RESUMEN TEORÍA FUNCIONES:

- **DEFINICIONES:**

Una **función** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes o variables ***x*** e ***y***, de manera que a cada valor de ***x*** le corresponde un **único** valor de ***y***.

· **Variable independiente: *x***, es la variable cuyos valores se fijan previamente.

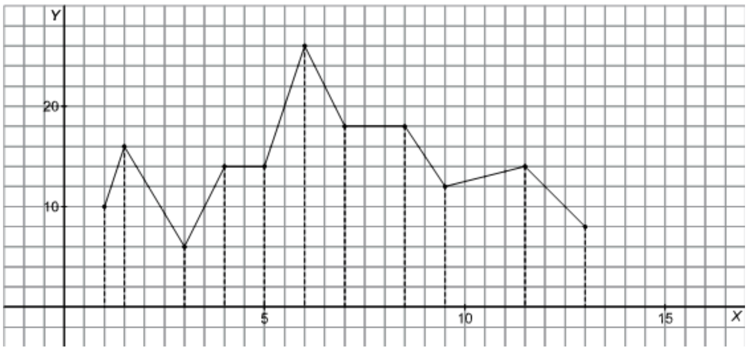
· **Variable dependiente: *y* = f(*x*)**, es la variable que depende de los valores que toma la x.

Una función puede estar definida mediante una **tabla,** por una **gráfica,** o bien, por una **fórmula.**

Se llama **dominio de definición** de una función al conjunto de valores que puede tomar la x, es decir, a los valores de la x para los que existe función. Se designa por **Dom (f).**

La **imagen** o **recorrido** de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente, se designa por **Img (f).**

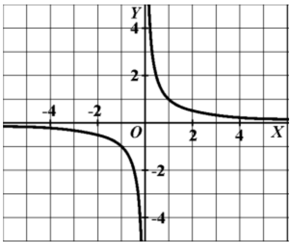
- **Ejemplos:** Halla el dominio y la imagen de las funciones cuya gráfica se representan a continuación.



En este caso:

Dom(f) = [1, 13] e

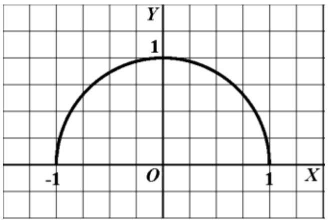
Img(f) = [6, 26]



En este caso:

Dom(f) = ℝ – {0}

Img(f) = ℝ – {0}



En este caso:

Dom(f) = [−1, 1]

Img(f) = [0, 1]

- **DOMINIOS DE ALGUNAS FUNCIONES:**
  - Una **función polinómica,** f(x) = P(x), es aquella función definida mediante un polinomio. Su dominio es el conjunto de los números reales ℝ.
  - Una **función racional**, f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$, es aquella función definida mediante un cociente de polinomios.

    Su dominio es el conjunto de los números reales excepto los valores de x que anulan al denominador.
  - En una **función** dada por **radicales,** f(x) = $\sqrt[n]{g(x)}$, el dominio viene dado por el índice n:
    - Si n es par, el dominio de estas funciones es donde sea positivo el radicando.
    - Si el índice n es impar, el dominio coincide con el dominio del radicando.
- **Ejemplos:** Hallar el dominio de las siguientes funciones:
  - f(x) = $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Esta función es un polinomio, por tanto no tiene ningún tipo de problemas, es decir, su dominio son todos los números reales. Dom(f) = ℝ

- $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 4}$ Esta función es una función racional, ya que es el cociente o división de dos polinomios. Los polinomios no presentan ningún tipo de problemas, pero en una fracción no se puede dividir por 0, por tanto, no estarán en el dominio aquellos números que hagan que el denominador sea 0. Es decir: $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Por lo tanto: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ Esta función es una función radical, de índice par, por lo tanto, no podría calcularse cuando el radicando sea negativo. Calculemos el signo del radicando:

  $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ Los signos cambiarán a los lados de 2 y -2.

  --------------------------|---------------------|-----------------------

  \+ -2 - 2 +

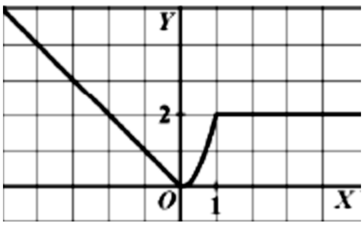
  Por lo tanto, el radicando es positivo a la izquierda de -2 y a la derecha de 2, es decir,

  $Dom(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

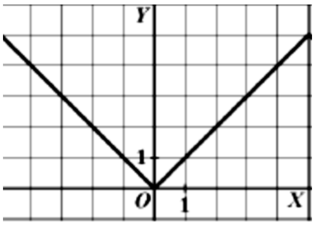
- **FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS:**

Una **función** se dice que está **definida a trozos** cuando no tiene una única fórmula que la defina, sino que tiene distintas fórmulas para diferentes partes de su dominio.

Por ejemplo, la función $f(x) = \begin{cases} -x & si \ \ x < 0 \\ 2x^2 & si \ \ 0 \le x \le 1 \\ 2 & si \ \ x > 1 \end{cases}$ tiene tres trozos. El primer trozo corresponde a los valores de x menores que 0 y es una recta, el segundo trozo abarca desde 0 hasta 1 y es un trozo de parábola, y el tercero es para los números a partir de 1, y es una recta horizontal. Su gráfica es la siguiente:



- **Ejemplos:** Representemos la gráfica de la función valor absoluto: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \ \ x \ge 0 \\ -x & si \ \ x < 0 \end{cases}$

La gráfica es la siguiente: 

- **TASA DE VARIACIÓN MEDIA:**

Se llama **tasa de variación media** de una función en el intervalo [a, b] a la siguiente fórmula:

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

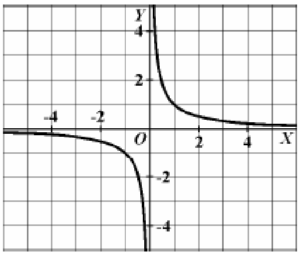
La tasa de variación media mide el aumento o la disminución de la función en el intervalo en el que se esté calculando. Si TVM es positiva, la función ha aumentado y si es negativa, la función ha disminuido.

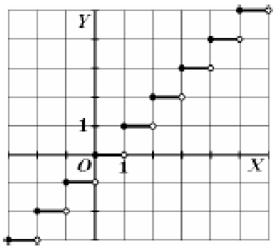
- **<u>Ejemplo:</u>** Calcular la Tasa de variación media de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [2, 4]

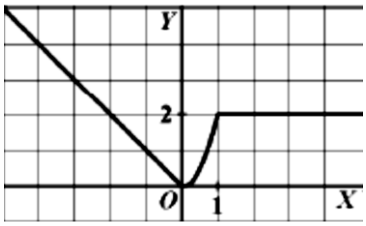
TVM[2, 4] = $\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{16-4}{4-2} = \frac{12}{2} = 6$ En este caso, la función ha aumentado al ir del 2 al 4.

- **<u>CONTINUIDAD:</u>**

Una función es **continua** si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo. Los puntos donde la gráfica se interrumpe se llaman **puntos de discontinuidad**.

a)


b)


c)


Por ejemplo, la función "a" es discontinua en x = 0 porque no está definida (no existe) en ese punto. La función "b" es discontinua en todos los números enteros porque salta en cada uno de ellos. Y la función "c" es continua.

- **<u>CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO:</u>**

Una función es **creciente** cuando al mirar su gráfica de izquierda a derecha, la gráfica sube. Una función es **decreciente** cuando al mirarla de izquierda a derecha, baja. Una función es **constante** cuando ni sube ni baja. Una función no tiene por qué ser entera de la misma forma, puede tener intervalos crecientes, intervalos decrecientes y otros intervalos en los que sea constante.

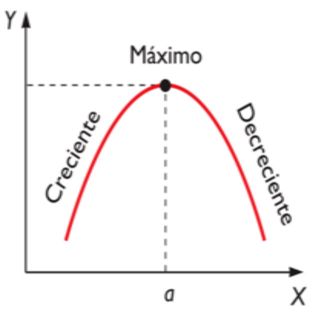
Por ejemplo, en la función "c" del ejemplo anterior podemos decir que es:

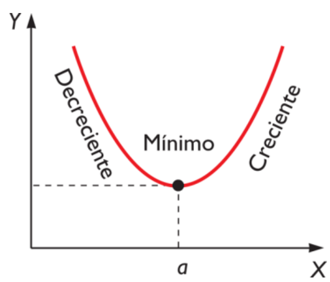
  - Creciente: Desde la izquierda hasta 0, es decir, en el intervalo (-∞, 0)
  - Decreciente: Desde 0 hasta 1, es decir, en el intervalo (0, 1)
  - Constante: De 1 en adelante, (1, +∞)

- **<u>MÁXIMOS Y MÍNIMOS:</u>**

Se dice que una función tiene un **Máximo relativo** en x = a, si el valor de la función en ese punto es más alto que en un entorno alrededor suyo. En este caso, la función pasa de creciente a decreciente.

Se dice que una función tiene un **Mínimo relativo** en x = a, si el valor de la función en ese punto es más bajo que en un entorno a su alrededor. En este caso la función pasa de decreciente a creciente.

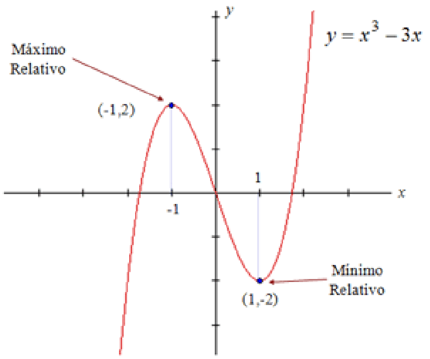




Se dice que una función tiene un **máximo absoluto** en x = a si en ese punto el valor de la función es el más alto de toda la gráfica. Igualmente, una función tiene un **mínimo absoluto** en x = a si en ese punto la función tiene el valor más bajo de toda la gráfica.

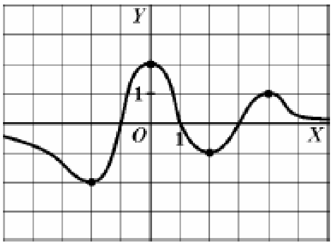
- **Ejemplos:**

a)



En esta función vemos que hay un máximo relativo en x = -1, hay un mínimo relativo en x = 1 y no hay ni máximo ni mínimo absolutos.

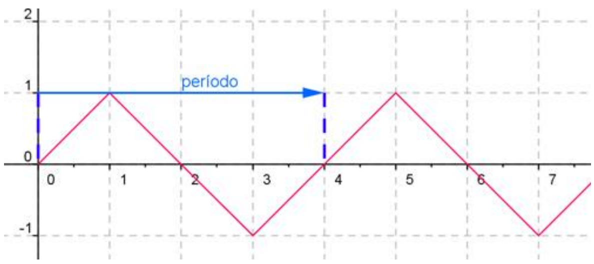
b)



En esta función vemos que hay un mínimo relativo en x = -2, que además es absoluto, hay un máximo relativo en x = 0, que también es absoluto, hay otro mínimo relativo en x= 2 y otro máximo relativo en x =4

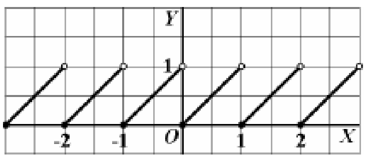
- **PERIODICIDAD:**

Si observamos la gráfica de esta función, vemos que hay un dibujo básico que se va repitiendo a los largo de los ejes coordenados. Esto quiere decir, que los valores de la función se van repitiendo. Cuando esto ocurre se dice que la función es **periódica**. Se llama **periodo**, y se designa por la letra **T**, a la longitud de la figura básica que se repite. En el ejemplo, el periodo vale T = 4. Podemos ver que la función en 1 vale lo mismo que en 5, y valdrá lo mismo que en 9, y así sucesivamente.



- **Ejemplo:**

Estudia la periodicidad de la siguiente función:

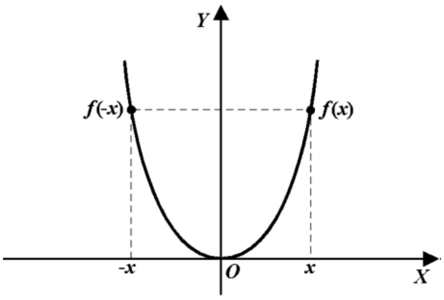


Podemos observar que esta función es periódica de periodo T = 1

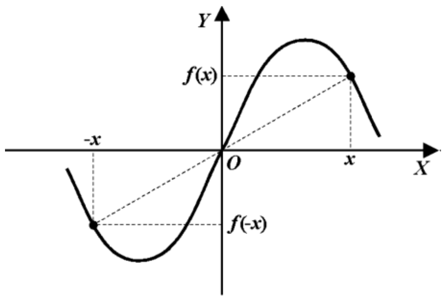
- **<u>SIMETRÍA:</u>**

Una función $y = f(x)$ es **PAR o *simétrica respecto del eje de las x*,** si para cualquier valor x de su dominio se verifica que: $f(-x) = f(x)$

Una función $y = f(x)$ es **IMPAR o *simétrica respecto del origen de coordenadas*** si para cualquier valor x de su dominio se verifica que: $f(-x) = -f(x)$



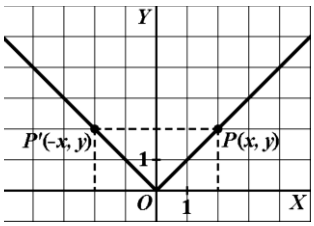
Función PAR



Función IMPAR

- **<u>Ejemplos:</u>**

1) Estudiar la simetría de la función f(x) = |x|:



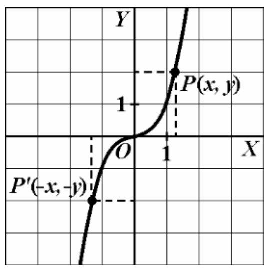
Probamos a ver qué sale f(-x), es decir, en la fórmula de la función cambiamos x por –x a ver qué sale:

f(-x) = |-x| , que vale lo mismo que |x|, ya que sólo hay que quitarles el signo. Es decir, f(-x) = f(x).

Por lo tanto, la función es PAR.

2) Estudiar la simetría de $f(x) = x^3$:

Hacemos f(-x): $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ (porque el exponente es impar). Como vemos, f(-x) ha salido como f(x) pero con el signo contrario, es decir, f(-x) = -f(x). Por lo tanto, la función es IMPAR.



3) Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^4 - 7x^2$ **b)** $f(x) = x^3 + 1$ **c)** $f(x) = 2x^4 + x$ **d)** $f(x) = 2x^3 + x$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 7(-x)^2 = 3x^4 - 7x^2 = f(x)$. La función f es PAR.

b) $f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$ $-f(x) = -x^3 - 1$ No son iguales. La función f no tiene simetría par ni impar.

c) $f(-x) = 2(-x)^4 + (-x) = 2x^4 - x$ $-f(x) = -2x^4 - x$ No son iguales. La función f no tiene simetría par ni impar.

d) $f(-x) = 2(-x)^3 + (-x) = -2x^3 - x$ $-f(x) = -2x^3 - x$ La función f es IMPAR.