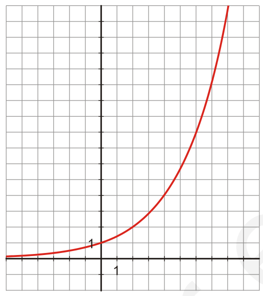
Exponenciales y logarítmicas

EJERCICIO 27 : Representa las siguientes funciones haciendo en cada caso una tabla de valores:
a) $y = 2^{0,5x}$ **b)** $y = -\log_6 x$

Solución:

a) $y = 2^{0,5x}$ equivale a $y = 2^{\frac{x}{2}}$

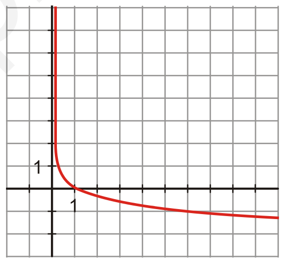
X	-∞	-4	-2	0	2	4	+∞
Y	0	1/4	1/2	1	2	4	+∞



Se observa en la gráfica que es una función creciente, cosa que ya sabíamos puesto que $a = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1$.

b)

X	$6^{-\infty}$	6^{-2}	6^{-1}	6^{0}	6^{1}	6^{2}	$6^{+\infty}$
x	0^{+}	1/36	1/6	1	6	36	+∞
y	+∞	+2	1	0	-1	-2	-∞



EJERCICIO 28
a) **Pon en forma exponencial $4^{0,5x}$ y representa la función $y = 4^{0,5x}$.**

b) **Comprueba si pertenecen a la gráfica de $y = \log_5 x$ los puntos $(-1, 2)$, $(5, 1)$, $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$, (3,-2) y (25,2)**

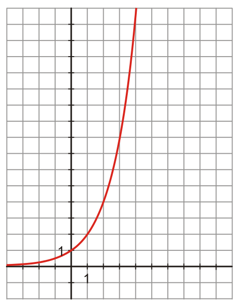
Solución:

a) $4^{0,5x} = \left(4^{0,5}\right)^x = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(\sqrt{4}\right)^x = 2^x$

Representar la función $y = 4^{0,5x}$ equivale a representar la función $y = 2^x$.

Hacemos una tabla de valores:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	0	1/4	1/2	1	2	4	+∞



b) El dominio de definición de $y = log_5 x$ es $(0, +\infty)$, luego el punto $(-1, 2)$ no pertenece al dominio por ser $x = -1 < 0$. El resto de puntos tienen abscisa positiva, luego pueden pertenecer a la gráfica de la función:

$$\left.\begin{array}{l} (5,1) \;\rightarrow\; 1 = log_5 5 \;\rightarrow\; 5^1 = 5 \\ \left(\frac{1}{5},-1\right) \;\rightarrow\; -1 = log_5 \frac{1}{5} \;\rightarrow\; 5^{-1} = \frac{1}{5} \end{array}\right\} \text{Pertenecen a la gráfica.}$$

$$(3,-2) \;\rightarrow\; -2 = log_5 3 \;\rightarrow\; 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \neq 3 \quad \text{No pertenece a la gráfica.}$$

$$(25, 2) \;\rightarrow\; 2 = log_5 25 \;\rightarrow\; 5^2 = 25 \;\rightarrow\; \text{Pertenece a la gráfica.}$$

Los puntos que pertenecen a la gráfica son: $(5, 1)$, $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$ y $(25, 2)$

EJERCICIO 29

a) Halla el valor de k y a para que la gráfica de $y = ka^x$ pase por los puntos $(-1, 6)$ y $\left(2, \frac{3}{4}\right)$.

Indica razonadamente si la función obtenida será creciente o decreciente, sin representarla.

b) Representa la función $y = 2 + log_7 x$.

Solución:

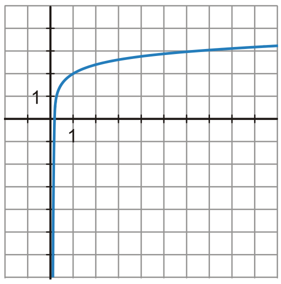
a) $y = ka^x$ pasa por los puntos $(-1, 6)$ y $\left(2, \frac{3}{4}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} 6 = ka^{-1} \\ \frac{3}{4} = ka^2 \end{array}\right\} \frac{ka^2}{ka^{-1}} = \frac{\frac{3}{4}}{6} \;\rightarrow\; a^3 = \frac{3}{24} \;\rightarrow\; a^3 = \frac{1}{8} \;\rightarrow\; a = \frac{1}{2} \Rightarrow 6 = k \cdot \frac{1}{a} \;\rightarrow\; k = 6a \;\rightarrow\; k = 6 \cdot \frac{1}{2} \;\rightarrow\; k = 3$$

La función es $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x$, función decreciente por ser $a = \frac{1}{2} < 1$.

b)

X	$7^{-\infty}$	7^{-2}	7^{-1}	7^0	7^1	7^2	$7^{+\infty}$
x	0	1/49	1/7	1	7	49	+∞
y	-∞	0	1	2	3	4	+∞



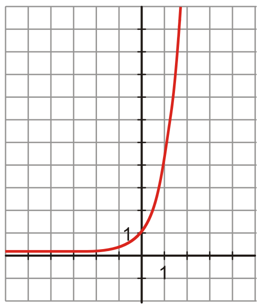
EJERCICIO 30 : Escribe el dominio de la función $y = 4^x$ y represéntala gráficamente. Escribe la expresión analítica y representa la función inversa de $y = 4^x$.

Solución:

- $y = 4^x$ es una función exponencial $\rightarrow$ su dominio son todos los números reales.

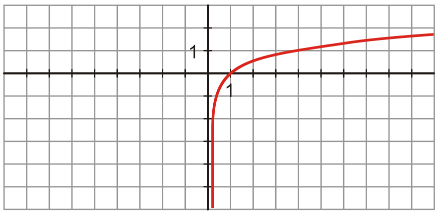
Hagamos una tabla de valores para representarla:

X	-∞	-2	-1	0	1	2	+∞
Y	0	1/16	¼	1	4	16	+∞



- La expresión analítica de la función inversa de $y = 4^x$ es $y = log_4 x$, cuya tabla de valores será:

X	0	1/16	¼	1	4	16	$+\infty$
Y	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$



<u>EJERCICIO 31</u>

a) Construye la gráfica de $y = 0{,}7^x$ y, apartir de ella, representa la función $y = 0{,}7^x + 2$.

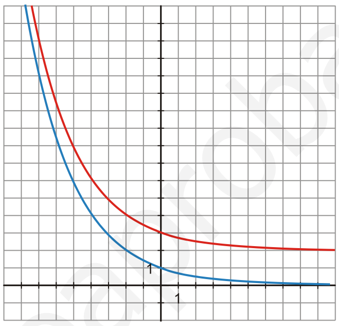
b) Indica cuál es el dominio de la función $y = log\ x$ y escribe tres puntos que pertenezcan a la gráfica.

Solución:

a) $y = 0{,}7^x$: función exponencial de base $a = 0{,}7 < 1$, luego decrece en su dominio, que es $\mathbb{R}$.

- Hagamos una tabla de valores:

X	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
Y	$+\infty$	2,0	1,43	1	0,7	0,49	0



La función $y = 0{,}7^x + 2$ se obtiene desplazando dos unidades hacia arriba la gráfica anterior, o lo que es igual, sumando 2 unidades a los valores obtenidos anteriormente para y.

b) $y = log_{10} x \;\rightarrow\;$ dominio de definición: $(0, +\infty)$

$$(10, 1) \;\rightarrow\; 1 = log_{10} 10$$

$$(100, 2) \;\rightarrow\; 2 = log_{10} 100 \;\rightarrow\; 10^2 = 100$$

$$\left(\frac{1}{10}, -1\right) \;\rightarrow\; -1 = log_{10} \frac{1}{10} \;\rightarrow\; 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

<u>EJERCICIO 32</u> : Calcula, usando la definición de logaritmo, y sin calculadora:

a) $\log_3 \sqrt[5]{81}$ **b)** $\log 0{,}001$ **c)** $\log_4 \frac{1}{64}$ **d)** $\log_5 \frac{1}{25}$ **e)** $\log_5 \sqrt[4]{5}$ **f)** $\log_5 25$

g) $\log_7 \sqrt[3]{49}$ **h)** $\log_2 512$ **i)** $\log_5 0{,}008$ **j)** $\log_2 \sqrt[4]{4}$ **k)** $\log_2 0{,}5$ **l)** $\log_2 256$

m) $\log \sqrt{0{,}01}$ **n)** $\log_6 \frac{5}{30}$ **ñ)** $\log_3 243$

Solución:

a) $log_3 \sqrt[5]{81} = log_3 \sqrt[5]{3^4} = log_3 3^{\frac{4}{5}} = \frac{4}{5} \underbrace{log_3 3}_{1} = \frac{4}{5}$

b) $log\ 0{,}001 = log\ 10^{-3} = -3 \underbrace{log\ 10}_{1} = -3$

c) $log_4 \frac{1}{64} = \underbrace{log_4 1}_{0} - log_4 64 = -log_4 4^3 = -3 \underbrace{log_4 4}_{1} = -3$

d) a) $log_5 \frac{1}{25} = \underbrace{log_5 1}_{0} - log_5 25 = -log_5 5^5 = -2 \underbrace{log_5 5}_{1} = -2$

e) b) $log_5 \sqrt[4]{5} = log_5 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \underbrace{log_5 5}_{1} = \frac{1}{4}$

f) $log_5 125 = log_5 5^3 = 3\ log_5 5 = 3$

g) a) $log_7\sqrt[3]{49} = log_7\sqrt[3]{7^2} = log_7 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\underbrace{log_7 7}_{1} = \frac{2}{3}$ h) b) $log_2 512 = log_2 2^9 = 9\cdot\underbrace{log_2 2}_{1} = 9$

i) c) $log_5 0{,}008 = log_5\frac{8}{1000} = log_5\frac{1}{125} = log_5 5^{-3} = -3\underbrace{log_5 5}_{1} = -3$

j) a) $log_2\sqrt[4]{4} = log_2\sqrt[4]{2^2} = log_2 2^{\frac{2}{4}} = log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\underbrace{log_2 2}_{1} = \frac{1}{2}$

k) b) $log_2 0{,}5 = log_2\frac{1}{2} = log_2 2^{-1} = -1 log_2 2 = -1$ l) c) $log_2 256 = log_2 2^8 = 8\ log_2 2 = 8$

m) a) $log\sqrt{0{,}01} = log\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}log\ 10^{-2} = -\frac{2}{2}\underbrace{log 10}_{1} = -1$

n) b) $log_6\frac{5}{30} = log_6\frac{1}{6} = log_6 6^{-1} = -1\underbrace{log_6 6}_{1} = -1$ ñ) c) $log_3 243 = log_3 3^5 = 5\cdot\underbrace{log_3 3}_{1} = 5$

<u>EJERCICIO 33</u> : Resuelve estas ecuaciones:

a) $5^{2x^2+1} = 125$ **b)** $\log_3(5x-3) = 3$ **c)** $2^{2x-6} = 0{,}25^{x-1}$ **d)** $\log_5(2x^2 - x) = 0$

e) $\sqrt[5]{49} = 7^{x^2+\frac{6}{25}}$ **f)** $\log_2(x-1) = 2$ **g)** $3^{3x-1} = 9^{x+6}$ **h)** $\log_2(x^2-5x+8) = 2$

i) $4^{x^2-8x} = 1$ **j)** **log (11x – 1) = -1**

Solución:

a) Expresamos como potencia de 5 el segundo miembro e igualamos los exponentes:

$5^{2x^2+1} = 125 \rightarrow 5^{2x^2+1} = 5^3 \rightarrow 2x^2+1 = 3 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

b) Aplicamos la definición de logaritmo:

$log_3(5x-3) = 3 \rightarrow 5x-3 = 3^3 \rightarrow 5x-3 = 27 \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$

<u>Comprobación de la solución</u> $log_3(5\cdot 6 - 3) = log_3 27 = log_3 3^3 = 3\cdot log_3 3 = 3 \rightarrow$ Solución válida

c) Expresamos el segundo miembro como potencia de 2. A continuación, igualamos exponentes:

$$2^{2x-6} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$$

$$2^{2x-6} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x-1} \rightarrow 2^{2x-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2} \rightarrow 2^{2x-6} = \left(2^{-1}\right)^{2x-2} \rightarrow 2^{2x-6} = 2^{-2x+2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x-6 = -2x+2 \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2$$

d) $log_5(2x^2 - x) = 0$, aplicando la definición de logaritmo, equivale a $2x^2 - x = 5^0 \rightarrow$

$$\rightarrow 2x^2 - x = 1 \rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1\pm 3}{4} \begin{cases} 1 \\ \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

<u>Comprobación de las soluciones</u>

Si $x = 1 \rightarrow log_5(2-1) = log_5 1 = 0 \rightarrow x = 1$ es solución.

Si $x = \frac{-1}{2} \rightarrow log_5\left(2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = log_5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = log_5 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2}$ también es solución.

e) Expresamos el primer miembro como potencia de 7 e igualamos exponentes:

$$\sqrt[5]{49} = 7^{x^2+\frac{6}{25}} \rightarrow \sqrt[5]{7^2} = 7^{x^2+\frac{6}{25}} \rightarrow 7^{\frac{2}{5}} = 7^{x^2+\frac{6}{25}} \rightarrow \frac{2}{5} = x^2 + \frac{6}{25} \rightarrow x^2 = \frac{2}{5} - \frac{6}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{4}{25} \rightarrow x = \pm\frac{2}{5}$$

f) Aplicando la definición de logaritmo, se obtiene:

$$log_2(x-1) = -2 \rightarrow x-1 = 2^{-2} \rightarrow x-1 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4}+1 \rightarrow x = \frac{5}{4}$$

Comprobación de la solución: $log_2\left(\frac{5}{4}-1\right)=log_2\frac{1}{4}=log_2 2^{-2}=-2log_2 2=-2 \quad\to\quad$ válida

La solución es: $x=\frac{5}{4}$

g) Expresamos como potencia de 3 el segundo miembro e igualamos exponentes:

$3^{3x-1}=9^{x+5} \quad\to\quad 3^{3x-1}=\left(3^2\right)^{x+5} \quad\to\quad 3^{3x-1}=3^{2x+10} \quad\to\quad 3x-1=2x+10 \quad\to\quad x=11$

h) $log_2\,(x^2-5x+8)=2 \quad\to\quad x^2-5x+8=2^2$ (hemos aplicado la definición de logaritmo) $\to$

$\to\quad x^2-5x+8=4 \quad\to\quad x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm3}{2}\begin{cases}4\\1\end{cases}$

Comprobación de las soluciones

Si $x=4 \quad\to\quad log_2\,(16-20+8)=log_2\,4=log_2\,2^2=2\,log_2\,2=2 \quad\to\quad x=4$ es solución.

Si $x=1 \quad\to\quad log_2\,(1-5+8)=log_2\,4=log_2\,2^2=2\,log_2\,2=2 \quad\to\quad x=1$ es solución.

i) a) $4^{x^2-3x}=1$ equivale a $4^{x^2-3x}=4^0$

Igualando exponentes: $x^2-3x=0 \quad\to\quad x\,(x-3)=0$

Luego $x=0$ y $x=3$ son las soluciones.

j) $log\,(11x-1)=-1$ equivale a $11x-1=10^{-1}$ (hemos aplicado la definición de logaritmo)

$11x-1=\frac{1}{10} \quad\to\quad 11x=\frac{1}{10}+1 \quad\to\quad 11x=\frac{11}{10} \quad\to\quad x=\frac{1}{10}$

Comprobación de la solución $\quad log\left(\frac{11}{10}-1\right)=log\frac{1}{10}=log\,10^{-1}=-1\,log\,10=-1$

La solución $x=\frac{1}{10}$ es válida.

Problemas

EJERCICIO 34 : Colocamos en el banco 25 000 € al 5% de interés anual.

a) Escribe la función que expresa el capital acumulado en función del tiempo, t, que permanezca el dinero en el banco.

b) ¿Cuánto tardará el dinero en duplicarse?

Solución:

a) C = capital acumulado

5% de interés anual significa que el capital que hay a principios de año se multiplica por 1,05 al final. La expresión que da el capital acumulado al cabo de t años es: $C=25000\cdot1{,}05^t \quad t\geq0$

b) Nos piden calcular t para que el capital se duplique:

$25000\cdot1{,}05^t=50000 \quad\to\quad 1{,}05^t=2 \quad\to\quad t\approx15$ años

Tardará en duplicarse, aproximadamente, 15 años.

EJERCICIO 35 : Se cerca una finca rectangular de área A con 42 m de alambrada, sin que sobre ni falte nada.

a) Expresa el área de la finca en función de uno de sus lados

b) Representa gráficamente la expresión anterior.

c) ¿Cuál es el dominio de definición?

d) ¿Para qué valor de los lados obtenemos la finca de área máxima?

Solución:

Las dimensiones de la finca son x, $21-x$.

a) A = área de la finca

La expresión analítica buscada es $A(x)=x\,(21-x) \quad\to\quad A(x)=-x^2+21x$, que es una función cuadrática.

b) Será una parábola abierta hacia abajo:

- Vértice: $x=\frac{21}{2} \qquad y=-\frac{441}{4}+\frac{441}{2}=\frac{441}{4}=110{,}25 \;\Rightarrow V\,(10{,}5;\,110{,}25)$