^{-8} \cdot 720$ km = $1\,152 \cdot 10^{-8}$ km = $1,152 \cdot 10^{-5}$ km ≈ $1,15 \cdot 10^{-5}$ km = 1,15 cm

Calculamos el número de horas que hay en un año:

$365 \cdot 24 = 8\,760$ h

El crecimiento será:

$8\,760 \cdot 1,6 \cdot 10^{-8}$ km = $1,4 \cdot 10^{-4}$ km = 14 cm

48. **El coeficiente de dilatación del cobre es $16 \cdot 10^{-6}$ (alargamiento de una unidad de longitud al elevar la temperatura un grado).**

¿Cuánto se alargará un cable de cobre de 100 metros, al subir la temperatura de 8 ºC a 22 ºC?

Longitud final = longitud inicial $\cdot (1 + 16 \cdot 10^{-6} \cdot 14)$

$L = 100 \cdot (1 + 224 \cdot 10^{-6})$

$L = 100 \cdot (1 + 2,24 \cdot 10^{-4}) = 100 \cdot (1 + 0,000224) = 100 \cdot (1,000224) = 100,0224$ m

49. **Consigue los datos necesarios y responde.**

La población mundial actual ronda los $7,4 \cdot 10^9$ habitantes.

a) ¿Cuánto ha tardado en doblarse?

b) ¿Cuánto tardó la vez anterior? ¿Y la anterior? Y …

c) Compara los tiempos invertidos en las cuatro últimas duplicaciones.

El dato de la población mundial corresponde al año 2016, que es el que se usará para el primer apartado.

a) La población mundial alcanzó los 3 700 millones, la mitad de la actual, en 1970.

Por tanto, ha tardado en doblarse 46 años.

b) La población mundial era de 1 850 millones en 1915, aproximadamente.

Por tanto, tardó en doblarse 55 años.

Era de 925 millones en 1775, es decir, tardó 140 años.

Era de 462,5 millones en 1375, luego esta vez tardó 400 años.

c) Se aprecia que la población mundial ha tardado muchísimo menos en duplicarse cuanto más nos acercamos a la época actual.

NOTA: la información de la población mundial se ha tomado de la página www.apuntesdedemografia.com

50. **Consigue los datos necesarios y resuelve:**

Piensa en una nave imaginaria que fuera capaz de cubrir en un segundo una distancia equivalente a la que separa la Tierra del Sol.

Estima el tiempo que esa nave tardaría en llegar desde la Tierra al centro de nuestra galaxia.

La distancia que separa la Tierra y el Sol es de 150 millones de kilómetros, es decir, $1,5 \cdot 10^8$ km.

Si la nave imaginaria cubre esta distancia en 1 segundo, llevaría una velocidad de $1,5 \cdot 10^8$ km/s.

Aunque las informaciones que aparecen en Internet son muy dispares, vamos a considerar que la distancia de la Tierra al centro de nuestra galaxia es aproximadamente 25 000 años luz. Un año luz equivale aproximadamente a $9,46 \cdot 10^{12}$ km, luego la distancia de la Tierra al centro de nuestra galaxia es:

$(2,5 \cdot 10^4) \cdot (9,46 \cdot 10^{12}) = 23,65 \cdot 10^{16} = 2,365 \cdot 10^{17}$ km

$$v = \frac{e}{t} \rightarrow t = \frac{e}{v} = \frac{2,365 \cdot 10^{17} \text{ km}}{1,5 \cdot 10^8 \text{ km/s}} = 1,577 \cdot 10^9 \text{ segundos}$$

Curiosidades matemáticas

Opina: ¿decimal o entero?

Calcula la fracción generatriz del decimal periódico puro:

0,999999...

Reflexiona sobre el resultado.

¿Te parece coherente?

Razona tu respuesta.

Al calcular la fracción generatriz del decimal periódico $N = 0{,}999\ldots$, obtenemos la unidad:

$10N = 9{,}999\ldots \rightarrow 10N - N = 9 \rightarrow 9N = 9 \rightarrow N = 1$

¡Y no hay ningún error! Observa que 0,999… tiene infinitas cifras decimales, todas nueves. Y si te propones imaginar un decimal exacto muy, muy, muy pequeño, tan pequeño como quieras, resulta que la diferencia $1 - N$ es aún menor que tu número imaginado.

Es decir, que N está "pegado" al 1, tan cerca del uno, que no hay nada en medio (aquí tocamos el concepto de "límite", que se estudia en cursos superiores). Podemos decir tranquilamente que el valor de 0,999… es 1.

Peso medio

Un arriero lleva en su carro veinte sacos de trigo que pesan, por término medio, 35,5 kg.

Tras pernoctar en una venta, paga al posadero en especie, para lo cual quita 1 kg de trigo del primer saco, 2 kg del segundo, 3 kg del tercero y así, sucesivamente, hasta el último. ¿Cuál es ahora el peso medio de los sacos?

Ha retirado, por término medio $\dfrac{1+20}{2} = 10{,}5$ kilos por saco.

O bien: $\dfrac{1+2+3+\ldots+20}{20} = \dfrac{210}{20} = 10{,}5$ kg por saco.

Por tanto, ahora el peso medio será $35{,}5 - 10{,}5 = 25$ kg.

Una larga cuenta

$S = 0{,}001 - 0{,}002 + 0{,}003 - 0{,}004 + \ldots + 0{,}997 - 0{,}998 + 0{,}999$

$S = (0{,}001 - 0{,}002) + (0{,}003 - 0{,}004) + \ldots + (0{,}997 - 0{,}998) + 0{,}999$

Observa que la expresión aritmética se ha propuesto como una suma de 500 sumandos, los 499 primeros entre paréntesis y 0,999 al final. El valor de cada paréntesis es de una milésima negativa (–0,001). Por tanto:

$S = 499 \cdot (-0{,}001) + 0{,}999 = 0{,}999 - 0{,}499 = 0{,}5$