11 Aplicaciones de las derivadas

1. Representación de funciones polinómicas

Piensa y calcula

Calcula mentalmente: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x)$

Solución:

a) $+\infty$ b) $-\infty$

Aplica la teoría

Representa las siguientes funciones polinómicas completando el formulario de los diez apartados.

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

Solución:

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12$

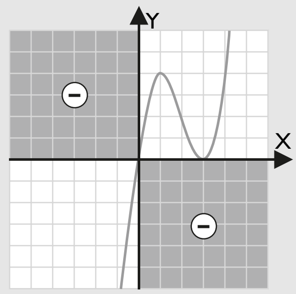
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(3, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, 3) \cup (3, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: B(1, 4)
   - Mínimo relativo: A(3, 0)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(1, 3)$
9. Puntos de inflexión: D(2, 2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(2, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 2)$



10. Recorrido o imagen:
    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

2. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$

Solución:

$y' = -3x^2 - 6x$

$y'' = -6x - 6$

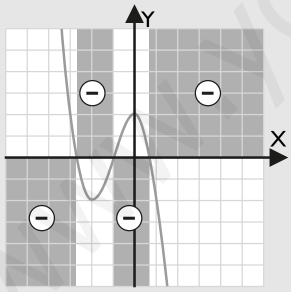
$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A\left(-\sqrt{3} - 1, 0\right)$, $B(-1, 0)$, $C\left(\sqrt{3} - 1, 0\right)$
   - Eje Y: $D(0, 2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-\infty, -\sqrt{3} - 1\right) \cup \left(-1, \sqrt{3} - 1\right)$
   - Negativa (–): $\left(-\sqrt{3} - 1, -1\right) \cup \left(\sqrt{3} - 1, +\infty\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $D(0, 2)$
   - Mínimo relativo: $E(-2, -2)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-2, 0)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $F(-1, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -1)$
   - Cóncava (∩): $(-1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. $y = x^4 - 2x^3$

Solución:

$y' = 4x^3 - 6x^2$

$y'' = 12x^2 - 12x$

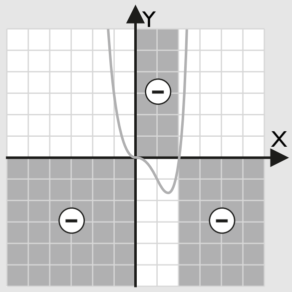
$y''' = 24x - 12$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $B(3/2, -27/16)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(3/2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 3/2)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$, $C(1, -1)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(0, 1)$



10. Recorrido o imagen:
    $Im(f) = [-27/16, +\infty)$

4. $y = -x^4 + 2x^2$

Solución:

$y' = -4x^3 + 4x$

$y'' = -12x^2 + 4$

$y''' = -24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:

   • Verticales: no tiene.

   • Horizontales: no tiene.

   • Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

   • Eje X: $A\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $O(0, 0)$, $B\left(\sqrt{2}, 0\right)$

   • Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:

   • Positiva (+): $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$

   • Negativa (–): $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$

8. Máximos y mínimos relativos:

   a) Máximo relativo: $C(-1, 1)$, $D(1, 1)$

   b) Mínimo relativo: $O(0, 0)$

   Monotonía:

   • Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

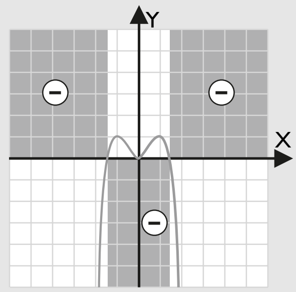
   • Decreciente ($\searrow$): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $E\left(-\sqrt{3}/3, 5/9\right)$, $F\left(\sqrt{3}/3, 5/9\right)$

   Curvatura:

   • Convexa ($\cup$): $\left(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\right)$

   • Cóncava ($\cap$): $\left(-\infty, -\sqrt{3}/3\right) \cup \left(\sqrt{3}/3, +\infty\right)$

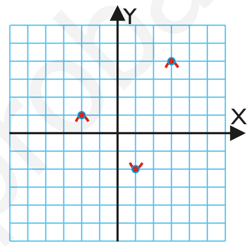


10. Recorrido o imagen:

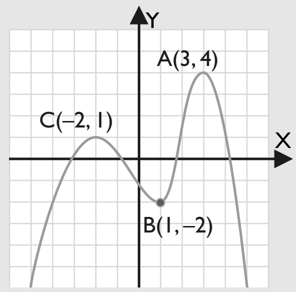
    $Im(f) = (-\infty, 1]$

5. De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto $A(3, 4)$, un mínimo relativo en el punto $B(1, -2)$, otro máximo relativo en el punto $C(-2, 1)$, y que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.



Solución:



2. Representación de funciones racionales

Piensa y calcula

Calcula mentalmente: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

a) $+\infty$ b) $-\infty$

Aplica la teoría

Representa las siguientes funciones racionales completando el formulario de los diez apartados.

6. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

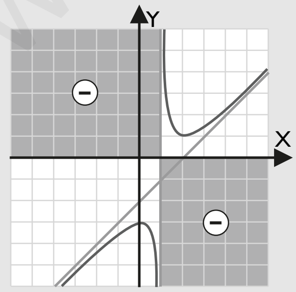
$y''' = -\dfrac{6}{(x-1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x - 2$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: $A(0, -3)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(0, -3)$
   - Mínimo relativo: $B(2, 1)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

7. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

$y'' = \dfrac{6x^2 + 2}{(x^2-1)^3}$

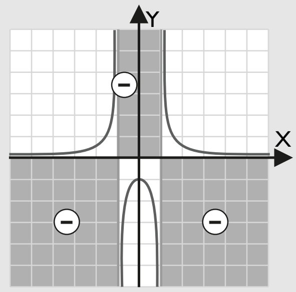
$y''' = -\dfrac{24x^3 + 24x}{(x^2-1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =$
   $= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$ y $x = -1$, donde tiene discontinuidades de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par ⇒ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1, x = 1$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: $A(0, -1)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(0, -1)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   - Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

8. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$

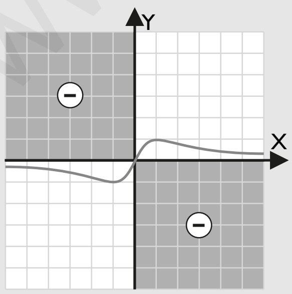
$y''' = -\dfrac{12(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje origen de coordenadas $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(1, 1)$
   - Mínimo relativo: $B(-1, -1)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-1, 1)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $C\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2\right)$, $O(0, 0)$, $D\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2\right)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
   - Cóncava ($\cap$): $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [-1, 1]$

9. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

$y'' = -\dfrac{2}{x^3}$

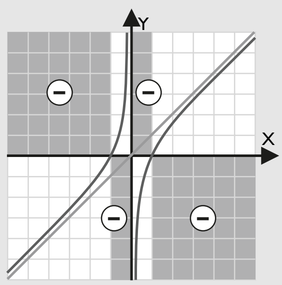
$y''' = \dfrac{6}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje origen de coordenadas $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Decreciente ($\searrow$): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0)$
   - Cóncava ($\cap$): $(0, +\infty)$



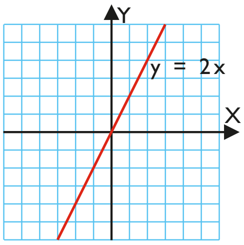
10. Recorrido o imagen:

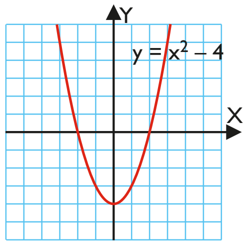
    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

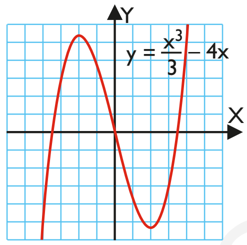
3. Problemas con condiciones

Piensa y calcula

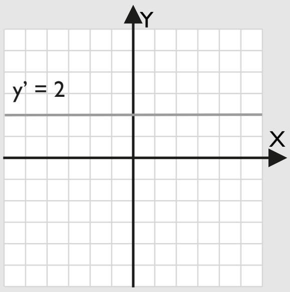
Halla y representa la función derivada de cada una de las siguientes funciones polinómicas. ¿Qué relación hay entre el grado de cada una de ellas y el de su derivada?

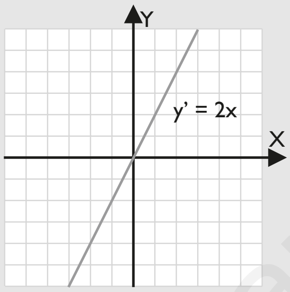


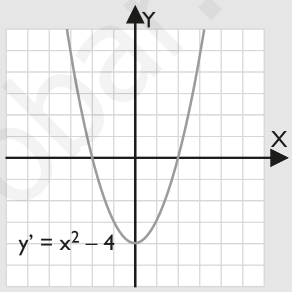




Solución:







La función derivada de una función polinómica es otra función polinómica de un grado menor.

Aplica la teoría

10. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$$

tenga un mínimo relativo en el punto P(1, –4)

Solución:

Pasa por P(1, –4)

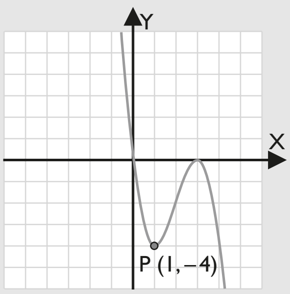
$y = -x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow -1 + a + b = -4$

Por ser P(1, –4) un mínimo: $y'(1) = 0$

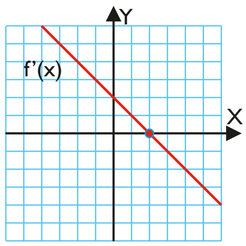
$y' = -3x^2 + 2ax + b \Rightarrow -3 + 2a + b = 0$

Resolviendo el sistema: $a = 6, b = -9$

$y = -x^3 + 6x^2 - 9x$



11. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:



Resuelve los siguientes apartados:

a) Estudia la monotonía.

b) Calcula la pendiente de la recta tangente para x = 3

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

Solución:

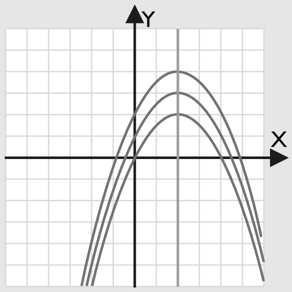
a) La función f(x) es creciente en: $(-\infty, 2)$

La función f(x) es decreciente en: $(2, +\infty)$

b) $f'(3) = -1$

c) Tiene un máximo relativo en $x = 2$

d)



12. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3$$

tenga un punto de inflexión en el punto $P(1, -1)$

Solución:

Pasa por $P(1, -1)$

$y = ax^4 + bx^3 \Rightarrow a + b = -1$

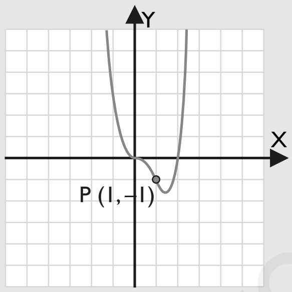
Por ser $P(1, -1)$ un punto de inflexión: $y''(1) = 0$

$y' = 4ax^3 + 3bx^2$

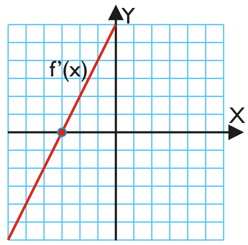
$y'' = 12ax^2 + 6bx \Rightarrow 12a + 6b = 0$

Resolviendo el sistema: $a = 1, b = -2$

$y = x^4 - 2x^3$



13. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:



Resuelve los siguientes apartados:

a) Estudia la monotonía.

b) Calcula la pendiente de la recta tangente para $x = -2$

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

Solución:

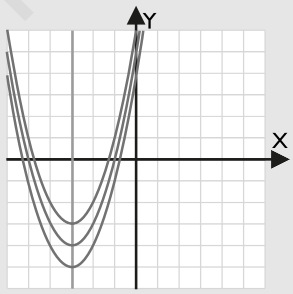
a) La función f(x) es creciente en: $(-3, +\infty)$

La función f(x) es decreciente en: $(-\infty, -3)$

b) $f'(-2) = 2$

c) Tiene un mínimo relativo en $x = -3$

d)



4. Aplicaciones de las derivadas a otras áreas

Piensa y calcula

En una ciudad hay una epidemia de gripe, y la función que define el número de enfermos es:

$$f(x) = 125 + 20x - x^2$$

donde **x** se mide en días, e **y,** en miles de personas. Calcula mentalmente cuántos enfermos de gripe hay el día en que se detecta la epidemia, es decir, en el momento $x = 0$

Solución:

125 000 personas.

Aplica la teoría

14. Un movimiento está definido por la función:

$$e(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3$$

donde **t** se mide en segundos, y **e,** en metros.

Calcula:

a) el espacio recorrido al cabo de 5 s

b) la velocidad.

c) la velocidad al cabo de 5 s

d) la aceleración.

e) la aceleración al cabo de 5 s

Solución:

a) $e(5) = 48$ m

b) $v(t) = e'(t) = 3t^2 - 6t - 1$

c) $v(5) = 44$ m/s

d) $a(t) = v'(t) = e''(t) = 6t - 6$

e) $a(5) = 24$ m/s^2

15. La resistencia de una viga, en función del peso que soporta, viene dada por: $R(x) = 3x - x^2$

donde **x** se mide en toneladas. Calcula el peso máximo que soporta.

Solución:

$R'(x) = 3 - 2x$

$R'(x) = 0 \Rightarrow x = 3/2$

$R''(x) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo

$x = 1\,500$ kg es el máximo peso soportado.

16. Los beneficios de una empresa, en función del número de piezas producidas, vienen dados por:

$$B(x) = -3x^4 + 28x^3 - 84x^2 + 96x - 25$$

donde **x** se mide en miles de piezas. Calcula el número de piezas que tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

Solución:

$B'(x) = -12x^3 + 84x^2 - 168x + 96$

$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2, x = 4$

$B''(x) = -36x^2 + 168x - 168$

Máximos relativos: A(1, 12), B(4, 39)

Mínimo relativo: C(2, 7)

El mayor máximo relativo se obtiene en 4 000 unidades.

17. La concentración en la sangre de un medicamento puesto mediante una inyección intravenosa viene dado por:

$$C(t) = 4 - t^2/16$$

donde **t** es el número de horas que transcurren desde que se inyecta el medicamento en la sangre.

Calcula la velocidad de la concentración.

Solución:

$C'(t) = -t/8$

5. Problemas de optimización

Piensa y calcula

Un rectángulo tiene 12 m de perímetro; luego el ancho más el largo es 6 m. Completa la siguiente tabla:

Largo = x	0	1	2	3	4	5	6
Alto = y	6						
Superficie							

Calcula las dimensiones del rectángulo que tiene mayor superficie.

Solución:

Largo = x	0	1	2	3	4	5	6
Alto = y	6	5	4	3	2	1	0
Superficie	0	5	8	9	8	5	0

El rectángulo de mayor superficie es un cuadrado de lado x = y = 3 m

Aplica la teoría

18. Calcula dos números cuya suma sea 60 y de forma que sea mínimo el cuadrado del primero más el doble del cuadrado del segundo.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = primer número.

y = segundo número.

$x + y = 60$

b) Función que hay que minimizar.

$f(x, y) = x^2 + 2y^2$

Sujeto a: $x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - x$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x, y) = x^2 + 2y^2$

$f(x) = x^2 + 2(60 - x)^2$

$f(x) = 3x^2 - 240x + 7200$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = 6x - 240$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$

Si $x = 40 \Rightarrow y = 20$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$f''(x) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.

El primer número es $x = 40$, y el segundo, $y = 20$

19. Un ganadero quiere cercar un recinto de forma rectangular en un prado para que puedan pastar las vacas. Si dispone de 1 600 m de cerca, ¿cuánto medirá de largo y de ancho el recinto para que la superficie del recinto sea máxima?

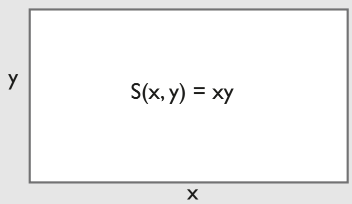
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo:

x = longitud de la base.

y = altura.

Perímetro = 1600 m



b) Función que hay que maximizar.

$S(x, y) = xy$

Sujeta a las condiciones:

Perímetro = 1600 m $\Rightarrow x + y = 800$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.

$S(x, y) = xy$

$x + y = 800 \Rightarrow y = 800 - x$

$S(x) = x(800 - x)$

$S(x) = 800x - x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$S'(x) = 800 - 2x$

$S'(x) = 0 \Rightarrow x = 400$

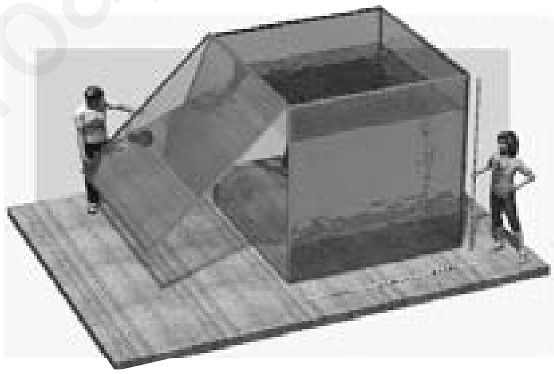
Si $x = 400 \Rightarrow y = 400$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.

$S''(x) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El recinto es un cuadrado que mide 400 m de lado.

20. Se quiere construir un recipiente en forma de prisma cuadrangular tal que el volumen sea máximo. Si la superficie es de 24 m², ¿qué dimensiones debe tener la caja?



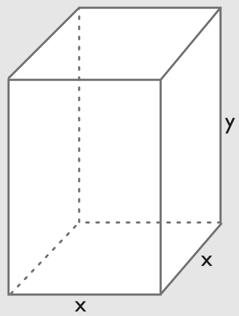
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = longitud de la base.

y = altura.

Superficie = 24 m²



b) Función que hay que minimizar.

$V(x, y) = x^2y$

Sujeta a las condiciones:

Superficie = 24 $m^2 \Rightarrow 4xy + 2x^2 = 24 \Rightarrow 2xy + x^2 = 12$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$V(x, y) = x^2y$

$2xy + x^2 = 12 \Rightarrow y = \dfrac{12 - x^2}{2x}$

$V(x) = \dfrac{x(12 - x^2)}{2}$

$V(x) = \dfrac{1}{2}(12x - x^3)$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$V'(x) = \dfrac{1}{2}(12 - 3x^2)$

$V'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ y $x = 2$

(La solución negativa no tiene sentido).

Si $x = 2 \Rightarrow y = 2$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$V''(x) = -3x$

$V''(2) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) La caja es un cubo de arista 2 m y tendrá un volumen de 8 m^3

Ejercicios y problemas

1. Representación de funciones polinómicas

21. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^3}{6} - 2x$$

Solución:

$y' = x^2/2 - 2$

$y'' = x$

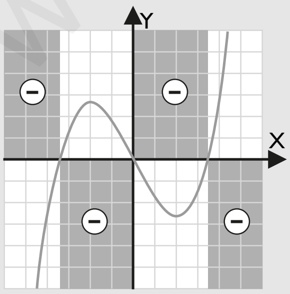
$y''' = 1$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A(-2\sqrt{3}, 0)$, $B(2\sqrt{3}, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(-2, 8/3)$
   - Mínimo relativo: $D(2, -8/3)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-2, 2)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

22. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^3 + 3x$$

Solución:

$y' = -3x^2 + 3$

$y'' = -6x$

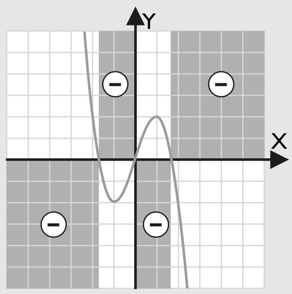
$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A(-\sqrt{3}, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
   - Negativa (–): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(1, 2)$
   - Mínimo relativo: $D(-1, -2)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-1, 1)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0)$
   - Cóncava ($\cap$): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

23. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 - 4x^2$$

Solución:

$y' = 4x^3 - 8x$

$y'' = 12x^2 - 8$

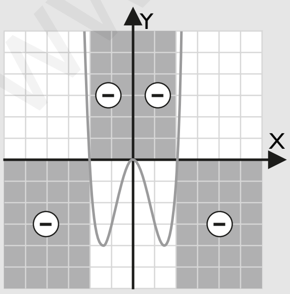
$y''' = 24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $O(0, 0)$
   - Mínimo relativo: $C\left(-\sqrt{2}, -4\right)$, $D\left(\sqrt{2}, -4\right)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$
   - Decreciente ($\searrow$): $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$
9. Puntos de inflexión: $E\left(-\sqrt{6}/3, -20/9\right)$, $F\left(\sqrt{6}/3, -20/9\right)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $\left(-\infty, -\sqrt{6}/3\right) \cup \left(\sqrt{6}/3, +\infty\right)$
   - Cóncava ($\cap$): $\left(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3\right)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

24. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^4 + 6x^2 - 5$$

Solución:

$y' = -4x^3 + 12x$

$y'' = -12x^2 + 12$

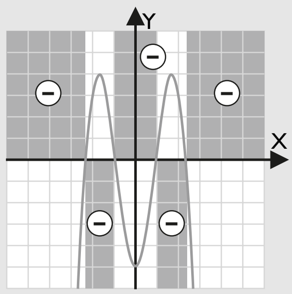
$y''' = -24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A\left(-\sqrt{5}, 0\right)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$, $D\left(\sqrt{5}, 0\right)$
   - Eje Y: $E(0, -5)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-\sqrt{5}, -1\right) \cup \left(1, \sqrt{5}\right)$
   - Negativa (–): $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup (-1, 1) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $F\left(-\sqrt{3}, 4\right)$, $G\left(\sqrt{3}, 4\right)$
   - Mínimo relativo: $E(0, -5)$

   Montonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$
   - Decreciente ($\searrow$): $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
9. Puntos de inflexión: $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-1, 1)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



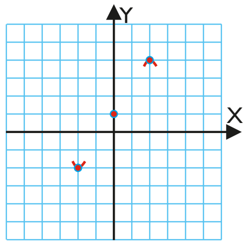
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$

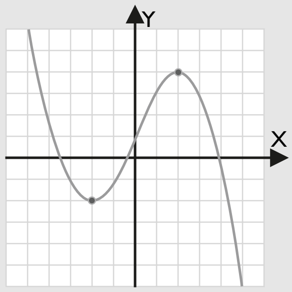
25. De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto A(2, 4), un mínimo relativo en el punto B(– 2, – 2), un punto de inflexión en el punto C(0, 1) y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.



Solución:



2. Representación de funciones racionales

26. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 + 4}{2x}$$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2}$

$y'' = \dfrac{4}{x^3}$

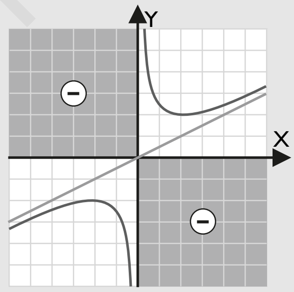
$y''' = -\dfrac{12}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x/2$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(– 2, – 2)
   - Mínimo relativo: B(2, 2)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:
    Im(f) = $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

27. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{1 - x}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{4}{(x - 1)^3}$

$y''' = -\dfrac{12}{(x - 1)^4}$

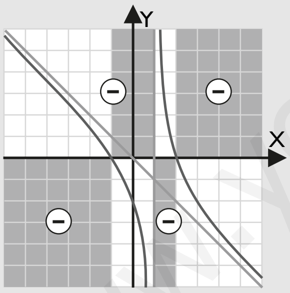
1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

3. Continuidad: es discontinua en x = 1, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: x = 1
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: y = – x
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(– 1, 0), B(2, 0)
   - Eje Y: C(0, – 2)

   Signo:
   - Positiva (+): (– ∞, – 1) ∪ (1, 2)
   - Negativa (–): (– 1, 1) ∪ (2, + ∞)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): ∅
   - Decreciente (↘): (– ∞, 1) ∪ (1, + ∞)
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): (1, + ∞)
   - Cóncava (∩): (– ∞, 1)



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = ℝ = (– ∞, + ∞)

28. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Solución:

$$y' = -\frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y'' = \frac{36x^2 - 36}{(x^2 + 3)^3}$$

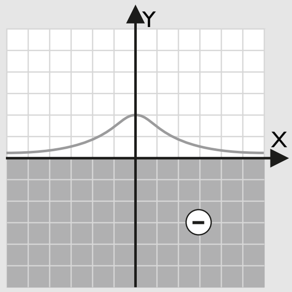
$$y''' = \frac{-144x^3 + 432x}{(x^2 + 3)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = ℝ = (– ∞, + ∞)
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par ⇒ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: y = 0
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(0, 2)

   Signo:
   - Positiva (+): ℝ = (– ∞, + ∞)
   - Negativa (–): ∅
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(0, 2)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (– ∞, 0)
   - Decreciente (↘): (0, + ∞)
9. Puntos de inflexión: B(– 1, 3/2), C(1, 3/2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): (– ∞, – 1) ∪ (1, + ∞)
   - Cóncava (∩): (– 1, 1)



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = (0, 2]

29. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

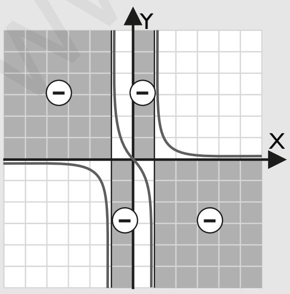
Solución:

$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =$
   $= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$ y $x = 1$, donde tiene discontinuidades de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   • Verticales: $x = -1$ y $x = 1$
   • Horizontales: $y = 0$
   • Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   • Eje X: O(0, 0)
   • Eje Y: O(0, 0)
   Signo:
   • Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   • Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   • Máximo relativo: no tiene.
   • Mínimo relativo: no tiene.
   Monotonía:
   • Creciente (↗): $\varnothing$
   • Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: O(0, 0)
   Curvatura:
   • Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   • Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



10. Recorrido o imagen:
    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Problemas con condiciones

30. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 5$$

tenga un máximo relativo en el punto P(3, 4)

Solución:

Pasa por P(3, 4) $\Rightarrow 27a + 9b - 5 = 4$

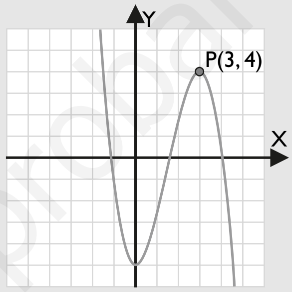
$y' = 3ax^2 + 2bx$

Máximo en (3, 4) $\Rightarrow y'(3) = 0 \Rightarrow 27a + 6b = 0$

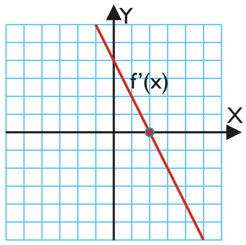
Resolviendo el sistema, se obtiene:

$a = -2/3, b = 3$

$y = -2x^3/3 + 3x^2 - 5$



31. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:



Calcula para f(x):

a) la monotonía.

b) la pendiente de la recta tangente para $x = 1$

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

Solución:

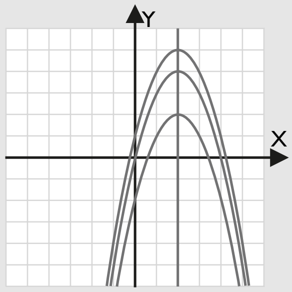
a) La función f(x) es creciente en: $(-\infty, 2)$

La función f(x) es decreciente en: $(2, +\infty)$

b) $f'(1) = 2$

c) Tiene un máximo relativo en $x = 2$

d)



32. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 - bx^2$$

tenga un máximo relativo en el punto P(1, 1)

Solución:

Pasa por P(1, 1) $\Rightarrow a + b - b = 1 \Rightarrow a = 1$

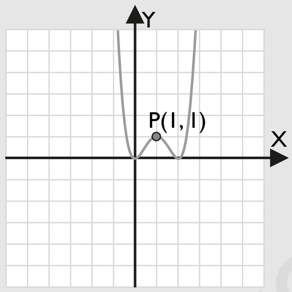
$y' = 4ax^3 + 3bx^2 - 2bx$

Máximo en (1, 1) $\Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow 4a + 3b - 2b = 0$

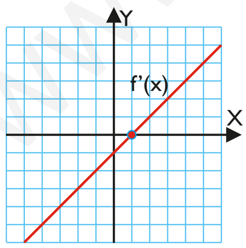
Resolviendo el sistema, se obtiene:

$a = 1, b = -4$

$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$



33. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:



Calcula para f(x):

a) la monotonía.

b) la pendiente de la recta tangente para x = 4

c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.

d) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

Solución:

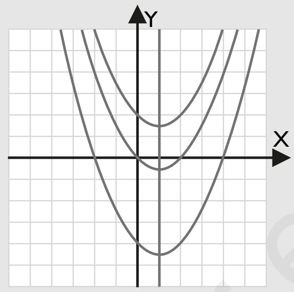
a) La función f(x) es creciente en: $(1, +\infty)$

La función f(x) es decreciente en: $(-\infty, 1)$

b) $f'(4) = 3$

c) Tiene un mínimo relativo en x = 1

d)



4. Aplicaciones de las derivadas a otras áreas

34. Un movimiento rectilíneo uniforme (m.r.u.) es:

$$e(t) = 2t - 4$$

a) Calcula el espacio recorrido al cabo de 5 segundos.

b) Calcula la velocidad.

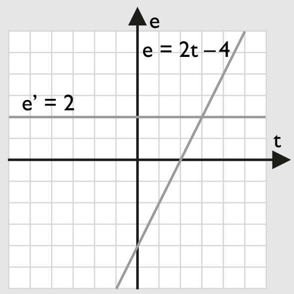
c) Representa en los mismos ejes el espacio y la velocidad. ¿Qué tipo de gráficas son?

Solución:

a) e(5) = 6 m

b) v(t) = e'(t) = 2 m/s

c)



El espacio es una función afín y la velocidad es una función constante.

35. La longitud de un feto a lo largo del embarazo viene dada por la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{600}$$

donde **x** se mide en semanas, e **y,** en centímetros:

a) Si el embarazo dura 40 semanas, ¿cuánto mide el niño?

b) ¿En qué momento crece más rápidamente; es decir, cuándo es máxima la derivada?

Solución:

a) $f(40) = 160/3 = 53,33$ cm

b) $f'(x) = x/5 - x^2/200$

$f''(x) = 1/5 - x/100$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 1/5 - x/100 = 0 \Rightarrow x = 20$ semanas.

$f'''(x) = -1/100 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

36. Los beneficios anuales de una empresa siguen la función:

$$B(x) = \frac{100x}{x^2 + 25}$$

donde **x** es el número de años que lleva funcionando y B(x) se mide en millones de euros.

a) ¿En qué momento los beneficios son máximos?

b) Calcula los beneficios en el momento en que sean máximos.

Solución:

$$B(x) = \frac{100x}{x^2 + 25}$$

$$B'(x) = \frac{-100x^2 + 2\,500}{(x^2 + 25)^2}$$

$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -5$

(El valor negativo no tiene sentido).

$$B''(x) = \frac{200x^3 - 15\,000x}{(x^2 + 25)^3}$$

$B''(5) = -2/5 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

Los beneficios son máximos a los 5 años.

b) $B(5) = 10$ millones de euros.

37. Los valores de las acciones de una determinada empresa, a lo largo de los 12 meses de un año, están definidos por la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{50} - \frac{3x^2}{10} + \frac{24x}{25} + 15$$

donde **x** es el número del mes y f(x) es el valor de cada acción en euros.

Calcula:

a) el valor de las acciones al comenzar el año.

b) el valor de las acciones al final del año.

c) el valor máximo y mínimo de las acciones a lo largo del año.

Solución:

a) $f(0) = 15$ €

b) $f(12) = 447/25 = 17,88$ €

c) $f'(x) = \frac{3x^2}{50} - \frac{3x}{5} + \frac{24}{25}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 8$

$$f''(x) = \frac{3x}{25} - \frac{3}{5}$$

$f''(2) = -9/25 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo. Alcanza el máximo relativo en el 2º mes y valen a $397/25 = 15,88$ €

Como el máximo relativo es menor que el valor de las acciones al final del año, el mayor valor lo alcanzan al final del año y vale 17,88 €

$f''(8) = 9/25 > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo. Alcanza el mínimo relativo en el 8º mes y valen a $343/25 = 13,72$ €

5. Problemas de optimización

38. Calcula dos números **x** e **y** tales que su producto sea máximo, sabiendo que suman 60

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = primer número.

y = segundo número.

$x + y = 60$

b) Función que hay que minimizar.

$f(x, y) = xy$

sujeto a: $x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - x$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x, y) = xy$

$f(x) = x(60 - x)$

$f(x) = 60x - x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = 60 - 2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 30$

Si $x = 30 \Rightarrow y = 30$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.

$f''(30) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

El primer número es $x = 30$ y el segundo $y = 30$

39. Se quiere construir un depósito abierto, es decir, sin tapa, con forma de prisma cuadrangular tal que el volumen sea máximo. Si la superficie es de 48 m^2, ¿qué dimensiones debe tener el depósito?

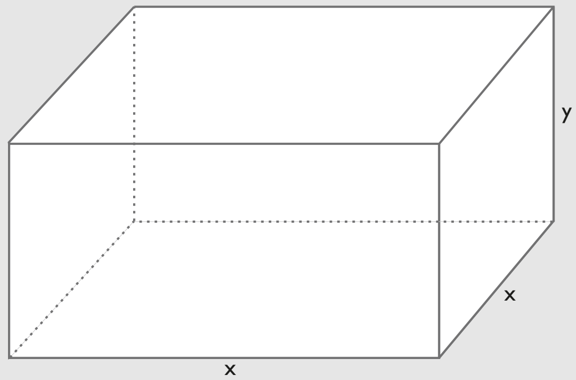
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = longitud de la base.

y = altura.

Superficie = 48 m^2



b) Función que hay que minimizar.

$V(x, y) = x^2y$

Sujeta a las condiciones:

Superficie = 48 $m^2 \Rightarrow 4xy + x^2 = 48$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$V(x, y) = x^2y$

$4xy + x^2 = 48 \Rightarrow y = \dfrac{48 - x^2}{4x}$

$V(x) = 1/4(48x - x^3)$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$V'(x) = 1/4\left(48 - 3x^2\right)$

$V'(x) = 0 \Rightarrow x = -4$ y $x = 4$

(La solución negativa no tiene sentido).

Si $x = 4 \Rightarrow y = 2$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.

$V''(x) = -3x/2$

$V''(4) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El depósito tiene de base un cuadrado de lado 4 m y altura 2 m, y tendrá un volumen de 32 m^3

40. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 m. Halla las longitudes de los catetos para que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa sea mínima.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = cateto mayor.

y = cateto menor.

Suma de los catetos = 12 m

b) Función que hay que minimizar.

$A(x, y) = x^2 + y^2$

Sujeta a las condiciones:

$x + y = 12$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(x, y) = x^2 + y^2$

$x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x$

$A(x) = x^2 + (12 - x)^2$

$A(x) = 2x^2 - 24x + 144$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$A'(x) = 4x - 24$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 6$

Si $x = 6 \Rightarrow y = 6$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.

$A''(x) = 4$

$A''(6) = 4 < 0\ (-) \Rightarrow$ Mínimo relativo.

f) El triángulo es isósceles y sus catetos miden 6 m

Para ampliar

41. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 12x + 12$ $\quad$ $y'' = 6x - 12$ $\quad$ $y''' = 6$

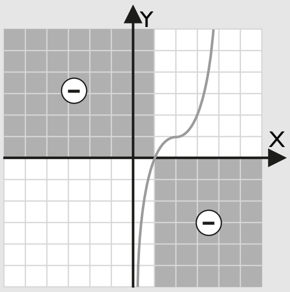
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(1, 0)
   - Eje Y: B(0, –7)

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Decreciente ($\searrow$): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: C(2, 1)

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(2, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 2)$



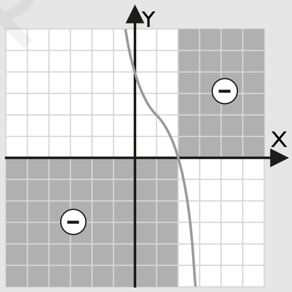
10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(2, 0)
   - Eje Y: B(0, 4)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 2)$
   - Negativa (–): $(2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $\varnothing$
   - Decreciente ($\searrow$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: C(1, 2)

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 1)$
   - Cóncava ($\cap$): $(1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

42. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$

Solución:

$y' = -3x^2 + 6x - 4$

$y'' = -6x + 6$

$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)

43. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 + 2x^2$$

Solución:

$y' = 4x^3 + 4x$

$y'' = 12x^2 + 4$

$y''' = 24x$

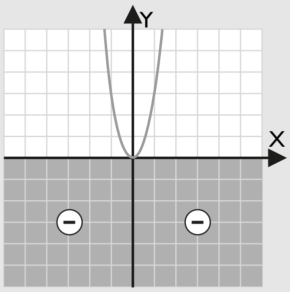
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: O(0, 0)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$



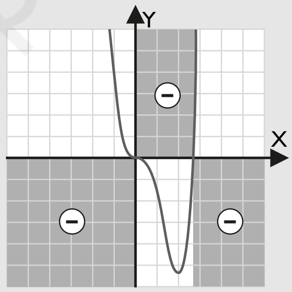
10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(8/3, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (8/3, +\infty)$
   - Negativa (–): $(0, 8/3)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: O(2, – 16/3)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 2)$
9. Puntos de inflexión: O(0, 0), B(4/3, – 256/81)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (4/3, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(0, 4/3)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [-16/3, +\infty)$

44. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 - \frac{8}{3}x^3$$

Solución:

$y' = 4x^3 - 8x^2$

$y'' = 12x^2 - 16x$

$y''' = 24x - 16$

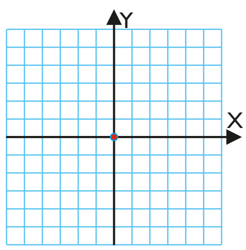
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0).

45. De una función polinómica de tercer grado se sabe que tiene un punto de inflexión en el punto O(0, 0), no tiene ni máximos ni mínimos relativos, y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

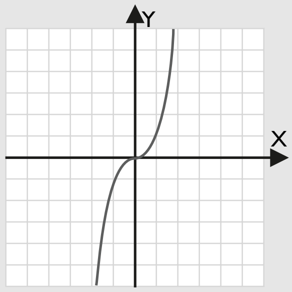
Con esta información, dibuja una gráfica a mano alzada.

Halla una fórmula para esta gráfica.



Solución:

$y = x^3$

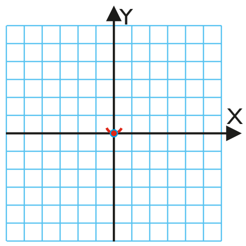


46. De una función polinómica de cuarto grado se sabe que tiene un solo mínimo relativo en el punto O(0, 0), no tiene ni máximos relativos, ni puntos de inflexión, y que:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

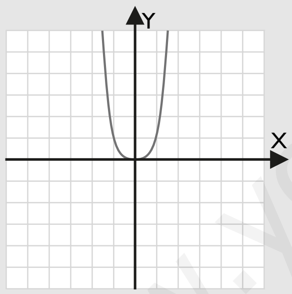
Con esta información, dibuja una gráfica a mano alzada.

Halla una fórmula para esta gráfica.



Solución:

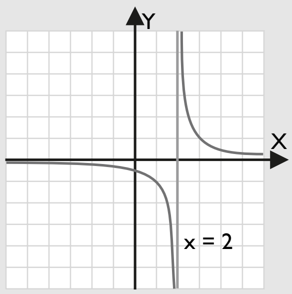
$y = x^4$



47. Halla una función racional que tenga como asíntota vertical la recta x = 2

Solución:

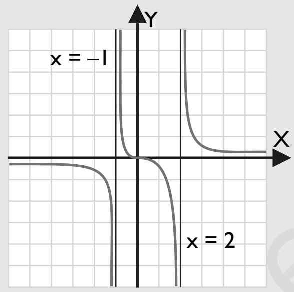
Por ejemplo, $y = \dfrac{1}{x - 2}$



48. Halla una función racional que tenga dos asíntotas verticales x = 2, x = –1

Solución:

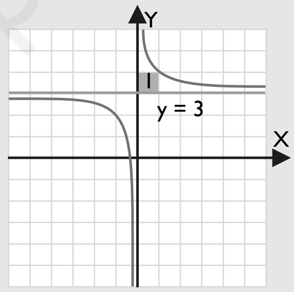
Por ejemplo, $y = \dfrac{x}{(x - 2)(x + 1)}$



49. Halla una función racional que tenga como asíntota horizontal la recta y = 3

Solución:

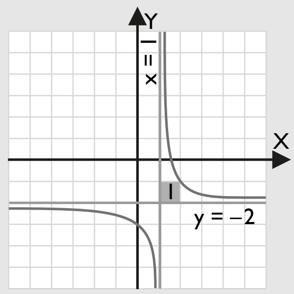
Por ejemplo, $y = \dfrac{1}{x} + 3$



50. Halla una función racional que tenga dos asíntotas: una vertical, x = 1, y otra horizontal, y = –2

Solución:

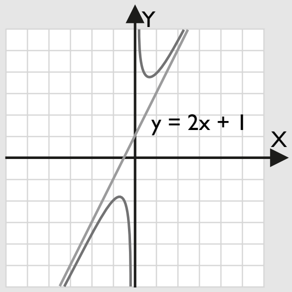
Por ejemplo, $y = \dfrac{1}{x - 1} - 2$



51. Halla una función racional que tenga como asíntota oblicua y = 2x + 1

Solución:

Por ejemplo, $y = 2x + 1 + \frac{1}{x}$, es decir, $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x}$



52. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{2x - 1}{x^2}$$

Solución:

$y' = \frac{-2x + 2}{x^3}$

$y'' = \frac{4x - 6}{x^4}$

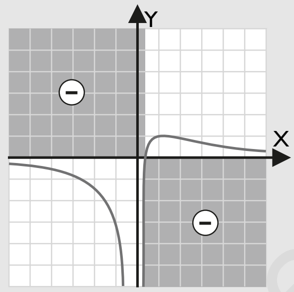
$y''' = \frac{-12x + 24}{x^5}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(1/2, 0)
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(1/2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: B(1, 1)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (0, 1)
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: C(3/2, 8/9)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(3/2, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0) \cup (0, 3/2)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, 1]$

53. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

Solución:

$y' = \frac{6x}{(x^2 + 3)^2}$

$y'' = \frac{-18x^2 + 18}{(x^2 + 3)^3}$

$y''' = \frac{72x^3 - 216x}{(x^2 + 3)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par ⇒ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 1$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): ∅
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: O(0, 0)

Monotonía:

• Creciente (↗): $(0, +\infty)$

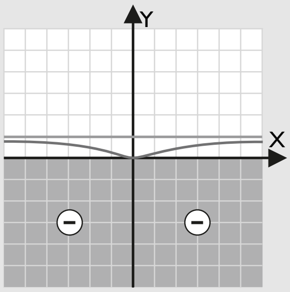
• Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$

9. Puntos de inflexión: A(– 1, 1/4), B(1, 1/4)

Curvatura:

• Convexa (∪): $(-1, 1)$

• Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

Im(f) = [0, 1)

54. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x}{4 - x^2}$$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{-2x^3 - 24x}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = \frac{6(x^4 + 24x^2 + 16)}{(x^2 - 4)^4}$$

1. Tipo de función: racional.

2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} =$
$= (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

3. Continuidad: es discontinua en $x = -2$ y $x = 2$, donde tiene discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: es impar ⇒ simétrica respecto del origen.

6. Asíntotas:
   • Verticales: $x = -2, x = 2$
   • Horizontales: $y = 0$
   • Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:
   • Eje X: O(0, 0)
   • Eje Y: O(0, 0)

Signo:

• Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

• Negativa (–): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos:
   • Máximo relativo: no tiene.
   • Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

• Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

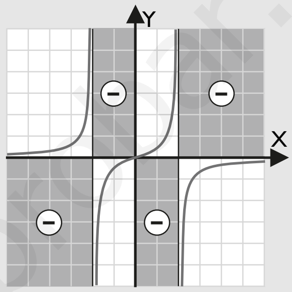
• Decreciente (↘): ∅

9. Puntos de inflexión: O(0, 0)

Curvatura:

• Convexa (∪): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

• Cóncava (∩): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

55. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$y' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{-12x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''' = \frac{48x^3 - 48x}{(x^2 + 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.

2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Continuidad: es continua en todo el dominio.

4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: es par ⇒ simétrica respecto del eje Y

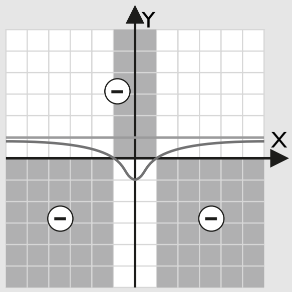
6. Asíntotas:
   • Verticales: no tiene.
   • Horizontales: $y = 1$
   • Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$
   - Eje Y: $C(0, -1)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $C(0, -1)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: $D(-\sqrt{3}/3, -1/2)$, $E(\sqrt{3}/3, -1/2)$,

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [-1, 1)$

56. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función $f(x) = ax^4 + bx^3$ tenga un punto de inflexión en el punto $P(2, 3)$

Solución:

Pasa por $P(2, 3) \Rightarrow y(2) = 3 \Rightarrow 16a + 8b = 3$

$y' = 4ax^3 + 3bx^2$

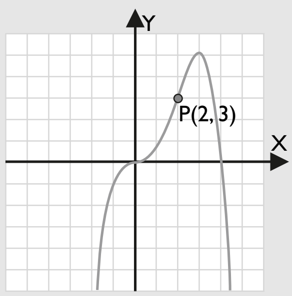
$y'' = 12ax^2 + 6bx$

Punto de inflexión en $P(2, 3) \Rightarrow y''(2) = 0 \Rightarrow 48a + 12b = 0$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$a = -3/16$, $b = 3/4$

$y = -3x^4/16 + 3x^3/4$



57. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax + b$$

tenga un mínimo relativo en el punto $P(1, 3)$

Solución:

Pasa por $P(1, 3) \Rightarrow y(1) = 3 \Rightarrow 1 + a + b = 3$

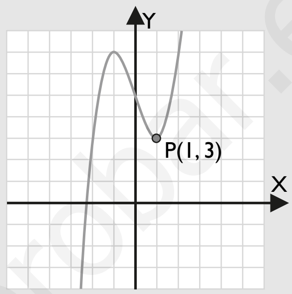
$y' = 3x^2 + a$

Mínimo relativo en $P(1, 3) \Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0$

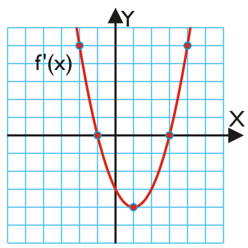
Resolviendo el sistema, se obtiene:

$a = -3$, $b = 5$

$y = x^3 - 3x + 5$



58. Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la parábola siguiente:



Calcula para $f(x)$:

a) la monotonía.

b) las abscisas del máximo y del mínimo relativos.

c) la curvatura.

d) la abscisa del punto de inflexión.

e) Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

a) La función $f(x)$ es creciente en: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

   La función $f(x)$ es decreciente en: $(-1, 3)$

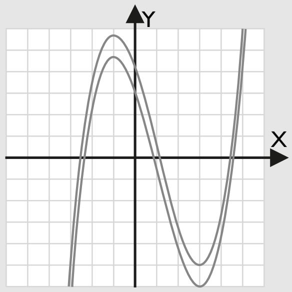
b) Tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 3$

c) Convexa ($\cup$): $(1, +\infty)$

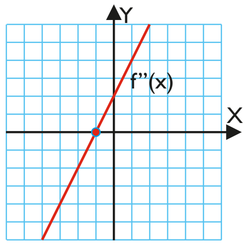
   Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 1)$

d) Punto de inflexión en $x = 1$

e)



59. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su 2ª derivada f''(x) es la recta siguiente:



Calcula para f(x):

a) la curvatura.

b) la abscisa del punto de inflexión.

c) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

Solución:

a) Convexa (∪): $(-1, +\infty)$
   Cóncava (∩): $(-\infty, -1)$

b) Punto de inflexión en $x = -1$

c)

60. Un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.) está definido por la función:

$$e(t) = \frac{t^2}{2} - 4t + 4$$

a) Calcula el espacio recorrido al cabo de 7 segundos.

b) Calcula la velocidad al cabo de 7 segundos.

c) Calcula la aceleración al cabo de 7 segundos.

d) Representa en los mismos ejes el espacio, la velocidad y la aceleración. ¿Qué tipo de gráficas son?

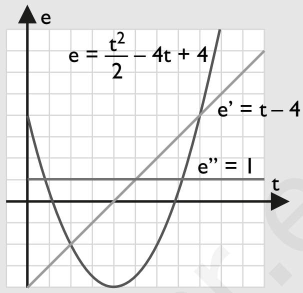
Solución:

a) $e(7) = 1/2$ m

b) $v(t) = e'(t) = t - 4$
   $v(7) = e'(7) = 3$ m/s

c) $a(t) = v'(t) = 1$
   $a(7) = 1$ m/s^2

d)



La gráfica del espacio es una parábola; la de la velocidad, una recta inclinada, y la de la aceleración, una recta horizontal.

61. Un agente de seguros cobra una comisión que viene dada por la función:

$$C(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}05x + 20$$

Calcula cuántos seguros debe hacer para que la comisión sea máxima.

Solución:

$C'(x) = -0{,}002x + 0{,}05$

$C'(x) = 0 \Rightarrow x = 25$

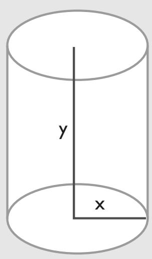
$C''(x) = -0{,}002 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

Para x = 25 seguros, obtiene la máxima comisión.

62. De todos los cilindros de volumen 16π m^3, halla el de superficie mínima.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.
   x = longitud del radio.
   y = altura.
   Volumen = 16π m^3



b) Función que hay que minimizar.

$A(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$

Sujeta a las condiciones:

Volumen $= 16\pi\ m^3 \Rightarrow \pi x^2 y = 16\pi$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$

$\pi x^2 y = 16\pi \Rightarrow y = \dfrac{16}{x^2}$

$A(x) = 2\pi x^2 + \dfrac{32\pi}{x}$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$A'(x) = 4\pi x - \dfrac{32\pi}{x^2}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

Si $x = 2 \Rightarrow y = 4$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.

$A''(x) = 4\pi + \dfrac{64\pi}{x^3}$

$A''(2) = 12\pi > 0\ (+)\ \Rightarrow$ Mínimo relativo.

f) El cilindro tiene un radio de 2 m y una altura de 4 m con una superficie mínima de $24\pi\ m^2$

63. Calcula las dimensiones del mayor rectángulo que se puede inscribir en una circunferencia de radio 20 cm

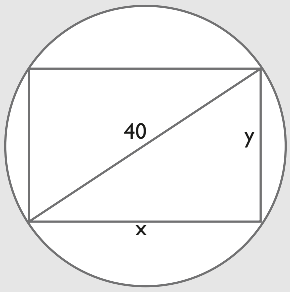
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = base del rectángulo.

y = altura del rectángulo.

Radio de la circunferencia circunscrita = 20 cm



b) Función que hay que maximizar.

$A(x, y) = xy$

Sujeta a las condiciones:

$x^2 + y^2 = 40^2$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(x, y) = xy$

$x^2 + y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \sqrt{1\,600 - x^2}$

$A(x) = x\sqrt{1\,600 - x^2}$

$A(x) = \sqrt{1\,600x^2 - x^4}$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$A'(x) = \dfrac{1\,600 - 2x^2}{\sqrt{1\,600 - x^2}}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 20\sqrt{2}, x = -20\sqrt{2}$

(La solución negativa no tiene sentido).

Si $x = 20\sqrt{2} \Rightarrow y = 20\sqrt{2}$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$A''(x) = \dfrac{2x^3 - 4\,800x}{(1\,600 - x^2)\sqrt{1\,600 - x^2}}$

$A''(20\sqrt{2}) = -4 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El rectángulo es un cuadrado de lado $20\sqrt{2}$ cm con un área de 800 cm^2

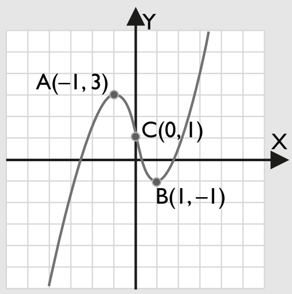
Problemas

64. De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto A(– 1, 3), un mínimo relativo en el punto B(1, – 1) y un punto de inflexión en el punto C(0, 1), y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.

Solución:



65. Estudia si en el punto O(0, 0) la siguiente función polinómica tiene un punto de inflexión:

$$y = x^4 - x$$

Solución:

$y' = 4x^3 - 1$

$y'' = 12x^2$

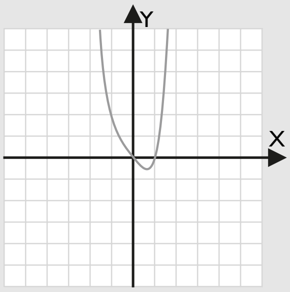
$y''(0) = 0$

$y''' = 24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = 24$, es de orden par.

En el punto O(0, 0) no hay punto de inflexión.



66. Estudia el punto P(0, – 1) de la siguiente función polinómica:

$$y = x^4 - 1$$

Solución:

$y' = 4x^3$

$y' = 0$

$y'' = 12x^2$

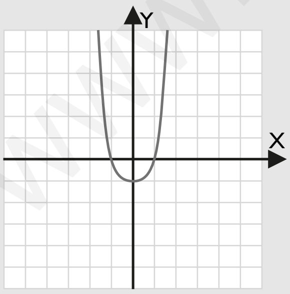
$y''(0) = 0$

$y''' = 24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = 24 > 0\ (+)$

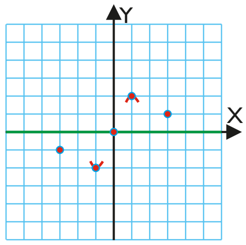
La función tiene un mínimo relativo en P(0, – 1)



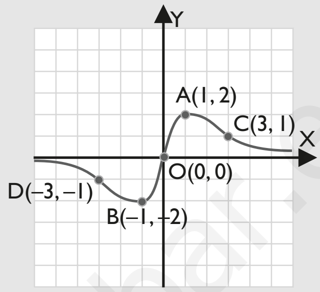
67. De una función racional se sabe que tiene como asíntota $y = 0$, tiene un máximo relativo en el punto A(1, 2), un mínimo relativo en el punto B(– 1, –2), puntos de inflexión en O(0, 0), C(3, 1) y D(–3, – 1), y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.



Solución:



68. Estudia el punto P(0, 3) de la siguiente función racional:

$$y = \frac{9}{x^2 + 3}$$

Solución:

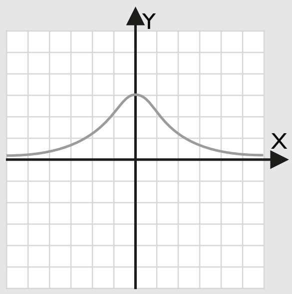
$y' = -\dfrac{18x}{(x^2 + 3)^2}$

$y'(0) = 0$

$y'' = \dfrac{54x^2 - 54}{(x^2 + 3)^3}$

$y''(0) = -2 < 0\ (-)$

El punto P(0, 3) es un máximo relativo.



69. Estudia el punto O(0, 0) de la siguiente función racional:

$$y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}$

$y'(0) = 3$

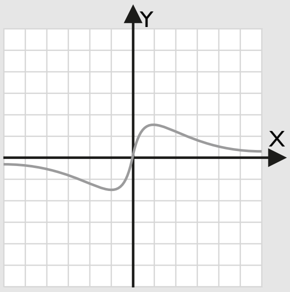
$$y'' = \frac{6x^3 - 18x}{(x^2 + 1)^3}$$

$y''(0) = 0$

$$y''' = -\frac{18(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$$

$y'''(0) = -18 \neq 0$

En el punto (0, 0) hay un punto de inflexión.



70. Aplicando el cálculo de derivadas, halla la función cuadrática que pasa por el origen de coordenadas O(0, 0) y tiene un mínimo relativo en el punto P(2, –4)

Solución:

$y = ax^2 + bx + c$

Pasa por O(0, 0) $\Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Pasa por P(2, –4) $\Rightarrow y(2) = -4 \Rightarrow 4a + 2b = -4$

$y' = 2ax + b$

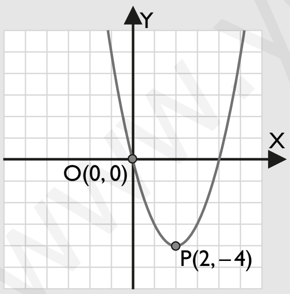
Tiene un mínimo relativo en P(2, –4) $\Rightarrow y'(2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a + b = 0$

Resolviendo el sistema:

$a = 1, b = -4, c = 0$

$y = x^2 - 4x$



71. Aplicando el cálculo de derivadas, halla la función cuadrática que pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo relativo en el punto P(–2, 4)

Solución:

$y = ax^2 + bx + c$

Pasa por O(0, 0) $\Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Pasa por P(– 2, 4) $\Rightarrow y(-2) = 4 \Rightarrow 4a - 2b = 4$

$y' = 2ax + b$

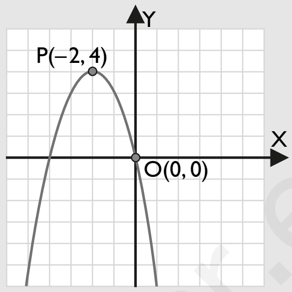
Tiene un máximo relativo en P(–2, 4) $\Rightarrow y'(-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4a + b = 0$

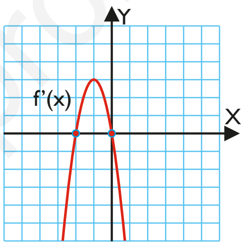
Resolviendo el sistema:

$a = -1, b = -4, c = 0$

$y = -x^2 - 4x$



72. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la parábola siguiente:



Calcula para f(x):

a) la monotonía.

b) las abscisas del máximo y del mínimo relativos.

c) la curvatura.

d) la abscisa del punto de inflexión.

e) Haz una aproximación de una gráfica de la función f(x)

Solución:

a) La función f(x) es creciente en: (–2, 0)

La función f(x) es decreciente en: $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

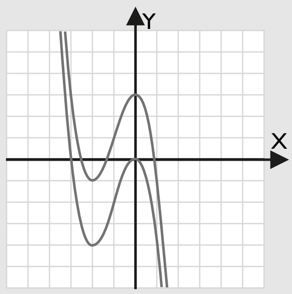
b) Tiene un mínimo relativo en x = –2 y tiene un máximo relativo en x = 0

c) Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1)$

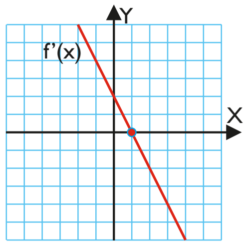
Cóncava ($\cap$): $(-1, +\infty)$

d) Punto de inflexión en x = –1

e)



73. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:



Calcula la fórmula de f(x) sabiendo que pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

$y' = -2x + 2$

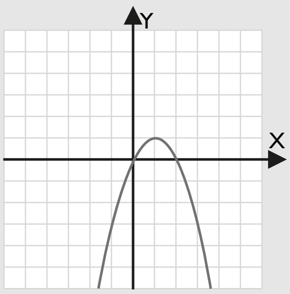
La función debe ser de 2° grado $y = ax^2 + bx + c$

Como pasa por el origen: $c = 0$

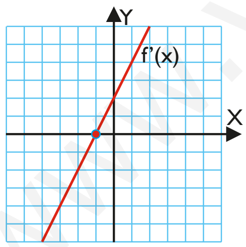
$y' = 2ax + b$

$2ax + b = -2x + 2 \Rightarrow a = -1, b = 2$

$y = -x^2 + 2x$



74. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su derivada f'(x) es la recta siguiente:



Calcula la fórmula de f(x) sabiendo que pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

$y' = 2x + 2$

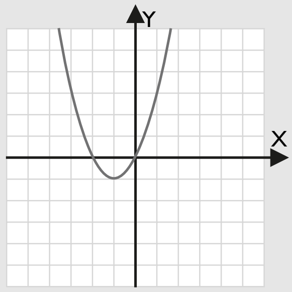
La función debe ser de 2° grado $y = ax^2 + bx + c$

Como pasa por el origen: $c = 0$

$y' = 2ax + b$

$2ax + b = 2x + 2 \Rightarrow a = 1, b = 2$

$y = x^2 + 2x$



75. Un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.) está definido por la función:

$$e(t) = 5t^2$$

a) Calcula el espacio recorrido al cabo de 3 segundos.

b) Calcula la velocidad al cabo de 3 segundos.

c) Calcula la aceleración al cabo de 3 segundos.

d) Representa en los mismos ejes el espacio, la velocidad y la aceleración. ¿Qué tipo de gráficas son?

Solución:

a) $e(3) = 45$ m

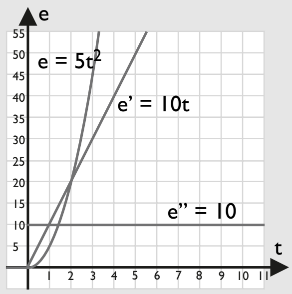
b) $v(t) = 10t$

$v(3) = 10 \cdot 3 = 30$ m/s

c) $a(t) = 10$

$a(3) = 10$ m/s^2

d)



La gráfica del espacio es una parábola; la de la velocidad, una recta inclinada, y la de la aceleración, una recta horizontal.

76. Las funciones que definen los ingresos y gastos de una empresa en millones de euros vienen dadas por:

$$I(x) = 6x - \frac{x^2}{2}$$

$$G(x) = \frac{x^2}{6} + 2x + 4$$

donde **x** es el número de miles de unidades vendidas.

Halla la función que obtiene los beneficios y calcula cuántas unidades tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

Solución:

$B(x) = I(x) - G(x)$

$B(x) = -\frac{2}{3}(x^2 - 6x + 6)$

$B'(x) = -\frac{4}{3}(x - 3)$

$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$

$B''(x) = -\frac{4}{3} < 0 \; (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

Se obtiene el máximo en 3 000 unidades producidas.

77. Una entidad financiera saca al mercado unos fondos de inversión que se rentabilizan anualmente, de acuerdo con la fórmula:

$$R(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}08x + 5$$

donde **x** es la cantidad depositada en miles de euros y R(x) es el tanto por ciento.

Calcula:

a) La cantidad que se debe invertir para obtener la mejor rentabilidad.

b) Calcula el tanto por ciento en el mejor de los casos.

Solución:

a) $R'(x) = -0{,}002x + 0{,}08$

$R'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$

$R''(x) = -0{,}002 < 0 \; (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

Con 40 000 euros se alcanza la máxima rentabilidad.

b) $R(40) = 6{,}6\%$

78. La población de una ciudad a partir del instante inicial (t = 0) sigue la función:

$$P(t) = \frac{t^2 + 400t + 1\,600}{(t + 40)^2}$$

donde **t** es el número de años, y P(t), la población en millones de habitantes.

a) ¿En qué año tendrá la ciudad el mayor número de habitantes?

b) ¿Cuántos habitantes tendrá en ese momento?

Solución:

a) $P'(t) = \frac{-320t + 12\,800}{(t + 40)^3}$

$P'(t) = 0 \Rightarrow t = 40$

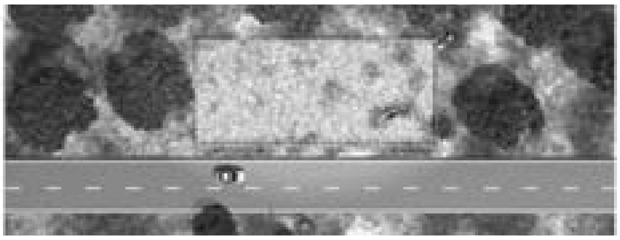
$P''(t) = \frac{640t - 51\,200}{(t + 40)^4}$

$P''(40) = -1/1600 < 0 \; (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

Se alcanza la máxima población a los 40 años.

b) $P(40) = 3 \Rightarrow$ 3 000 000 habitantes.

79. Una finca está al lado de una carretera y se quiere vallar el mayor rectángulo posible. El metro de valla al lado de la carretera cuesta 5 €, y el resto, a 2 €. Halla el área del mayor recinto que se puede vallar con 2 800 €



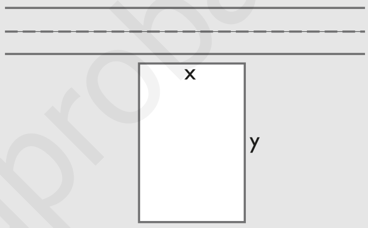
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = base del rectángulo.

y = altura del rectángulo.

$5x + 2x + 2y + 2y = 2\,800$



b) Función que hay que minimizar.

$A(x, y) = xy$

Sujeta a las condiciones:

$7x + 4y = 2\,800$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(x, y) = xy$

$7x + 4y = 2800 \Rightarrow y = \frac{2\,800 - 7x}{4}$

$A(x) = 700x - \frac{7}{4}x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$A'(x) = 700 - \frac{7}{2}x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 200$

Si $x = 200 \Rightarrow y = 350$

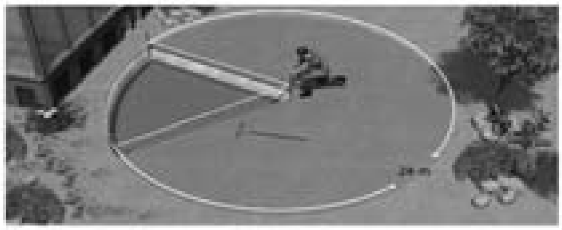
e) Se comprueba en la 2ª derivada.

$A''(x) = -7/2$

$A''(200) = -7/2 < 0 \; (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El rectángulo tendrá al lado de la carretera 200 m y al otro lado 350 m, con un área de 70 000 m^2

80. Un jardinero quiere construir un parterre (jardín pequeño) con forma de sector circular de área máxima. Halla el radio del parterre, sabiendo que el perímetro mide 24 m



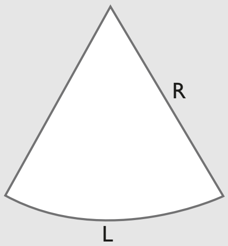
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

R = Longitud del radio.

L = Longitud del arco.

Perímetro = 24 m



b) Función que hay que minimizar.

$A(L, R) = \dfrac{1}{2}LR$

Sujeta a las condiciones:

$L + 2R = 24$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(L, R) = \dfrac{1}{2}LR$

$L + 2R = 24 \Rightarrow L = 24 - 2R$

$A(R) = 12R - R^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$A'(R) = 12 - 2R$

$A'(R) = 0 \Rightarrow R = 6$

Si $R = 6 \Rightarrow L = 12$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.

$A''(R) = -2$

$A''(6) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

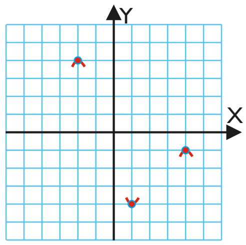
f) El jardín tendrá un radio de 6 m y una longitud de arco de 12 m, con un área de 36 m^2

Para profundizar

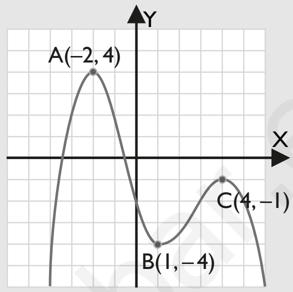
81. De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto A(–2, 4), un mínimo relativo en el punto B(1,–4), otro máximo relativo en el punto C(4,–1), y que:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.



Solución:



82. Estudia el punto P(0, 1) de la siguiente función polinómica: $y = x^4 + 1$

Solución:

$y' = 4x^3$

$y'(0) = 0$

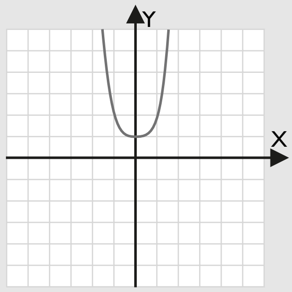
$y'' = 12x^2$

$y''(0) = 0$

$y''' = 24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = 24 > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.



83. Estudia si en el punto O(0, 0) de la siguiente función polinómica tiene un punto de inflexión:

$y = -x^4 - x$

Solución:

$y' = -4x^3 - 1$

$y'' = -12x^2$

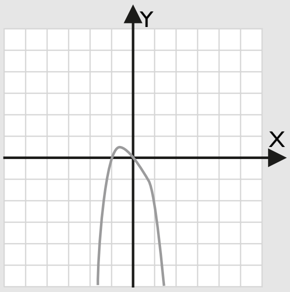
$y''(0) = 0$

$y''' = -24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = -24 < 0$ (–)

En O(0, 0) no hay punto de inflexión.

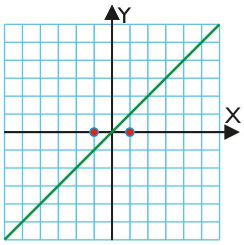


84. De una función racional se sabe que tiene como asíntotas $x = 0$ e $y = x$, corta al eje X en los puntos A(1, 0) y B(–1, 0), y que:

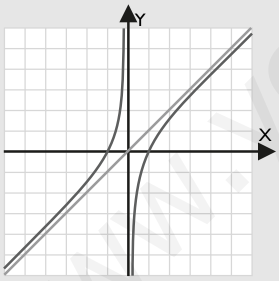
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

Con esta información, dibuja una gráfica a mano alzada.



Solución:



85. Estudia el punto P(0, – 1) de la siguiente función racional:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

$$y' = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$y'(0) = 0$

$$y'' = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

$y''(0) < 0$ (–) $\Rightarrow$ (0, – 1) máximo relativo.

86. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Solución:

$$y' = -\frac{2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{6}{x^4}$$

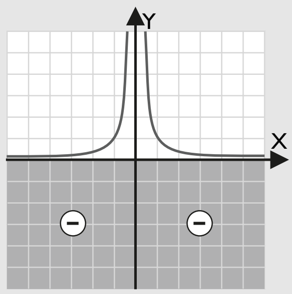
$$y''' = -\frac{24}{x^5}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0)$
   - Decreciente (↘): $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = (0, +\infty)$

87. Halla la función polinómica de 3er grado que pasa por el origen de coordenadas O(0, 0), tiene un máximo relativo en el punto P(–2, 4) y un punto de inflexión en Q(–1, 2)

Solución:

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Pasa por O(0, 0) $\Rightarrow d = 0$

Pasa por P(–2, 4) $\Rightarrow y(-2) = 4 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 4$

Pasa por Q(–1, 2) $\Rightarrow y(-1) = 2 \Rightarrow -a + b - c + d = 2$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Máximo relativo en P(–2, 4) $\Rightarrow y'(-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12a - 4b + c = 0$

$y'' = 6ax + 2b$

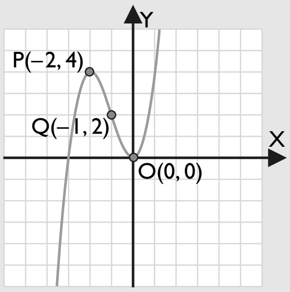
Punto de inflexión en Q(–1, 2) $\Rightarrow y''(-1) = 0 \Rightarrow$

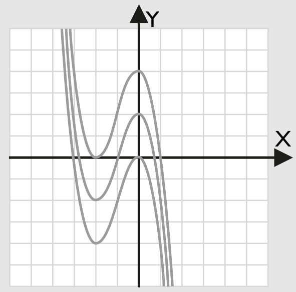
$\Rightarrow -6a + 2b = 0$

Resolviendo el sistema:

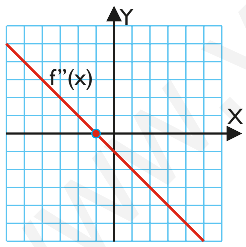
$a = 1, b = 3, c = 0, d = 0$

$y = x^3 + 3x^2$





88. Sea una función f(x) tal que la gráfica de su 2ª derivada f''(x) es la recta siguiente:



Calcula para f(x):

a) la curvatura.

b) la abscisa del punto de inflexión.

c) Haz una aproximación de una gráfica de la derivada f'(x)

Solución:

a) Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1)$

Cóncava ($\cap$): $(-1, +\infty)$

b) Tiene punto de inflexión en $x = -1$

89. Los gastos en euros de una empresa, en función del número de objetos que produce, vienen dados por la función:

$$G(x) = x^2 + 3x + 900$$

Se define el gasto medio como el gasto que cuesta producir un objeto, es decir:

$$GM(x) = \frac{G(x)}{x}$$

Calcula:

a) el número de objetos que tiene que producir para que el gasto medio sea mínimo.

b) el coste de cada pieza cuando el gasto medio sea mínimo.

Solución:

a) $GM(x) = x + 3 + \dfrac{900}{x}$

$GM'(x) = 1 - \dfrac{900}{x^2}$

$GM'(x) = 0 \Rightarrow x = -30 , x = 30$

(El valor negativo no tiene sentido).

$GM''(x) = \dfrac{1\,800}{x^3}$

$GM''(30) = 1/15 > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.

b) GM(30) = 63 euros.

90. La función que halla el número de personas que visitan un parque de atracciones en verano, desde las 8 hasta las 20 horas, viene dada por:

$$f(x) = x^3 - 45x^2 + 600x - 1\,250$$

Calcula:

a) a qué hora hay más personas en el parque de atracciones.

b) a qué hora hay menos personas en el parque de atracciones.

Solución:

$f'(x) = 3x^2 - 90x + 600$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 10, x = 20$

$f''(x) = 6x - 90$

$f''(10) = -30 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

$f''(20) = 30 > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.

a) Hay más personas a las 10 horas.

b) Hay menos personas a las 20 horas.

91. En una isla de Australia hay una plaga de conejos que sigue la función:

$$f(x) = \frac{500\,000}{x^2 - 50x + 626}$$

donde **x** representa el número de días.

Calcula:

a) en qué día hay más conejos y cuántos hay.

b) Con el paso del tiempo, ¿hacia dónde tiende a estabilizarse el número de conejos?

Solución:

a) $y' = \dfrac{1\,000\,000(25 - x)}{(x^2 - 50x + 626)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 25$

$y'' = \dfrac{1\,000\,000(3x^2 - 150x + 1\,874)}{(x^2 - 50x + 626)^3}$

$y''(25) = -\ 1\,000\,000 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ Por tanto, se extinguen.

92. De todos los triángulos isósceles de perímetro 60 cm, halla el de área máxima.

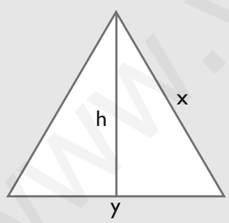
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = lado desigual del triángulo.

y = lado igual.

Perímetro = 60 cm



b) Función que hay que minimizar.

$A(x, y) = \dfrac{1}{2} y \cdot h$

Sujeta a las condiciones:

$2x + y = 60$

$h^2 = x^2 - \left(\dfrac{y}{2}\right)^2$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(x) = (30 - x)\sqrt{60x - 900}$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$A'(x) = \dfrac{3\sqrt{15}(20 - x)}{\sqrt{x - 15}}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 20$

Si $x = 20 \Rightarrow y = 20$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.

$A''(x) = \dfrac{3\sqrt{15}(10 - x)}{2(x - 15)\sqrt{x - 15}}$

$A''(20) = -3\sqrt{3} < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El triángulo de área máxima es el equilátero de 20 cm de lado.

93. Calcula un punto $P(x, y)$ de la parábola $y = x^2$ tal que su distancia al punto $A(0, 3)$ sea mínima.

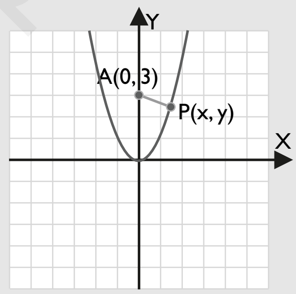
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

Punto incógnita: $P(x, y)$

Punto fijo: $A(0, 3)$

Parábola: $y = x^2$



b) Función que hay que minimizar.

$d(A, P) = d(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}$

Sujeta a las condiciones: $y = x^2$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$d(y) = \sqrt{y + (y - 3)^2}$

$d(y) = \sqrt{y^2 - 5y + 9}$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$d'(y) = \dfrac{2y - 5}{2\sqrt{y^2 - 5y + 9}}$

$d'(y) = 0 \Rightarrow y = 5/2$

Si $y = 5/2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10}/2$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.

$d''(y) = \dfrac{11}{4(y^2 - 5y + 9)\sqrt{y^2 - 5y + 9}}$

$d''(5/2) = \dfrac{2\sqrt{11}}{11} > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.

f) Los puntos son: $P\left(-\sqrt{10}/2\ , 5/2\right)$ y $Q\left(\sqrt{10}/2, 5/2\right)$

Paso a paso

94. Dibuja la siguiente función y completa el formulario de los diez apartados:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

95. Dentro de un prado se quiere colocar una cerca rectangular de 30 m de longitud para que pueda pastar una cabra. Calcula las dimensiones para que la superficie sea máxima.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

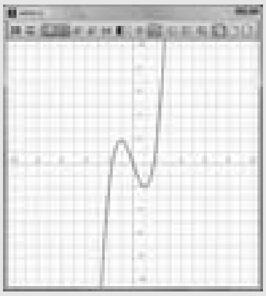
96. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

Dibuja las siguientes funciones y completa para cada una de ellas el formulario de los diez apartados:

97. $y = x^3 - 3x$

Solución:



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar, simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-\sqrt{3}, 0)$, $O(0, 0)$, $B(\sqrt{3}, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

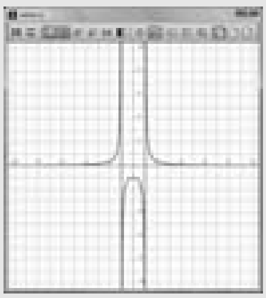
   Signo:
   - Positiva (+): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(-1, 2)$
   - Mínimo relativo: $D(1, -2)$

   Monotonía:
   - Creciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Decreciente: $(-1, 1)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$
10. Recorrido o imagen:
   $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

98. $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

Solución:



1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =$
   $= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

3. Continuidad: es discontinua en $x = 1, x = -1$, donde tiene discontinuidades de 1ª especie, de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par, es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1, x = 1$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: $A(0, -1)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(0, -1)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

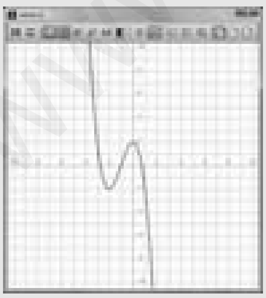
   Monotonía:
   - Creciente: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   - Decreciente: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-1, 1)$
10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

99. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$

Solución:



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$. Es simétrica respecto del punto $B(-1, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-\sqrt{3} - 1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(\sqrt{3} - 1, 0)$
   - Eje Y: $D(0, 2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3} - 1) \cup (-1, \sqrt{3} - 1)$
   - Negativa (–): $(-\sqrt{3} - 1, -1) \cup (\sqrt{3} - 1, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $D(0, 2)$
   - Mínimo relativo: $E(-2, -2)$

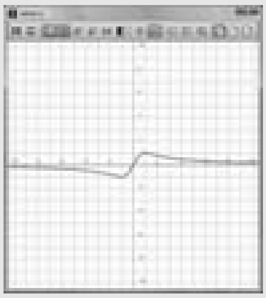
   Monotonía:
   - Creciente: $(-2, 0)$
   - Decreciente: $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $F(-1, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-1, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

100. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Solución:



1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: y = 0
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(1, 1)
   - Mínimo relativo: B(–1, –1)

   Monotonía:
   - Creciente: $(-1, 1)$
   - Decreciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $C\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2\right)$, O(0, 0), $D\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2\right)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
   - Cóncava ($\cap$): $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$
10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = [–1, 1]

101. $y = x^4 - 2x^3$

Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(2, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: B(3/2, –27/16)

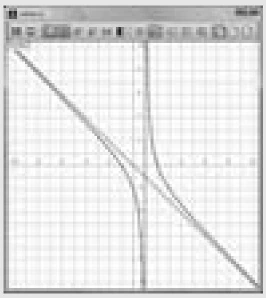
   Monotonía:
   - Creciente: $(3/2, +\infty)$
   - Decreciente: $(-\infty, 3/2)$
9. Puntos de inflexión: O(0, 0), C(1, –1)

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(0, 1)$
10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = [–27/16, +∞)

102. $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{1 - x}$

Solución:



1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en x = 1 donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0). Es simétrica respecto del punto P(1, –1)

6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = -x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$
   - Eje Y: $C(0, -2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$
   - Negativa (–): $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente: $\varnothing$
   - Decreciente: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(1, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 1)$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-\sqrt{5}, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$, $D(\sqrt{5}, 0)$
   - Eje Y: $E(0, -5)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\sqrt{5}, -1) \cup (1, \sqrt{5})$
   - Negativa (–): $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximos relativos: $F(-\sqrt{3}, 4)$, $G(\sqrt{3}, 4)$
   - Mínimo relativo: $H(0, -5)$

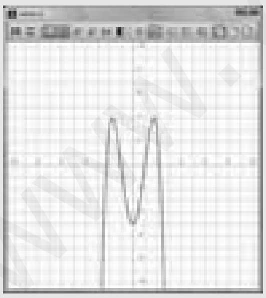
   Monotonía:
   - Creciente: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
   - Decreciente: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-1, 1)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (1 +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$

103. $y = -x^4 + 6x^2 - 5$

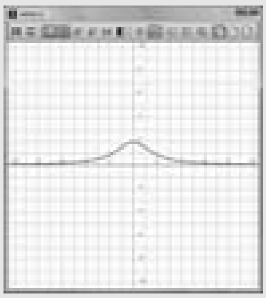
Solución:



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par, simétrica respecto del eje Y

104. $y = \dfrac{6}{x^2 + 3}$

Solución:



1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par, simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: y = 0
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(0, 2)

   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): nunca
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(0, 2)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente: $(-\infty, 0)$
   - Decreciente: $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: B(–1, 3/2), C(1, 3/2)

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-1, 1)$
10. Recorrido o imagen:

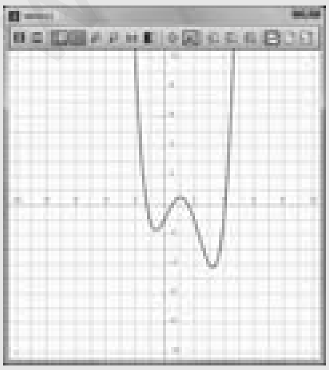
    Im(f) = (0, 2]

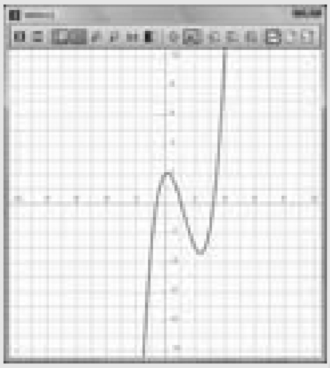
Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

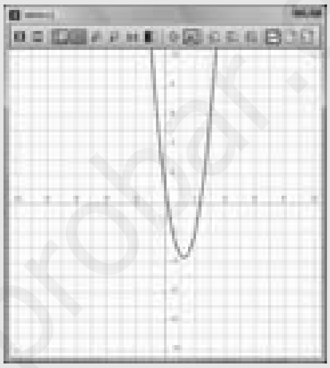
105. Dibuja la siguiente función polinómica y sus derivadas sucesivas. ¿Qué puedes inducir de los resultados obtenidos?

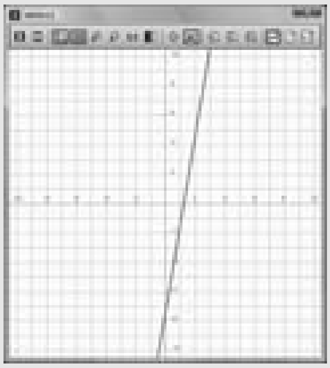
$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

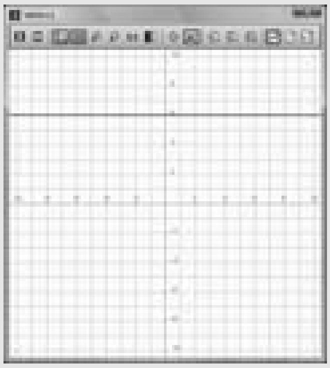
Solución:











La derivada de una función polinómica es otra función polinómica de un grado menor. Tiene un máximo o mínimo relativo menos y un punto de inflexión menos.

106. Calcula el valor de los coeficientes **a** y **b** para que la función:

$$f(x) = ax^3 + bx$$

tenga un máximo relativo en el punto P(1, 2)

Solución:

Pasa por P(1, 2) $\Rightarrow a + b = 2$

$y' = 3ax^2 + b$

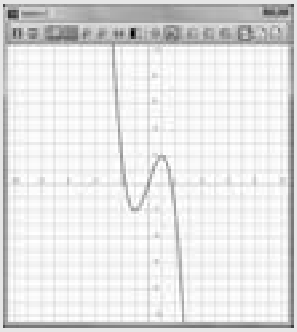
Máximo relativo en P(1, 2) $\Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow$

$3a + b = 0$

Resolviendo el sistema:

$a = -1, b = 3$

$y = -x^3 + 3x$



107. Calcula la función polinómica de tercer grado que tiene un máximo relativo en el punto P(–2, 4) y un punto de inflexión en Q(–1, 2)

Solución:

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Pasa por P(–2, 4) $\Rightarrow y(-2) = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 4$

Pasa por Q(–1, 2) $\Rightarrow y(-1) = 2 \Rightarrow -a + b - c + d = 2$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Máximo relativo en P(–2, 4) $\Rightarrow y'(-2) = 0 \Rightarrow$

$12a - 4b + c = 0$

$y'' = 6ax + 2b$

Punto de inflexión en Q(–1, 2) $\Rightarrow y''(-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6a + 2b = 0$

Resolviendo el sistema:

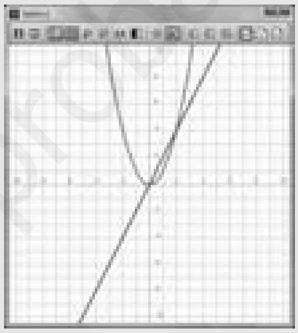
$a = 1, b = 3, c = 0, d = 0$

$y = x^3 + 3x^2$

108. Dibuja la función derivada $f'(x) = 2x$, y observa la gráfica y el punto en el que corta al eje X. Trata de deducir una fórmula de la función f(x) por *ensayo-acierto*.

Solución:

$y = x^2$



109. Las funciones que definen los ingresos y los gastos de una empresa son:

$$I(x) = 36x - 3x^2 \qquad G(x) = x^2 + 12x + 24$$

donde **x** se mide en miles de unidades producidas. Halla la función que obtiene los beneficios y calcula la cuántas unidades tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

Solución:

$B(x) = -4x^2 + 24x - 24$

$B'(x) = 24 - 8x$

$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$

$B''(x) = -8$

$B''(3) = -8 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

Hay que producir 3 000 unidades.

110. En una ciudad de 3 000 000 de habitantes hay una epidemia de gripe. La función que define el número de enfermos es $f(x) = 125 + 20x - x^2$, donde **x** está medido en días, e **y,** en miles de personas. Calcula el día en el que el número de enfermos es máximo.

Solución:

$y' = 20 - 2x$

$y'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$

$y'' = -2$

$y''(10) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

El día 10 es cuando más enfermos hay.

111. Entre todos los rectángulos de perímetro 100 m, calcula las dimensiones del que tiene mayor superficie.

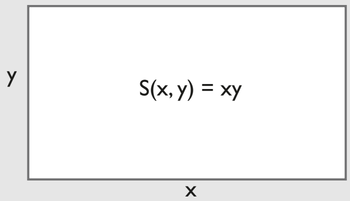
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = longitud de la base.

y = altura.

Perímetro = 100 m



b) Función que hay que maximizar.

$S(x, y) = xy$

Sujeta a las condiciones:

Perímetro = 100 m $\Rightarrow 2(x + y) = 100 \Rightarrow x + y = 50$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$S(x, y) = xy$

$y = 50 - x$

$S(x) = x(50 - x)$

$S(x) = 50x - x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$S'(x) = 50 - 2x$

$50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25$

Si $x = 25 \Rightarrow y = 25$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$S''(25) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) Es un cuadrado de 25 m de lado.

112. Una finca está al lado de una carretera y se quiere vallar el mayor rectángulo posible. El metro de valla al lado de la carretera cuesta 5 €, y el resto, a 2 €. Halla el área del mayor recinto que se puede vallar con 2 800 €

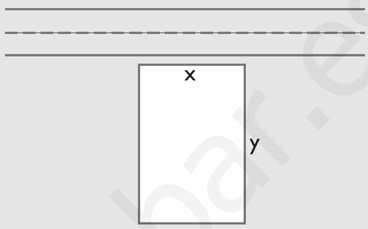
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = base del rectángulo.

y = altura del rectángulo.

$5x + 2x + 2y + 2y = 2\,800$



b) Función que hay que maximizar.

$A(x, y) = xy$

Sujeta a las condiciones:

$7x + 4y = 2\,800$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(x, y) = xy$

$7x + 4y = 2\,800 \Rightarrow y = \dfrac{2\,800 - 7x}{4}$

$A(x) = 700x - \dfrac{7}{4}x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$A'(x) = 700 - \dfrac{7}{2}x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 200$

Si $x = 200 \Rightarrow y = 350$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$A''(x) = -7/2$

$A''(200) = -7/2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El rectángulo tendrá una base de 200 m y una altura de 350 m, con un área de 70 000 m^2