

## COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

**1.** Calcula la función inversa de cada una de las siguientes y comprueba, en cada caso, que la función dada compuesta con su inversa, da la función identidad:

$$f(x) = x^3 - 1$$

$$g(x) = 1 - 2x$$

$$h(x) = 3^{x+1}$$

Solución:

a)  $f(x) = x^3 - 1 \rightarrow y = x^3 - 1 \rightarrow x^3 = y + 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{y+1} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x+1}) = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = x + 1 - 1 = x$$

b)  $g(x) = 1 - 2x \rightarrow y = 1 - 2x \rightarrow x = \frac{1-y}{2} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1-x}{2}$

$$g \circ g^{-1}(x) = g(g^{-1}(x)) = g\left(\frac{1-x}{2}\right) = 1 - 2\left(\frac{1-x}{2}\right) = 1 - (1-x) = x$$

c)  $h(x) = 3^{x+1} \rightarrow y = 3^{x+1} \rightarrow x + 1 = \log_2 y \rightarrow x = \log_2 y - 1 \rightarrow h^{-1}(x) = \log_2 x - 1$

$$h \circ h^{-1}(x) = h(h^{-1}(x)) = h(\log_2 x - 1) = 2^{\log_2 x - 1} = 2^{\log_2 x} = x$$

**2.** Siendo  $f(x) = 5 - x$ ,  $g(x) = 3x - a$ , calcular el valor de  $a$  para que la composición de ambas sea conmutativa, es decir,  $f \circ g = g \circ f$ .

Solución:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3x - a) = 5 - (3x - a) = 5 - 3x + a$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(5 - x) = 3(5 - x) - a = 15 - 3x - a$$

Como  $f \circ g = g \circ f$ , debe verificarse:  $5 - 3x + a = 15 - 3x - a$

$$5 - 3x + a = 15 - 3x - a \rightarrow 5 + a = 15 - a \rightarrow 2a = 10 \rightarrow a = 5$$

**3.** Dadas las siguientes funciones halla, en cada caso, las dos funciones que, compuestas, nos dan la dada:

a)  $f \circ g(x) = (x + 2)^3$

b)  $f \circ g(x) = 2^{2x+1}$

c)  $f \circ g(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$

Solución:

a) Las funciones pueden ser  $f(x) = x^3$  y  $g(x) = x + 2$

$$f \circ g(x) = f(x + 2) = (x + 2)^3$$

b) Las funciones pueden ser  $f(x) = 2^x$  y  $g(x) = 2x + 1$

$$f \circ g(x) = f(2x + 1) = 2^{2x+1}$$

c) Las funciones pueden ser  $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$  y  $g(x) = x^2$

$$f \circ g(x) = f(x^2) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

4. Sean las funciones  $f(x) = \frac{x+2}{3}$ ,  $g(x) = 2x - 1$ . Calcula  $(f \circ g)^{-1}(3)$ .

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = \frac{2x - 1 + 2}{3} = \frac{2x + 1}{3}$$

Sea  $h(x) = \frac{2x + 1}{3}$ , vamos a calcular su inversa:

$$y = \frac{2x + 1}{3} \rightarrow 3y = 2x + 1 \rightarrow 2x = 3y - 1 \rightarrow x = \frac{3y - 1}{2} \rightarrow h^{-1}(x) = \frac{3x - 1}{2}$$

$$h^{-1}(3) = \frac{8}{2} = 4$$