

Dadas las siguientes funciones efectúa las operaciones que se indican, calculando en cada caso el dominio de la función resultante:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$g(x) = x^2 - 6 \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{6x}{x^2 - 4} \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$p(x) = \sqrt{x+1} \rightarrow \text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty)$$

$$j(x) = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

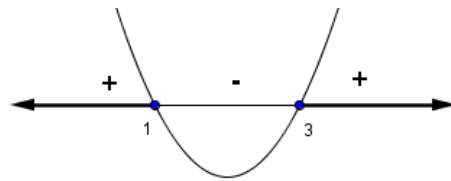
$$k(x) = \frac{x+2}{x^2 - 1} \rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$l(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3} \rightarrow \text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4x + 3 \geq 0\} = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

Tenemos que resolver la inecuación: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

Ceros

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ò} \quad x = 3$$



i) $(g \circ m)(x) = g[m(x)] = g[x-4] = (x-4)^2 - 6 = x^2 - 8x + 10$

$$\text{Dom}(g \circ m) = \{x \in \text{Dom}(m) / m(x) \in \text{Dom}(g)\} = \{x \in \mathbb{R} / x-4 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

j) $(m \circ g)(x) = m[g(x)] = m[x^2 - 6] = (x^2 - 6) - 4 = x^2 - 10$

$$\text{Dom}(m \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) / g(x) \in \text{Dom}(m)\} = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 - 6) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

k) $(f \circ m)(x) = f[m(x)] = f[x-4] = \frac{1}{(x-4)^2 - 4} = \frac{1}{x^2 - 8x + 12}$

$$\text{Dom}(f \circ m) = \{x \in \text{Dom}(m) / m(x) \in \text{Dom}(f)\} = \{x \in \mathbb{R} / x-4 \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}\} = \mathbb{R} - \{2, 6\}$$

$$x-4 \neq -2 \Leftrightarrow x \neq 2$$

$$x-4 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 6$$

l) $(m \circ j)(x) = m[j(x)] = m\left[\frac{x-1}{x+1}\right] = \frac{x-1}{x+1} - 4 = \frac{x-1-4x-4}{x+1} = \frac{-3x-5}{x+1}$

$$\text{Dom}(m \circ j) = \{x \in \text{Dom}(j) / j(x) \in \text{Dom}(m)\} = \{x \in \mathbb{R} - \{-1\} / \frac{x-1}{x+1} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

m) $(p \circ r)(x) = p[r(x)] = p\left[\frac{2x-1}{x+3}\right] = \sqrt{\frac{2x-1}{x+3}} + 1 = \sqrt{\frac{2x-1+x+3}{x+3}} = \sqrt{\frac{3x+2}{x+3}}$

$$\text{Dom}(p \circ r) = \{x \in \text{Dom}(r) / r(x) \in \text{Dom}(p)\} = \{x \in \mathbb{R} - \{-3\} / \frac{2x-1}{x+3} \in [-1, +\infty)\} = (-\infty, -3) \cup \left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

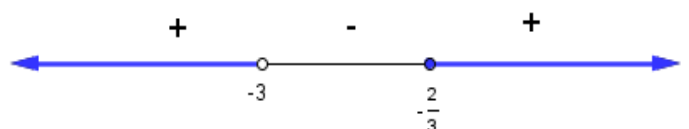
$$\frac{2x-1}{x+3} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+3} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x+3} \geq 0$$

Ceros

$$3x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Polos

$$x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$



$$\mathbf{n)} \quad (p \circ j)(x) = p[j(x)] = p\left[\frac{x-1}{x+1}\right] = \sqrt{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \sqrt{\frac{x-1+x+1}{x+1}} = \sqrt{\frac{2x}{x+1}}$$

$$\text{Dom}(p \circ j) = \{x \in \text{Dom}(j) / j(x) \in \text{Dom}(p)\} = \{x \in \mathfrak{R} - \{-1\} / \frac{x-1}{x+1} \in [-1, +\infty)\} = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$$

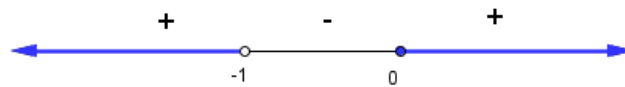
$$\frac{x-1}{x+1} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} \geq 0$$

Ceros

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Polos

$$x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



$$\mathbf{o)} \quad (s \circ p)(x) = s[p(x)] = s[\sqrt{x+1}] = \frac{3 - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$\text{Dom}(s \circ p) = \{x \in \text{Dom}(p) / p(x) \in \text{Dom}(s)\} = \{x \in [-1, +\infty) / \sqrt{x+1} \in \mathfrak{R} - \{1\}\} = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\sqrt{x+1} \neq 1 \Leftrightarrow x+1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\mathbf{p)} \quad (r \circ s)(x) = r[s(x)] = r\left[\frac{3-x}{x-1}\right] = \frac{2\left(\frac{3-x}{x-1}\right) - 1}{\frac{3-x}{x-1} + 3} = \frac{\frac{6-2x}{x-1} - 1}{\frac{3-x+3x-3}{x-1}} = \frac{\frac{6-2x-x+1}{x-1}}{\frac{2x}{x-1}} = \frac{-3x+7}{2x}$$

$$\text{Dom}(r \circ s) = \{x \in \text{Dom}(s) / s(x) \in \text{Dom}(r)\} = \{x \in \mathfrak{R} - \{1\} / \frac{3-x}{x-1} \in \mathfrak{R} - \{-3\}\} = \mathfrak{R} - \{-1, 0\}$$

$$\frac{3-x}{x-1} \neq -3 \Leftrightarrow 3-x \neq -3 \cdot (x-1) \Leftrightarrow 3-x \neq -3x+3 \Leftrightarrow 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

q) m^{-1}

➤ Primero comprobaremos si $m(x) = x - 4$ es inyectiva, es decir, [si $m(a) = m(b) \Rightarrow a = b$]

$$m(a) = m(b) \Rightarrow a - 4 = b - 4 \Rightarrow a = b$$

Por tanto, $m(x)$ es inyectiva y existe $m^{-1}(x)$

➤ Ahora calculamos $m^{-1}(x)$

$$1) \quad m(x) = x - 4 \Rightarrow y = x - 4$$

$$2) \quad x = y - 4$$

$$3) \quad y = x + 4$$

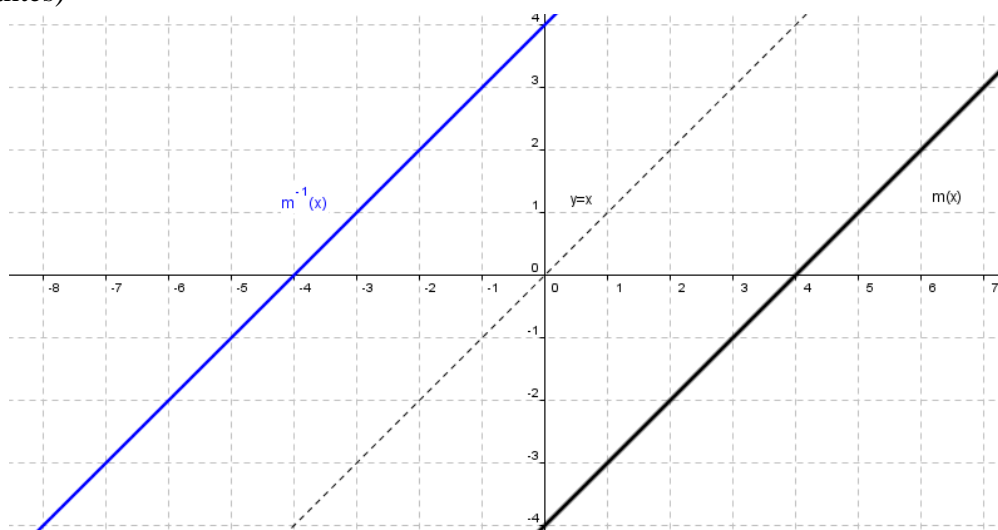
$$4) \quad m^{-1}(x) = x + 4$$

➤ COMPROBACIÓN

$$(m \circ m^{-1})(x) = m[m^{-1}(x)] = (x + 4) - 4 = x$$

$$(m^{-1} \circ m)(x) = m^{-1}[m(x)] = (x - 4) + 4 = x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$$Dom(m) = \mathfrak{R} \quad Rec(m) = \mathfrak{R}$$

$$Dom(m^{-1}) = \mathfrak{R} \quad Rec(m^{-1}) = \mathfrak{R}$$

r) j^{-1}

➤ Primero comprobaremos si $j(x) = \frac{x-1}{x+1}$ es inyectiva, es decir, [si $j(a) = j(b) \Rightarrow a = b$]

$$j(a) = j(b) \Rightarrow \frac{a-1}{a+1} = \frac{b-1}{b+1} \Rightarrow (a-1) \cdot (b+1) = (a+1) \cdot (b-1) \Rightarrow a \cdot b + a - b - 1 = a \cdot b - a + b - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b$$

Por tanto, $j(x)$ es inyectiva y existe $j^{-1}(x)$

➤ Ahora calculamos $j^{-1}(x)$

$$1) j(x) = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow y = \frac{x-1}{x+1}$$

$$2) x = \frac{y-1}{y+1}$$

$$3) x \cdot (y+1) = y-1 \Rightarrow xy + x = y-1 \Rightarrow x+1 = y-xy \Rightarrow x+1 = y \cdot (1-x) \Rightarrow y = \frac{x+1}{1-x}$$

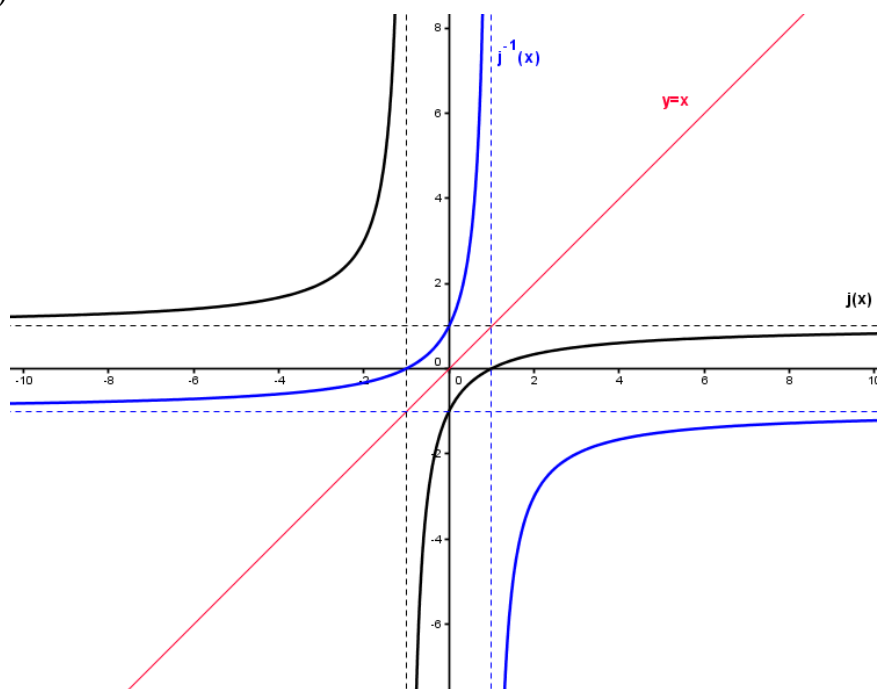
$$4) j^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}$$

➤ COMPROBACIÓN

$$(j \circ j^{-1})(x) = j[j^{-1}(x)] = j\left[\frac{x+1}{1-x}\right] = \frac{\frac{x+1}{1-x} - 1}{\frac{x+1}{1-x} + 1} = \frac{x+1-1+x}{x+1+1-x} = \frac{2x}{2} = x$$

$$(j^{-1} \circ j)(x) = j^{-1}[j(x)] = j^{-1}\left[\frac{x-1}{x+1}\right] = \frac{\frac{x-1}{x+1} + 1}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \frac{x-1+x+1}{x+1-x+1} = \frac{2x}{2} = x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$$\text{Dom}(j) = \mathfrak{R} - \{-1\} \quad \text{Rec}(j) = \mathfrak{R} - \{1\}$$

$$\text{Dom}(j^{-1}) = \mathfrak{R} - \{1\} \quad \text{Rec}(j^{-1}) = \mathfrak{R} - \{-1\}$$

s) r^{-1}

➤ Primero comprobaremos si $r(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ es inyectiva, es decir, [si $r(a) = r(b) \Rightarrow a = b$]

$$r(a) = r(b) \Rightarrow \frac{2a-1}{a+3} = \frac{2b-1}{b+3} \Rightarrow (2a-1) \cdot (b+3) = (a+3) \cdot (2b-1) \Rightarrow 2ab + 6a - b - 3 = 2ab - a + 6b - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7a = 7b \Rightarrow a = b$$

Por tanto, $r(x)$ es inyectiva y existe $r^{-1}(x)$

➤ Ahora calculamos $r^{-1}(x)$

$$1) r(x) = \frac{2x-1}{x+3} \Rightarrow y = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$2) x = \frac{2y-1}{y+3}$$

$$3) x \cdot (y+3) = 2y-1 \Rightarrow xy+3x = 2y-1 \Rightarrow 3x+1 = 2y-xy \Rightarrow 3x+1 = y \cdot (2-x) \Rightarrow y = \frac{3x+1}{2-x}$$

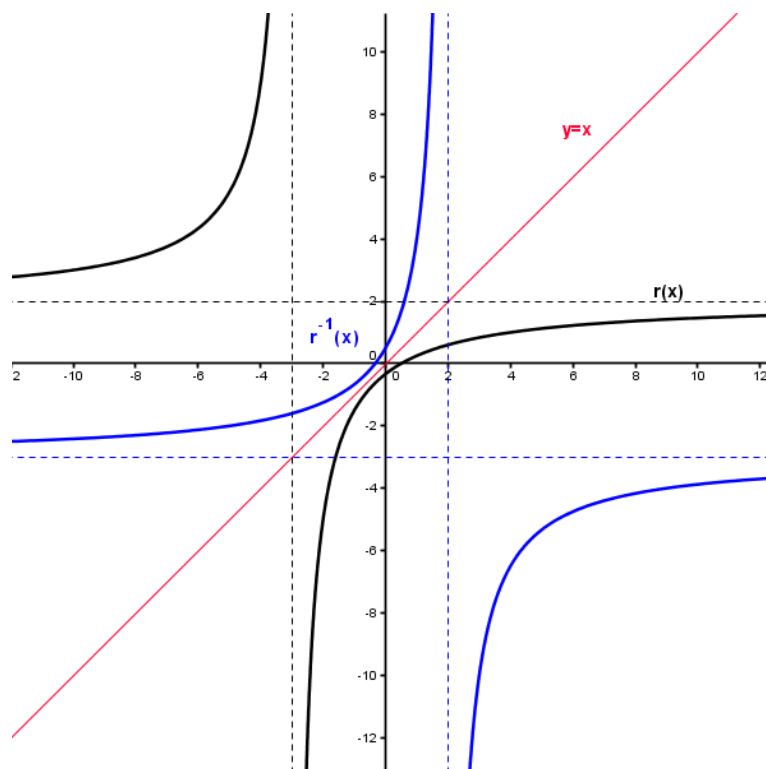
$$4) r^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2-x}$$

➤ COMPROBACIÓN

$$(r \circ r^{-1})(x) = r[r^{-1}(x)] = r\left[\frac{3x+1}{2-x}\right] = \frac{2 \cdot \left(\frac{3x+1}{2-x}\right) - 1}{\frac{3x+1}{2-x} + 3} = \frac{\frac{6x+2}{2-x} - 1}{\frac{3x+1+6-3x}{2-x}} = \frac{6x+2-2+x}{7} = \frac{7x}{7} = x$$

$$(r^{-1} \circ r)(x) = r^{-1}[r(x)] = r^{-1}\left[\frac{2x-1}{x+3}\right] = \frac{3 \cdot \left(\frac{2x-1}{x+3}\right) + 1}{2 - \frac{2x-1}{x+3}} = \frac{\frac{6x-3}{x+3} + 1}{\frac{2x+6-2x+1}{x+3}} = \frac{6x-3+x+3}{7} = \frac{7x}{7} = x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$$Dom(r) = \mathfrak{R} - \{-3\} \quad Rec(r) = \mathfrak{R} - \{2\}$$

$$Dom(r^{-1}) = \mathfrak{R} - \{2\} \quad Rec(r^{-1}) = \mathfrak{R} - \{-3\}$$

t) s^{-1}

➤ Primero comprobaremos si $s(x) = \frac{3-x}{x-1}$ es inyectiva, es decir, [si $s(a) = s(b) \Rightarrow a = b$]

$$s(a) = s(b) \Rightarrow \frac{3-a}{a-1} = \frac{3-b}{b-1} \Rightarrow (3-a) \cdot (b-1) = (a-1) \cdot (3-b) \Rightarrow 3b - 3 - ab + a = 3a - ab - 3 + b \Rightarrow \\ \Rightarrow -2a = -2b \Rightarrow a = b$$

Por tanto, $s(x)$ es inyectiva y existe $s^{-1}(x)$

➤ Ahora calculamos $r^{-1}(x)$

$$1) s(x) = \frac{3-x}{x-1} \Rightarrow y = \frac{3-x}{x-1}$$

$$2) x = \frac{3-y}{y-1}$$

$$3) x \cdot (y-1) = 3-y \Rightarrow xy - x = 3-y \Rightarrow xy + y = 3+x \Rightarrow y \cdot (x+1) = 3+x \Rightarrow y = \frac{3+x}{x+1}$$

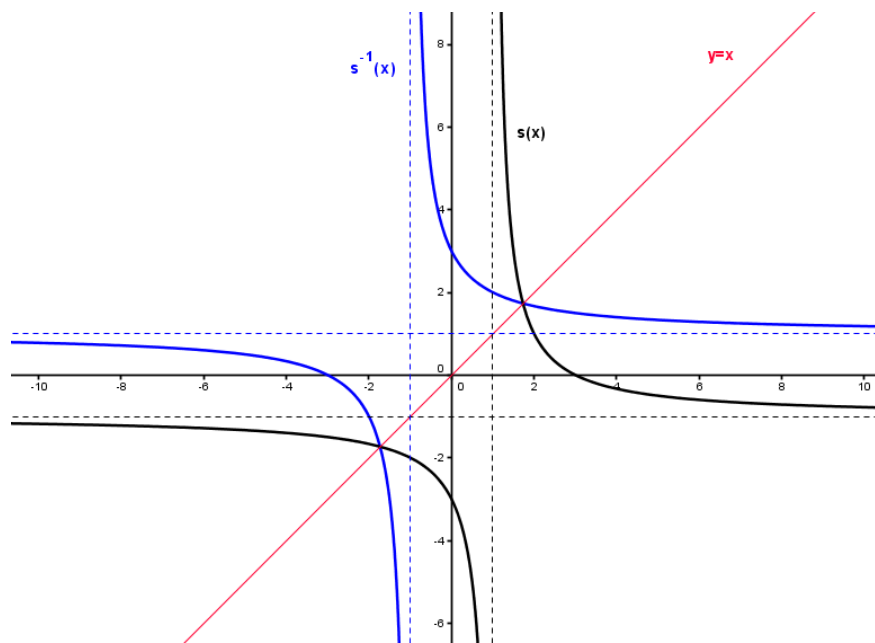
$$4) s^{-1}(x) = \frac{3+x}{x+1}$$

➤ COMPROBACIÓN

$$(s \circ s^{-1})(x) = s[s^{-1}(x)] = s\left[\frac{3+x}{x+1}\right] = \frac{3 - \frac{3+x}{x+1}}{\frac{3+x}{x+1} - 1} = \frac{\frac{3x+3-3-x}{x+1}}{\frac{3+x-x-1}{x+1}} = \frac{2x}{2} = x$$

$$(s^{-1} \circ s)(x) = s^{-1}[s(x)] = s^{-1}\left[\frac{3-x}{x-1}\right] = \frac{3 + \frac{3-x}{x-1}}{\frac{3-x}{x-1} + 1} = \frac{\frac{3x-3+3-x}{x-1}}{\frac{3-x+x-1}{x-1}} = \frac{2x}{2} = x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$$\text{Dom}(s) = \mathfrak{R} - \{1\} \quad \text{Rec}(s) = \mathfrak{R} - \{-1\}$$

$$\text{Dom}(s^{-1}) = \mathfrak{R} - \{-1\} \quad \text{Rec}(s^{-1}) = \mathfrak{R} - \{1\}$$

u) p^{-1}

➤ Primero comprobaremos que $p(x) = \sqrt{x+1}$ es inyectiva, es decir, [si $p(a) = p(b) \Rightarrow a = b$]

$$p(a) = p(b) \Rightarrow \sqrt{a+1} = \sqrt{b+1} \Rightarrow a+1 = b+1 \Rightarrow a = b$$

Por tanto, $p(x)$ es inyectiva y existe $p^{-1}(x)$

➤ Ahora calculamos $p^{-1}(x)$

$$1) p(x) = \sqrt{x+1} \Rightarrow y = \sqrt{x+1}$$

$$2) x = \sqrt{y+1} \Rightarrow x^2 = y+1$$

$$3) y = x^2 + 1$$

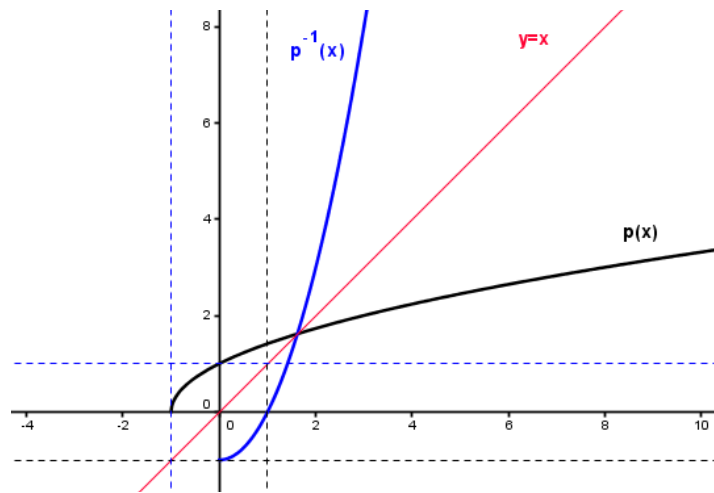
$$4) p^{-1}(x) = x^2 - 1 \quad \text{con } x \in [0, +\infty)$$

➤ COMPROBACIÓN

$$(p \circ p^{-1})(x) = p[p^{-1}(x)] = \sqrt{x^2 - 1 + 1} = x$$

$$(p^{-1} \circ p)(x) = p^{-1}[p(x)] = (\sqrt{x+1})^2 - 1 = x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$$\begin{aligned} \text{Dom}(p) &= [-1, +\infty) & \text{Rec}(p) &= [0, +\infty) \\ \text{Dom}(p^{-1}) &= [0, +\infty) & \text{Rec}(p^{-1}) &= [-1, +\infty) \end{aligned}$$