$$\int x^5\,dx$$

Solución

Aplicaremos la **propiedad** "una constante puede entrar o salir de la integral.
Sólo falta un 6 multiplicando en el integrando para tener la derivada de x^6. Vamos a multiplicar y a dividir la integral por 6 para introducir un 6 en el radicando:

$$\int x^5\,dx = \frac{6}{6}\int x^5 dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int 6x^5 dx = \frac{1}{6}\cdot x^6 + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x dx$$

Solución

No tenemos que realizar ninguna operación para resolver esta integral porque e^x es la derivada de e^x. Sólo debemos acordarnos de escribir la constante de integración C.

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\int (3x^4 + x^2 + 2)dx$$

Solución

Aplicamos la **propiedad** de que la integral de la suma es la suma de las integrales. Así, podemos descomponer la integral como una suma de integrales más sencillas.

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int (3x^4 + x^2 + 2)dx = \int 3x^4 dx + \int x^2 dx + \int 2dx$$

$$\int 3x^4 dx = 3\int x^4 dx = 3\cdot\frac{5}{5}\int x^4 dx =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{5}\int 5x^4 dx = \frac{3}{5}\cdot x^5$$

$$\int x^2 dx = \frac{3}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int 2dx = 2\int 1dx = 2x$$

$$\int (3x^4 + x^2 + 2)dx = \frac{3}{5}\cdot x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 2x + C$$

$$\int (x+\sqrt{x})dx$$

Solución

Como tenemos una suma en el integrando, podemos descomponer la integral como una suma integrales. Además, escribimos la raíz cuadrada como una potencia:

$$\int (x+\sqrt{x})dx = \int x dx + \int \sqrt{x} dx$$

$$\int x dx = \frac{1}{2}\int 2x dx = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int x^{1/2}dx = \frac{1/2+1}{1/2+1}\int x^{1/2}dx =$$

$$= \frac{1}{1/2+1}\int (1/2+1)x^{1/2}dx =$$

$$= \frac{1}{1/2+1}x^{1/2+1} = \frac{1}{3/2}x^{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

$$\int (x+\sqrt{x})dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos 2x \, dx$$

Solución

Si escribimos un 2 en el integrando, tendremos la derivada del seno del ángulo doble:

$$\int \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int 2\cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{2}{3x+2}dx$$

Solución

Normalmente, las integrales inmediatas de funciones racionales son la derivada de un logaritmo. Si no es así, tendremos que aplicar otros métodos para integrales de funciones racionales.

El integrando será la derivada de un logaritmo si conseguimos escribir el numerador como la derivada del denominador. Para ello, en esta integral, debemos cambiar el 2 por un 3:

$$\int \frac{2}{3x+2}dx = 2\int \frac{1}{3x+2}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{3}{3x+2}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{3x+2}\cdot 3dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|3x+2| + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

Nota: no hay que olvidar el valor absoluto del argumento del logaritmo porque éste no puede tomar valores no positivos.

$$\int e^{2x}dx$$

Solución

Introducimos un 2 en el integrando para que éste sea la derivada de e^{2x}:

$$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1-x}dx$$

Solución

Como es una función racional simple, su integral será un logaritmo:

$$\int \frac{1}{1-x}dx = -\int \frac{1}{x-1}dx =$$

$$= -\ln|x-1| + + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^{5x+3}dx$$

Solución

Introducimos un 5 en el integrando para convertirlo en la derivada de e^{5x+3}:

$$\int e^{5x+3}dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x+3}dx =$$

$$= \frac{1}{5}e^{5x+3} + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx$$

Solución

Lo primero que haremos es descomponer la integral en dos integrales. Después, escribiremos las raíces en forma de potencias para trabajar mejor con ellas.

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx = \int \frac{3}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{x\sqrt{x}}{4}dx$$

$$\int \frac{3}{\sqrt{x}}dx = 3\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 3\int x^{-1/2}dx =$$

$$= 3\left(\frac{-1/2+1}{-1/2+1}\right)\int x^{-1/2}dx =$$

$$= \frac{3}{-1/2+1}\int (-1/2+1)x^{-1/2}dx =$$

$$= \frac{3}{1/2}\int (-1/2+1)x^{-1/2}dx =$$

$$= \frac{3}{1/2}\cdot x^{-1/2+1} = 6\cdot x^{1/2} = 6\sqrt{x}$$

$$\int \frac{x\sqrt{x}}{4}dx = \frac{1}{4}\int x\sqrt{x}dx = \frac{1}{4}\int xx^{1/2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int x^{3/2}dx =$$

$$= \frac{1}{4\cdot(3/2+1)}\int \left(\frac{3}{2}+1\right)x^{3/2}dx =$$

$$= \frac{1}{4\cdot\left({}^{5}/_{2}\right)}\int \frac{5}{2}x^{3/2}dx = \frac{2}{4\cdot 5}\cdot x^{5/2} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 5}\cdot x^{5/2} = \frac{1}{10}\cdot x^{5/2} = \frac{1}{10}\cdot x^{2}\sqrt{x}$$

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx = 6\sqrt{x} - \frac{1}{10}\cdot x^{2}\sqrt{x} =$$

$$= \left(6 - \frac{x^{2}}{10}\right)\sqrt{x} + C \qquad C\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{x^{2}}{\sqrt{x}}dx$$

Solución

Vamos a escribir la raíz cuadrada en forma de potencia. De este modo, aplicando las propiedades de las potencias, el integrando será muy simple (una potencia).

$$\int \frac{x^{2}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{2-1/2}dx = \int x^{3/2}dx =$$

$$= \frac{1}{{}^{3}/_{2}+1}\int \left({}^{3}/_{2}+1\right)x^{3/2}dx =$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{5}{2}x^{3/2}dx = \frac{2}{5}x^{5/2} =$$

$$= \frac{2}{5}x^{2}\sqrt{x} + C$$

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \frac{5}{e^{3x}}\right)dx$$

Solución

Primero, escribimos la integral como la suma de dos integrales. Después, escribimos la raíz 5-ésima en su forma de potencia. También, podemos escribir la exponencial en el numerador cambiando el signo de su exponente.

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \frac{5}{e^{3x}}\right) dx = \int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx + \int \frac{5}{e^{3x}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \int x^{-1/5} dx =$$

$$= \frac{1}{-1/5 + 1} \int \left(-\frac{1}{5} + 1\right) x^{-1/5} dx =$$

$$= \frac{5}{4} \int \left(-\frac{1}{5} + 1\right) x^{-1/5} dx =$$

$$= \frac{5}{4} x^{-1/5 + 1} = \frac{5}{4} x^{4/5}$$

$$\int \frac{5}{e^{3x}} dx = 5 \int \frac{1}{e^{3x}} dx =$$

$$= 5 \int e^{-3x} dx = \frac{-5}{3} \int -3e^{-3x} dx =$$

$$= -\frac{5}{3} e^{-3x} = -\frac{5}{3e^{3x}}$$

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \frac{5}{e^{3x}}\right) dx = \frac{5}{4} x^{4/5} - \frac{5}{3e^{3x}} + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int \tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx$$

Solución

Normalmente, escribir la *tangente* como el cociente del *seno* y del *coseno* facilita los cálculos. Al hacerlo, tendremos un cociente de funciones trigonométricas siendo el numerador la derivada del denominador.

$$\int \tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx = \int \frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} dx =$$

$$= -\sqrt{2} \int \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} \cdot \left[-\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx =$$

$$= -\sqrt{2} \ln\left|\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right| + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\sqrt{x}}+5\right)dx$$

Solución

Como de costumbre, descomponemos la integral en tantas integrales como sumandos tiene el integrando.

Después, escribiremos la raíz como un potencia y aprovecharemos las propiedades de las potencias para simplificar los integrandos.

$$\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\sqrt{x}}+5\right)dx = \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx + \int 5dx$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx =$$

$$= \frac{1}{(-2+1)}\int (-2+1)x^{-2}dx =$$

$$= -1 \cdot \int (-2+1)x^{-2}dx =$$

$$= -\,x^{-2+1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{x^{3/2}}dx = \int x^{-3/2}dx =$$

$$= \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}+1\right)}\int \left(-\frac{3}{2}+1\right)x^{-3/2}dx =$$

$$= \frac{1}{-1/2}\int \left(-\frac{3}{2}+1\right)x^{-3/2}dx =$$

$$= -2\int \left(-\frac{3}{2}+1\right)x^{-3/2}dx =$$

$$= -2x^{-3/2+1} = -2x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\sqrt{x}}+5\right)dx = -\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}-5x+C \quad C\in\mathbb{R}$$

$$\int \frac{\sin\left(1/x\right)}{x^2}dx$$

Solución

El integrando es, si le cambiamos el signo, la derivada de un coseno:

$$\int \frac{\sin(1/x)}{x^2} dx =$$

$$= \int -\sin(1/x) \cdot \frac{-1}{x^2} dx =$$

$$= \cos\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx$$

Solución

El integrando es la derivada del cuadrado del logaritmo entre 2:

$$\frac{1}{2}\int 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + C$$

$$C \in \mathbb{R}$$