EXAMEN DE FUNCIONES

1. Representa gráficamente, de forma razonada, las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{|x+1|}{3-x}$$

(3 ptos)

$$g(x) = \begin{cases} 3^x - 1 & si \quad x < 1 \\ log_{\frac{1}{3}}(x-1) & si \quad x > 1 \end{cases}$$

(3 ptos)

$$h(x) = \cos x + |\cos x| + 1$$

(2 ptos)

$$j(x) = \max(5-2x, x^2-6x+8)$$

(2 ptos)

2. Sean las funciones:

$$f(x) = \sqrt{\frac{-2}{-x^2+2x+8}} \quad g(x) = \frac{3x-4}{x-2} \quad h(x) = \sqrt{25-x^2} \quad j(x) = \sqrt{x-1}$$

$$k(x) = \frac{Ln(x+4)}{\sqrt{x^2-9}} \quad m(x) = 5 + Ln(3x-1) \quad n(x) = 3^{cos2x} - 2$$

Se pide:

a. Dominio de definición de la función k. (2 ptos)
b. La expresión analítica de las funciones $(f+h)$, $\left(\frac{j}{g}\right)$ y sus dominios de definición. (2 ptos + 1 pto)
c. La expresión analítica de las funciones $g°j \ \ y \ \ j°g$ y sus dominios de definición respectivos. (2 ptos + 2 ptos)
d. La expresión analítica de $m^{-1}(x) \ y \ de \ \ n^{-1}(x)$ (1 pto + 1 pto)

CONTROL 2 FUNCIONES

(2) $K(x) = \dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{x^2-9}}$

(2.1)

a) → Para que el $\ln(x+4)$ esté bien definido, su argumento $x+4 > 0 \rightarrow x > -4 \Rightarrow$ esto es $x \in (-4, +\infty)$

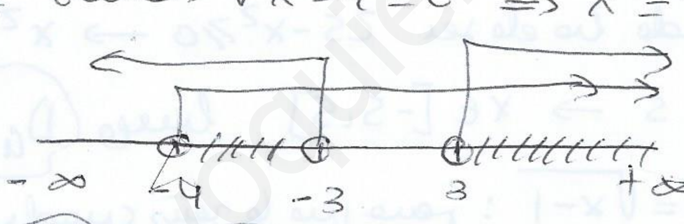
b) → Para que la $\sqrt{x^2-9}$ exista, ha de ser el radicando $x^2-9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} \geq 3 \Rightarrow |x| \geq 3$ esto es $x < -3$ ó $x > 3$.

c) → Para que el cociente esté bien definido el denominador no se debe anular:

$\dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{x^2-9}}$ para que esté bien def $\sqrt{x^2-9} \neq 0$

luego vemos $\sqrt{x^2-9} = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \notin D_f$.

Queda



(intersección de a), b) y c))

$\boxed{D_K = (-4, -3) \cup (3, +\infty)}$

(2.2) Calculamos primero los dominios de f, h, g y j

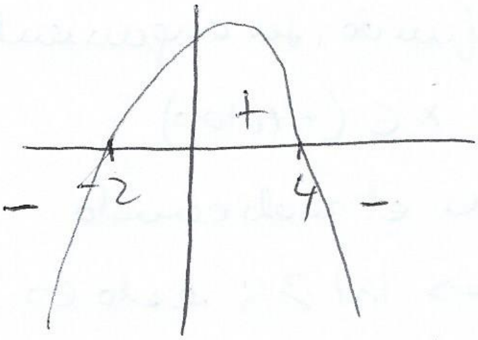
$f(x) = \sqrt{\dfrac{-2}{-x^2+2x+8}}$

→ Para que el cociente $\dfrac{-2}{-x^2+2x+8}$ esté bien definido, el denominador no debe anularse:

ve $-x^2+2x+8 = 0 \longrightarrow x^2-2x-8 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array} \right\} \notin D_f$

→ Para que la raíz $\sqrt{\dfrac{-2}{-x^2+2x+8}}$ exista, el radicando,

$\dfrac{-2}{-x^2+2x+8} \geq 0$ y como el numerador es constante $-2<0$ ha de ser $\underbrace{-x^2+2x+8}_{\text{lo pinto}} \leq 0$



$x \in (-\infty,-2] \cup [4,+\infty)$

Pero como $-2, 4 \notin D_f$ queda

pues: $D_f = (-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$

- Dominio para $g(x)=\dfrac{3x-4}{x-2}$ $\to$ $D_g = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

ya que para $x=2$ el denominador se anula y el cociente no estaría bien definido.

- Dominio para $h(x)=\sqrt{25-x^2}$: para que la raíz cuadrada exista, el radicando ha de ser $25-x^2\geq 0 \to x^2\leq 25 \to$ $\sqrt{x^2}\leq 5 \to |x|\leq 5 \to x\in[-5,5]$ luego $D_h=[-5,5]$

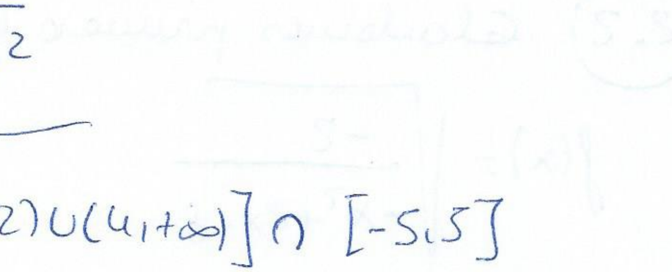
- Dominio para $j(x)=\sqrt{x-1}$: para que la raíz cuadrada exista el radicando ha de ser $x-1\geq 0 \to x\geq 1$ luego $D_j=[1,+\infty)$

- Expresión de $(f+h)(x) = f(x)+h(x) =$

$$= \sqrt{\frac{-2}{-x^2+2x+8}} + \sqrt{25-x^2}$$

$$D_{f+h} = D_f\cap D_h = [(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)]\cap[-5,5]$$

$$D_{f+h} = [-5,-2)\cup(4,5]$$



- Y $D_{\left(\frac{j}{g}\right)} = D_j \cap D_g \setminus \{x \in D_g \ / \ g(x)=0\}$

es $D_j \cap D_g = [1,+\infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \{2\})$

y es $g(x)=0 \Rightarrow \frac{3x-4}{x-2}=0 \Rightarrow 3x-4=0 \Rightarrow x=4/3$

luego $\boxed{D_{j/g} = [1, 4/3) \cup (4/3, 2) \cup (2,+\infty)}$

Expresión: $\left(\frac{j}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\left(\frac{3x-4}{x-2}\right)}$

$\frac{j(x)}{g(x)}$

(2-3) Expresión y dominio de $g \circ j$:

$$(g\circ j)(x) = g(j(x)) = g(\sqrt{x-1}) = \frac{3\sqrt{x-1}-4}{\sqrt{x-1}-2}$$

$$D_{g\circ j} = \{x \in \underbrace{D_j}_{[1,+\infty)} \ / \ j(x) \in \underbrace{D_g}_{\mathbb{R}\setminus\{2\}}\}$$

Veamos si hay algún $x \in D_j = [1,+\infty) \ / \ j(x)=2$:

$$j(x)=2 \Rightarrow \sqrt{x-1}=2 \Rightarrow x-1=4 \Rightarrow x=5 \in D_j$$

luego $\boxed{D_{g\circ j} = [1,5) \cup (5,+\infty)}$

$$(j\circ g)(x) = j(g(x)) = j\left(\frac{3x-4}{x-2}\right) = \sqrt{\frac{3x-4}{x-2}-1}$$

$$D_{j\circ g} = \{x \in D_g = \mathbb{R}\setminus\{2\} \ / \ g(x) \in D_j = [1,+\infty)\}$$

veamos cuales son los $x \in D_j \ / \ g(x) \in D_j$: $\frac{3x-4}{x-2} \geq 1$

$\Rightarrow \frac{3x-4}{x-2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{3x-4-x+2}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-2}{x-2} \geq 0$

Resolvemos la inecuación $\frac{2x-2}{x-2} \geq 0$:

como signo $\left(\frac{2x-2}{x-2}\right)$ = signo $\underbrace{(2x-2)(x-2)}_{\text{parábola}}$ entonces:

representamos $(2x-2)(x-2) = p(x)$ $\quad p(x)=0$ $\nearrow x=1$, $\searrow x=2$

luego $\frac{2x-2}{x-2} \geq 0 \Rightarrow (-\infty, 1] \cup (2,+\infty)$

luego $\boxed{D_{f\circ g} = (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)}$ ↓ no pues $2 \notin D_g$

(2.4) $m(x) = 5 + \ln(3x-1)$

$y = 5 + \ln(3x-1)$

$x = 5 + \ln(3y-1)$

$x - 5 = \ln(3y-1)$

$e^{x-5} = 3y - 1$

$3y = e^{x-5} + 1 \rightarrow y = \frac{1}{3}(e^{x-5} + 1)$

$\boxed{m^{-1}(x) = \frac{1}{3}(e^{x-5} + 1)}$

$n(x) = 3^{\cos 2x} - 2$

$y = 3^{\cos 2x} - 2$

$x = 3^{\cos 2y} - 2$

$x + 2 = 3^{\cos 2y}$

$\log_3 3^{\cos 2y} = \log_3 (x+2)$

$\cos 2y \underbrace{\log_3 3}_{1} = \log_3 (x+2)$

$\cos 2y = \log_3 (x+2)$

$2y = \arccos(\log_3 (x+2))$

$\boxed{n^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arccos(\log_3 (x+2))}$

(1) $f(x) = \frac{|x+1|}{3-x}$, desglosamos la función: $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$-\infty \quad -1 \quad +\infty$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x-1}{3-x} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x+1}{3-x} & \text{si } x > -1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{ (según veremos)}$$

$\rightarrow$ Para $x \leq -1 \Rightarrow f(x) = \frac{-x-1}{3-x}$ no estaría bien definido el cociente para $x = 3$, pero como $3 \not\leq -1$, entonces para $x \leq -1$ el cociente está bien definido.

para $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 \longrightarrow (-1, 0)$ es un PC con OX

$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x-1}{3-x} = 1 \Rightarrow y = 1$ es AH cuando $x \rightarrow -\infty$

Ptos auxiliares para $x \leq -1$

$x=-2 \Rightarrow f(-2) = \frac{-(-2)-1}{3-(-2)} = \frac{1}{5} \longrightarrow (-2, 1/5)$

$x=-3 \Rightarrow f(-3) = \frac{-(-3)-1}{3-(-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \longrightarrow (-3, 1/3)$

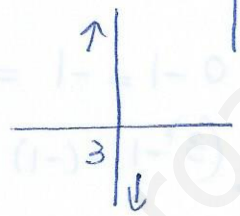
$\rightarrow$ Para $x > -1 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{3-x}$

es $\lim_{x \to -1^+} \frac{x+1}{3-x} = 0 \longrightarrow (-1, 0)$.

Como $x = 3 > -1$ anula al denominador:

$\lim_{x \to 3} \frac{x+1}{3-x} = \frac{4}{0} = ?\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} \frac{x+1}{3-x} = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \to 3^+} \frac{x+1}{3-x} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{cases}$

luego $x = 3$ es AV



es $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{3-x} = -1 \Rightarrow y = -1$ es AH cuando $x \to +\infty$

Ptos auxiliares para $x > -1$

$x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{2+1}{3-2} = \frac{3}{1} = 3 \longrightarrow (2, 3)$

$x = 4 \longrightarrow f(4) = \frac{4+1}{3-4} = \frac{5}{-1} = -5 \longrightarrow (4, -5)$

$x = 5 \rightarrow f(5) = \frac{6}{-2} = -3$

$(5, -3)$

PC eY $x = 0 \longrightarrow f(0) = \frac{1}{3} \longrightarrow (0, 1/3)$

(para $x > -1$ no corta al eje OX pues $\frac{x+1}{3-x} = 0 \rightarrow x = -1$

en realidad, se unen las ramas en $(-1, 0)$)

$\rightarrow$ Posiciones de la gráfica respecto de su AH

para $x \to -\infty$ era $y = 1$ AH estudiamos el signo de:

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x-1}{3-x} - 1 \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-\cancel{x}-1-3+\cancel{x}}{3-x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{3-x} = 0^-$

luego $f < y = 1$

para $x \to +\infty$ es $y=-1$ AH, veamos el signo de:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{3-x}-(-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{3-x}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1+3-x}{3-x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{3-x}=0^-$$ luego $f<y=-1$

$$\to g(x)=\begin{cases} 3^x-1 & \text{si } x<1 \\ \log_{1/3}(x-1) & \text{si } x>1. \end{cases} \qquad D_g=\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

- Para $x<1$ es $g(x)=3^x-1$.

$$\lim_{x\to 1^-} 3^x-1=3^1-1=3-1=2 \to (1,2)\circ$$

$$\lim_{x\to -\infty} 3^x-1=3^{-\infty}-1=0-1=-1 \Rightarrow y=-1 \text{ es AH } x\to-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(3^x-1)-(-1)=\lim_{x\to-\infty}3^{-x}=0^+ \quad f>y=-1$$

Ptos auxiliares:

$$x=0 \to f(0)=3^0-1=1-1=0 \to (0,0) \to \text{PC ex, ey}.$$

$$x=-1 \to f(-1)=3^{-1}-1=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3} \to \left(-1,-\frac{2}{3}\right)$$

- Para $x>1$ es $g(x)=\log_{1/3}(x-1)$

$$\lim_{x\to 1^+}\log_{1/3}(x-1)=+\infty \Rightarrow x=1 \text{ es AV cuando } x\to 1^+$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_{1/3}(x-1)=-\infty$$

Ptos auxiliares:

$$x=4 \to f(4)=\log_{1/3}(4-1)=\log_{1/3}3=-1 \to (4,-1)$$

$$x=10 \to f(10)=\log_{1/3}(10-1)=\log_{1/3}9=-2 \to (10,-2)$$

PC eX $f(x)=0 \rightarrow \log_{1/3}(x-1)=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^0 = x-1$

$1 = x-1 \Rightarrow x=2 \rightarrow (2,0)$

al eje OY no cortará pues $0 \not> 1$.

$\rightarrow h(x) = \cos x + |\cos x| + 1 = \begin{cases} \cos x + (-\cos x) + 1 & \text{si } \cos x \leq 0 \\ \cos x + \cos x + 1 & \text{si } \cos x \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } \cos x \leq 0 \\ 2\cos x + 1 & \text{si } \cos x \geq 0 \end{cases}$

Dibujaremos la gráfica a partir de la de $\cos x$;

$x=0 \rightarrow h(0) = 2 \cdot \cos 0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \rightarrow (0,3)$

$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 1 = 1 \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

$\rightarrow g(x) = \max(\underbrace{5-2x}_{r}, \underbrace{x^2-6x+8}_{P})$

Obtenemos los ptos de intersección:

$\left.\begin{array}{l} y = 5-2x \\ y = x^2-6x+8 \end{array}\right\} \Rightarrow 5-2x = x^2-6x+8 \Rightarrow x^2-4x+3=0$

$x=1 \rightarrow y = 5-2\cdot 1 = 3 \rightarrow (1,3)$

$x=3 \rightarrow y = 5-2\cdot 3 = -1 \rightarrow (3,-1)$

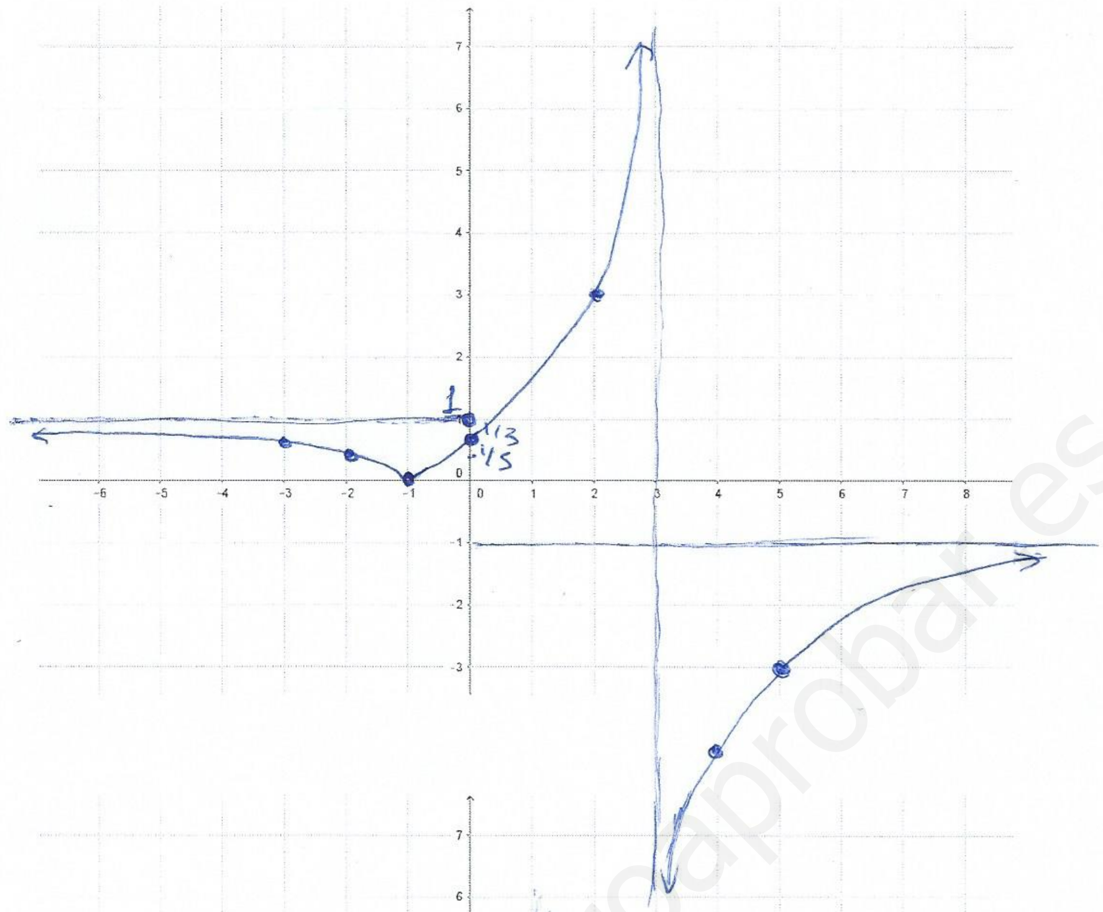
Vértice de la parábola: $p(x) = x^2 - 6x + 8$

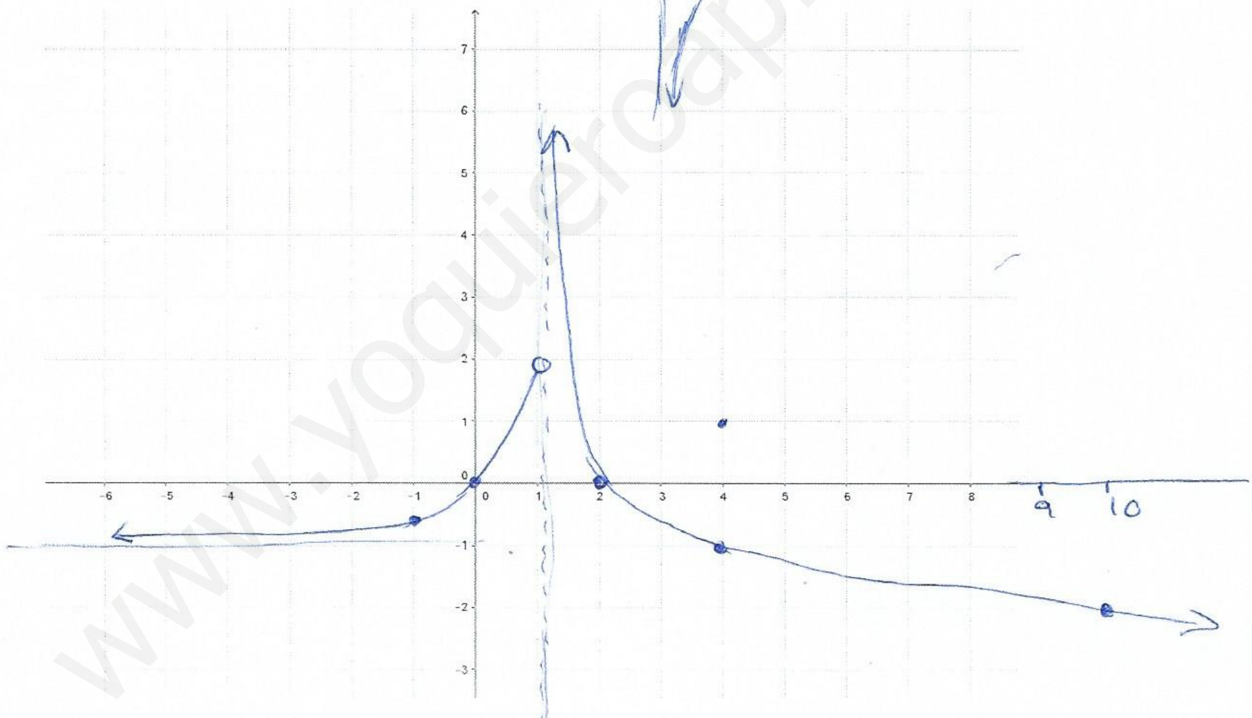
$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$; $y = f(3) = 9 - 18 + 8 = -1 \rightarrow V(3,-1)$

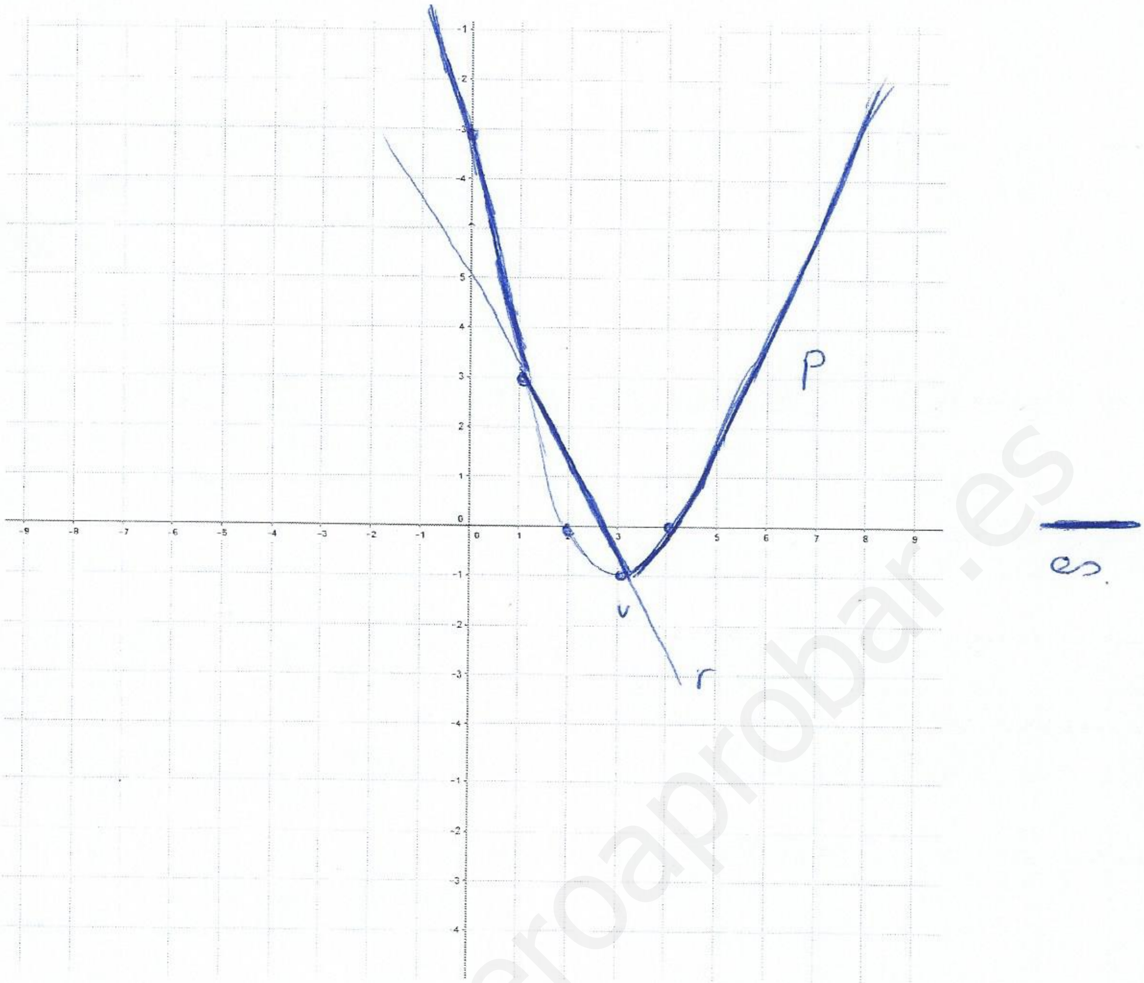
PC eX $p(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \rightarrow (4,0)$

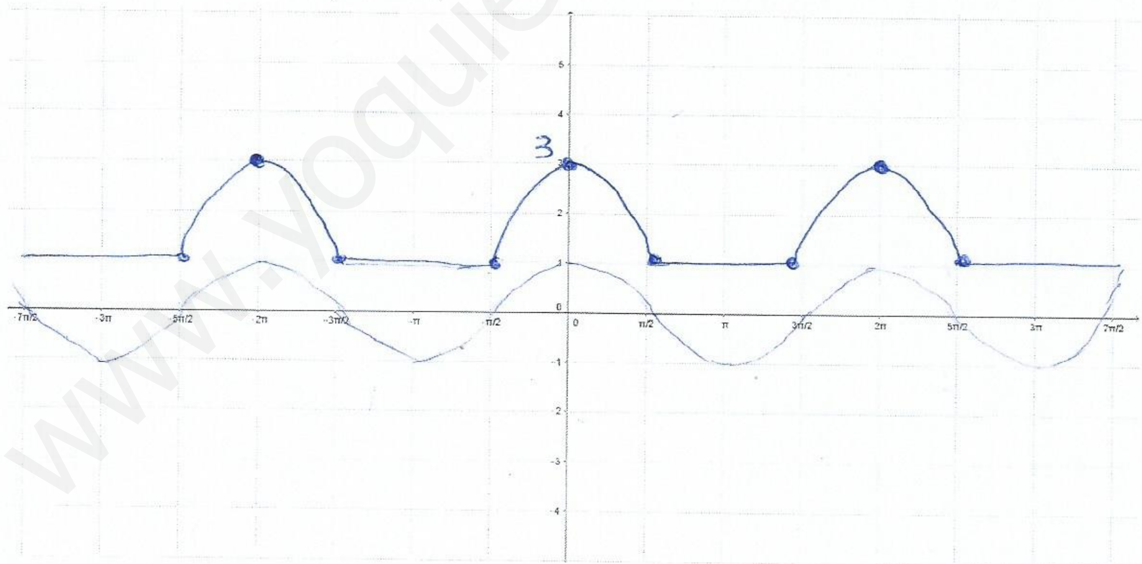
$x = 2 \rightarrow (2,0)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{si } x \leq 1 \\ 5 - 2x & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$


1
1/3
1/5


9
10


P
r
V
es.


3
-7π/2
-3π
-5π/2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
7π/2