

FUNCIONES

1 Hallar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$

b) $g(x) = \frac{7x-1}{x^2-3x+2}$

c) $h(x) = \frac{\sqrt{2x-4}}{x-1}$

SOLUCIÓN:

a) $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 4x \geq 0\}$

Descomponemos el polinomio:

$$x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$$

Sus raíces son $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$.

Representándolas en la recta real, dividimos a ésta en cuatro intervalos:

$$I_1 = (-\infty, -2) \quad I_2 = (-2, 0) \quad I_3 = (0, 2) \quad I_4 = (2, +\infty)$$

Estudiamos el signo de $y = x^3 - 4x$ en cada intervalo, considerando un valor cualquiera de cada uno:

- $I_1 = (-\infty, -2)$, para $x = -3 \rightarrow y = (-3)^3 - 4 \cdot (-3) = -27 + 12 < 0 \rightarrow y < 0$
- $I_2 = (-2, 0)$, para $x = -1 \rightarrow y = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) = -1 + 4 > 0 \rightarrow y > 0$
- $I_3 = (0, 2)$, para $x = 1 \rightarrow y = 1 - 4 < 0 \rightarrow y < 0$
- $I_4 = (2, +\infty)$, para $x = 3 \rightarrow y = 3^3 - 4 \cdot 3 = 27 - 12 > 0 \rightarrow y > 0$

Por tanto, $x^3 - 4x \geq 0$ en los intervalos $[-2, 0]$ y $[2, +\infty)$

$$\text{Dom } f = [-2, 0] \cup [2, +\infty)$$

b) $\text{Dom } g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \text{Descomponiendo en factores: } (x-2)(x-1) = 0 \rightarrow \text{sus raíces son: } x = 1, x = 2$$

Por tanto,

$$\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

c) $\text{Dom } h = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{\sqrt{2x-4}}{x-1} \in \mathbb{R} \right\} = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \geq 0 \text{ y } x-1 \neq 0\}$

$$\left. \begin{array}{l} 2x-4 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 4 \rightarrow x \geq 2 \\ x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Por tanto, dom } h = [2, +\infty)$$

2 Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \qquad g(x) = x^2 + 3$$

- a) Hallar las funciones $f + g$, $f \cdot g$ y f / g , calculando sus respectivos dominios
 b) ¿Se cumple que $f \circ g = g \circ f$?

SOLUCIÓN:

En primer lugar, calculamos los dominios de las dos funciones f y g :

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{Dom } g = \mathbb{R}$$

a) \Rightarrow Función $(f + g)$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-1}{x+1} + x^2 + 3$$

$$\text{Dom } (f + g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

\Rightarrow Función $(f \cdot g)$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot (x^2 + 3) = \frac{(x-1) \cdot (x^2 + 3)}{x+1}$$

$$\text{Dom } (f \cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

\Rightarrow Función (f / g)

$$(f / g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right) : (x^2 + 3) = \frac{(x-1)}{(x+1) \cdot (x^2 + 3)}$$

$$\text{Dom } (f / g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{b) } g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + 3 = \frac{(x-1)^2 + 3(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{4x^2 + 4x + 4}{(x+1)^2}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3) = \frac{x^2 + 3 - 1}{x^2 + 3 + 1} = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 4}$$

Por tanto, no son iguales

3 Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt[3]{3x+1} \qquad g(x) = \frac{2x}{x-3}$$

- Calcular sus dominios
- Calcular $f \circ g$, $g^{-1} \circ f$
- Determinar $\text{Im}(f)$, $\text{Im}(g)$

SOLUCIÓN:

a) $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt[3]{3x+1} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$$\text{Dom } g = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x}{x-3} \in \mathbb{R}\right\} = \{x \in \mathbb{R} / x-3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3\}$$

b) $\Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x}{x-3}\right) = \sqrt[3]{\frac{6x}{x-3} + 1} = \sqrt[3]{\frac{7x-3}{x-3}}$

\Rightarrow Antes de calcular $g^{-1} \circ f(x)$, determinaremos la inversa de g .

Calculamos $g^{-1}(x)$:

$$y = \frac{2x}{x-3} \rightarrow y(x-3) = 2x \rightarrow yx - 3y = 2x \rightarrow yx - 2x = 3y \rightarrow x(y-2) = 3y \rightarrow x = \frac{3y}{y-2}$$

$$\text{Luego, } g^{-1}(x) = \frac{3x}{x-2}$$

$$g^{-1} \circ f(x) = g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(\sqrt[3]{3x+1}) = \frac{3 \sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt[3]{3x+1}-2}$$

c) Para determinar la imagen de cada función hay que determinar previamente la función inversa ya que la imagen de una función es el dominio de su función inversa.

Inversa de f :

$$y = \sqrt[3]{3x+1} \rightarrow y^3 = 3x+1 \rightarrow 3x = y^3 - 1 \rightarrow x = \frac{y^3 - 1}{3}$$

$$\text{Por tanto, } f^{-1}(x) = \frac{x^3 - 1}{3}$$

$\text{Im}(f) = \text{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$, por ser una función polinómica.

$$\text{Im}(g) = \text{Dom}(g^{-1}) = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{3x}{x-2} \in \mathbb{R}\right\} = \{x \in \mathbb{R} / x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

4 Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2x+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 5x + \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ x-4 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- Calcular sus dominios
- Calcular $f+g$, $f \cdot g$
- Calcular $g \circ f(-2)$, $f \circ g(2)$

SOLUCIÓN:

a) Dominio de f:

Si $x > 0 \rightarrow f(x) = 3x + 1$, definida para cualquier valor real.

Si $x \leq 0 \rightarrow f(x) = \frac{1}{2x+1}$, definida si $2x+1 \neq 0 \leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$, valor que está dentro del conjunto inicial.

$$\text{Luego, Dom } f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

Dominio de g:

Si $x > 0 \rightarrow g(x) = 5x + \frac{1}{x}$, definida para $\mathbb{R} - \{0\}$, que no está dentro del conjunto inicial.

Si $x \leq 0 \rightarrow g(x) = x - 4$, definida para cualquier valor real.

Luego, Dom $g = \mathbb{R}$.

b) Función $f+g$

$$\text{Si } x > 0 \rightarrow f(x) = 3x + 1, g(x) = 5x + \frac{1}{x} \rightarrow (f+g)(x) = 3x + 1 + 5x + \frac{1}{x} = 8x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$\text{Si } x \leq 0 \rightarrow f(x) = \frac{1}{2x+1}, g(x) = x - 4 \rightarrow (f+g)(x) = \frac{1}{2x+1} + x - 4.$$

Por tanto:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 8x + 1 + \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2x+1} + x - 4 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Función $f \cdot g$

Del mismo modo, se determina la función producto:

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} (3x+1)\left(5x + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \left(\frac{1}{2x+1}\right)(x-4) & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \rightarrow (f \cdot g)(x) = \begin{cases} 15x^2 + 5x + 3 + \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x-4}{2x+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$c) g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{3}$$

$$\text{Si } x \leq 0 \rightarrow f(x) = \frac{1}{2x+1} \rightarrow f(-2) = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Si } x \leq 0 \rightarrow g(x) = x - 4 \rightarrow g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} - 4 = -\frac{13}{3}$$

$$f \circ g(2) = f(g(2)) = f\left(\frac{21}{2}\right) = \frac{65}{2}$$

$$\text{Si } x > 0 \rightarrow g(x) = 5x + \frac{1}{x} \rightarrow g(2) = 10 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$$

$$\text{Si } x > 0 \rightarrow f(x) = 3x + 1 \rightarrow f\left(\frac{21}{2}\right) = 3\left(\frac{21}{2}\right) + 1 = \frac{65}{2}$$

5 Hallar las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ en las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) = x^2 + 4$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

$g(x) = (x+2)^2$

c) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

$g(x) = 2x - 1$

d) $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$

$g(x) = 1 + x^3$

SOLUCIÓN:

a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 4) = \frac{2}{x^2 + 4}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x}\right) = \left(\frac{2}{x}\right)^2 + 4 = \frac{4 + 4x^2}{x^2}$

b) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f[(x+2)^2] = \sqrt{(x+2)^2 - 2} = \sqrt{x^2 + 4x + 2}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x-2} + 2)^2 = x + 2 + 4\sqrt{x-2}$

c) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 + \sqrt{2x - 1}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + \sqrt{x}) = 2(x^2 + \sqrt{x}) - 1$

d) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(1 + x^3) = 3(1 + x^3) - \frac{1}{1 + x^3}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(3x - \frac{1}{x}\right) = 1 + \left(3x - \frac{1}{x}\right)^3$

6

 Calcular la expresión analítica de $f + g$, $f \cdot g$ y f / g , especificando sus dominios.

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

$g(x) = \frac{5}{\sqrt{x-2}}$

b) $f(x) = 2x - 1$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{x} & \text{si } x \geq 2 \\ x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

$g(x) = \frac{5}{\sqrt{x-2}}$

$$\circ (f+g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{5}{\sqrt{x-2}}$$

$\text{Dom}(f+g) = (2, +\infty)$

$$\circ (f \cdot g)(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2-4}}$$

$\text{Dom}(f \cdot g) = (2, +\infty)$

$$\circ (f/g)(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{5\sqrt{x+2}}$$

$\text{Dom}(f/g) = (2, +\infty)$

b) $f(x) = 2x - 1$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\circ (f+g)(x) = \begin{cases} 4x-1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} + 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$

$$\circ (f \cdot g)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x-1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\text{Dom}(f \cdot g) = \mathbb{R}$

$$\circ (f/g)(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x} & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\text{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{0\}$

$$c) f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{x} & \text{si } x \geq 2 \\ x & \text{si } x < 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$\circ (f+g)(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 1 \\ 2x+2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 4+x+\frac{3}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{Dom}(f+g) = \mathbb{R}$$

$$\circ (f \cdot g)(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2+2x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ (2+x)\left(2+\frac{3}{x}\right) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{Dom}(f \cdot g) = \mathbb{R}$$

$$\circ (f/g)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x}{x+2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2x+3}{x^2+2x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \{0\}$$

7 Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2x}{x-4}$

b) $f(x) = \frac{x^3-5}{2}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

d) $f(x) = \frac{1+2x}{x-2}$

e) $f(x) = \frac{-3\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}$

SOLUCIÓN:

a) $f(x) = \frac{2x}{x-4} \rightarrow y = \frac{2x}{x-4} \rightarrow yx - 4y = 2x \rightarrow yx - 2x = 4y \rightarrow x(y-2) = 4y \rightarrow x = \frac{4y}{y-2}$

Por tanto, $f^{-1}(x) = \frac{4x}{x-2}$

b) $f(x) = \frac{x^3-5}{2} \rightarrow y = \frac{x^3-5}{2} \rightarrow 2y = x^3-5 \rightarrow 2y+5 = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{2y+5}$

Por tanto, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x+5}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \rightarrow y^2 = \frac{1}{x-2} \rightarrow \frac{1}{y^2} = x-2 \rightarrow x = 2 + \frac{1}{y^2} = \frac{2y^2+1}{y^2}$

Por tanto, $f^{-1}(x) = \frac{2x^2+1}{x^2}$

$$d) f(x) = \frac{1+2x}{x-2} \rightarrow y = \frac{1+2x}{x-2} \rightarrow yx - 2y = 1 + 2x \rightarrow yx - 2x = 1 + 2y \rightarrow x(y-2) = 1 + 2y \rightarrow x = \frac{2y+1}{y-2}$$

$$\text{Por tanto, } f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

$$e) f(x) = \frac{-3\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}} \rightarrow y = \frac{-3\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}} \rightarrow y^2 = \frac{9x}{x+8} \rightarrow y^2x + 8y^2 = 9x \rightarrow y^2x - 9x = -8y^2$$

$$x(y^2 - 9) = -8y^2 \rightarrow x = -\frac{8y^2}{y^2 - 9}$$

$$\text{Por tanto, } f^{-1}(x) = -\frac{8x^2}{x^2 - 9}$$

$$a) f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}} \rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}} \rightarrow y^3 = \frac{x+1}{x-2} \rightarrow y^3x - 2y^3 = x+1 \rightarrow y^3x - x = 2y^3 + 1$$

$$x(y^3 - 1) = 2y^3 + 1 \rightarrow x = \frac{2y^3 + 1}{y^3 - 1}$$

$$\text{Por tanto, } f^{-1}(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^3 - 1}$$

8

Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = 2x + 3$$

$$g(x) = 3x - 2$$

 Comprueba que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
SOLUCIÓN:

 Calculamos $(f \circ g)^{-1}$:

$$\circ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 2) = 2(3x - 2) + 3 = 6x - 1$$

$$\circ (f \circ g)(x) = 6x - 1 \rightarrow y = 6x - 1 \rightarrow y + 1 = 6x \rightarrow x = \frac{y+1}{6} \rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x+1}{6}$$

 Calculamos $g^{-1} \circ f^{-1}$:

$$\circ g(x) = 3x - 2 \rightarrow y = 3x - 2 \rightarrow y + 2 = 3x \rightarrow x = \frac{y+2}{3} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

$$\circ f(x) = 2x + 3 \rightarrow y = 2x + 3 \rightarrow y - 3 = 2x \rightarrow x = \frac{y-3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$\circ g^{-1} \circ f^{-1}(x) = g^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) = \frac{\frac{x-3}{2} + 2}{3} = \frac{x+1}{6}$$

9

Se consideran las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 1 \\ cx & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad g(x) = \frac{3x+2}{2} \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

- Calcular a, b y c para que $f(0) = 0$, $f(-1) = 1$, $f(3) = 6$.
- Determinar el dominio de las tres funciones.
- ¿Se puede calcular $(f \circ g)(0)$? ¿Cuándo se puede calcular $(f \circ g)(x)$?
- Comprobar que $h^{-1}(x) = h(x)$. ¿Cuál será la expresión de $h^{-1} \circ h$?
- Comprobar que $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$.
- Calcular la función h/g , especificando su dominio.

SOLUCIÓN:

$$a) \quad f(0) = 0 \rightarrow b = 0 \quad f(-1) = 1 \rightarrow a + b = 1 \rightarrow a = 1 \quad f(3) = 6 \rightarrow 3c = 6 \rightarrow c = 2$$

Por tanto, la función f es: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$b) \quad \text{Dom } f = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \quad \text{Dom } g = \mathbb{R} \quad \text{Dom } h = \mathbb{R} - \{0\}$$

c) $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1)$ que no está definida., por tanto, no se puede calcular.

Para que se pueda calcular la función compuesta hay que exigir que $g(x) \in \text{Dom } f$, es decir,

$$\circ \frac{3x+2}{2} < 1 \rightarrow 3x + 2 < 2 \rightarrow x < 0$$

$$\circ \frac{3x+2}{2} > 2 \rightarrow 3x + 2 > 4 \rightarrow 3x > 2 \rightarrow x > \frac{2}{3}$$

$$d) \quad h(x) = \frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{1}{x} \rightarrow x = \frac{1}{y} \rightarrow h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

La composición de una función con su inversa es la función identidad $i(x) = x$

$$e) \quad (g \circ h)(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{3}{x} + 2}{2} = \frac{3 + 2x}{2x}$$

Calculamos su inversa:

$$y = \frac{3+2x}{2x} \rightarrow 2xy = 3 + 2x \rightarrow 2xy - 2x = 3 \rightarrow x(2y - 2) = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2y-2} \rightarrow (g \circ h)^{-1}(x) = \frac{3}{2x-2}$$

Calculamos la inversa de g:

$$y = \frac{3x+2}{2} \rightarrow 2y = 3x + 2 \rightarrow 2y - 2 = 3x \rightarrow x = \frac{2y-2}{3} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x-2}{3}$$

$$\text{Calculamos } h^{-1} \circ g^{-1}: \quad (h^{-1} \circ g^{-1})(x) = h^{-1}\left(\frac{2x-2}{3}\right) = \frac{3}{2x-2}$$

$$f) \quad \left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{1}{x} : \frac{3x+2}{2} = \frac{2}{3x^2+2x} \rightarrow \text{Dom}\left(\frac{h}{g}\right) = \mathbb{R} - \left\{0, -\frac{2}{3}\right\}$$

10 Dada las funciones definida por:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x-3} \quad g(x) = \sqrt[3]{x-1} \quad h(x) = 3x^3 + 2$$

determinar:

- Dominio de cada función.
- Expresión analítica de la función $h \circ g$.
- Valor de $(h \circ f)(0)$
- Expresión analítica de la función $g^{-1} - h$.

SOLUCIÓN:

a) Dominios:

- o $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$ ya que $x^2 - 2x - 3 = 0$ si $x = -1, x = 3$
- o $\text{Dom } g = \text{Dom } h = \mathbb{R}$

b) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(\sqrt[3]{x-1}) = 3(x-1) + 2 = 3x - 1$

c) $(h \circ f)(0) = h(f(0)) = h\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2 = \frac{17}{9}$

d) $g(x) = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow y = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow y^3 = x-1 \rightarrow x = 1 + y^3 \rightarrow g^{-1}(x) = 1 + x^3$

$$(g^{-1} - h)(x) = x^3 + 1 - (3x^3 + 2) = -2x^3 - 1$$

11 Dada las funciones definida por:

$$f(x) = 3x - 9 \quad g(x) = 2x + k$$

- Determinar k para que $f \circ g = g \circ f$
- Hallar la función inversa de f y su dominio.

SOLUCIÓN:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + k) = 3(2x + k) - 9 = 6x + 3k - 9$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 9) = 2(3x - 9) + k = 6x - 18 + k$$

Para que $f \circ g = g \circ f$ debe cumplirse $6x + 3k - 9 = 6x - 18 + k \rightarrow 2k = -9 \rightarrow k = -9/2$

b) $f(x) = 3x - 9 \rightarrow y = 3x - 9 \rightarrow 3x = y - 9 \rightarrow x = \frac{y-9}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 3$

Su dominio es \mathbb{R} .

12 Dada la función definida por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{2x+6}}$$

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular su recíproca

SOLUCIÓN:

$$a) \text{ Dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x-4}{2x+6} \geq 0 \text{ y } 2x+6 \neq 0 \right\}$$

La función es la composición de una función racional y una función irracional:

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{x-4}{2x+6} \rightarrow \sqrt{\frac{x-4}{2x+6}}$$

Por ello hay que imponer que el denominador de la función racional sea distinto de cero y que el radicando de la función irracional sea mayor o igual que cero.

- o $2x+6 \neq 0$ si $x \neq -3$
- o $\frac{x-4}{2x+6} \geq 0$ si $x \in (-\infty, -3) \cup [4, +\infty)$:

Estudiamos el signo del numerador y del denominador. Para ello seguimos los siguientes pasos:

1. Determinar los ceros del numerador y del denominador:

- o $x-4=0$ si $x=4$
- o $2x+6=0$ si $x=-3$

2. Representamos dichos valores en la recta real dividiendo esta en tres intervalos:

$$I_1 = (-\infty, -3) \quad I_2 = (-3, 4) \quad I_3 = (4, +\infty)$$

Estudiamos el signo de la fracción en cada intervalo obtenido:

- o En $(-\infty, -3)$, tomando $x = -4 \rightarrow \frac{-4-4}{-8+6} > 0$
- o En $(-3, 4)$, tomando $x = 0 \rightarrow \frac{-4}{+6} < 0$
- o En $(4, +\infty)$, tomando $x = 5 \rightarrow \frac{5-4}{10+6} > 0$

Luego, $\text{dom } f = (-\infty, -3) \cup [4, +\infty)$

b) Calculamos la función inversa, para ello despejamos x en la expresión de la función:

$$y = \sqrt{\frac{x-4}{2x+6}} \rightarrow y^2 = \frac{x-4}{2x+6} \rightarrow y^2(2x+6) = x-4 \rightarrow 2y^2x + 6y^2 = x-4 \rightarrow 2y^2x - x = -6y^2 - 4$$

$$x - 2y^2x = 6y^2 + 4 \rightarrow x(1 - 2y^2) = 6y^2 + 4 \rightarrow x = \frac{6y^2 + 4}{1 - 2y^2}$$

Por tanto, la función inversa es: $f^{-1}(x) = \frac{6x^2 + 4}{1 - 2x^2}$

13 Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x+3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcular $f \circ g$ y su dominio.

b) Determinar los valores: $(f \circ g)(1)$, $(f \circ g)(-3)$, $(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$, $(g \circ f)(3)$

SOLUCIÓN:

$$a) (f \circ g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < 0 \\ f(x^2) & \text{si } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2+3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

$$b) (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 1+3 = 4$$

$$(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(-3) = -6 + 1 = -5$$

$$(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = g(0) \text{ no definido}$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(6) = 6^2 = 36$$

14 Dada las funciones definida por:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 4} \quad g(x) = \frac{x - 5}{x^2 + 2x}$$

Hallar los dominios de f , g , $f + g$, $f \cdot g$ y f/g , sin realizar las operaciones con las funciones.

SOLUCIÓN:

$$\circ \text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$x^2 - 4 = 0 \text{ si } x = -2, x = 2$$

$$\circ \text{Dom } g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, -2\}$$

$$x^2 + 2x = 0 \text{ si } x = -2, x = 0$$

$$\circ \text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$$

$$\circ \text{Dom}(f/g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2, 5\}$$

$$g(x) = 0 \text{ si } x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

15 Dada las funciones definida por:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+4} \quad g(x) = \frac{2x}{x^2-4} \quad h(x) = \sqrt{4-x^2}$$

determinar:

- Dom $(f + g)$, dom $(g \cdot h)$, dom (h / f) , sin calcular la expresión analítica de dichas funciones.
- Expresión analítica de las funciones $f \circ g$, $g \circ h$.
- Expresión analítica de las funciones inversas de f y h .

SOLUCIÓN:

a) Calculamos los dominios de las tres funciones f , g y h :

- Dom $f = \{x \in \mathbb{R} / x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{4\}$
- Dom $g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- Dom $h = \{x \in \mathbb{R} / 4 - x^2 \geq 0\} = [-2, 2]$
- Dom $(f + g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-2, 2, 4\}$
- Dom $(g \cdot h) = \text{Dom } g \cap \text{Dom } h = (-2, 2)$
- Dom $(h/f) = \text{Dom } h \cap \text{Dom } f - \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\} = [-2, 2] - \{1\}$

$$b) (f \circ g)(x) = f\left(\frac{2x}{x^2-4}\right) = \frac{\frac{2x}{x^2-4} - 1}{\frac{2x}{x^2-4} + 4} = \frac{2x - x^2 + 4}{2x + 4x^2 - 16}$$

$$(g \circ h)(x) = g(\sqrt{4-x^2}) = \frac{2\sqrt{4-x^2}}{4-x^2-4} = -\frac{2\sqrt{4-x^2}}{x^2}$$

c) Inversa de f :

$$y = \frac{x-1}{x+4} \rightarrow yx + 4y = x - 1 \rightarrow 4y + 1 = x - yx \rightarrow x(1-y) = 1 + 4y \rightarrow x = \frac{1+4y}{1-y}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1+4x}{1-x}$$

Inversa de h :

$$y = \sqrt{4-x^2} \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 = 4 - y^2 \rightarrow x = \sqrt{4-y^2}$$

$$h^{-1}(x) = \sqrt{4-x^2}$$

16 Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} \quad g(x) = \sqrt{9-x^2} \quad h(x) = x^2 - 9$$

- Calcular el dominio de las funciones $f + g$, h/f , g/h .
- Calcular $f \circ g$, $h \circ f$, $f \circ h$.
- Hallar las funciones inversas de f , g y h .

SOLUCIÓN:

a) Determinamos los dominios de las tres funciones:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\text{Dom } g = [-3, 3]$$

$$\text{Dom } h = \mathbb{R}$$

- o $\text{Dom } (f + g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = [-3, 3]$
- o $\text{Dom } (h/f) = \text{Dom } h \cap \text{Dom } f - \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$
 $f(x) = 0$ si $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$
- o $\text{Dom } (g/h) = \text{Dom } g \cap \text{Dom } h - \{x \in \mathbb{R} / h(x) = 0\} = (-3, 3)$
 $h(x) = 0$ si $9 - x^2 = 0 \rightarrow x = -3, x = 3$

$$b) (h \circ f)(x) = h\left(\frac{x+1}{x-3}\right) = \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2 - 9 = \frac{x^2 + 2x + 1 - 9(x^2 - 6x + 9)}{x^2 - 6x + 9} = \frac{-8x^2 + 56x - 80}{x^2 - 6x + 9}$$

$$(h \circ g)(x) = h(\sqrt{9-x^2}) = 9 - x^2 - 9 = -x^2$$

$$(f \circ h)(x) = f(x^2 - 9) = \frac{x^2 - 9 + 1}{x^2 - 9 - 3} = \frac{x^2 - 8}{x^2 - 12}$$

c) Inversa de f:

$$y = \frac{x+1}{x-3} \rightarrow yx - 3y = x + 1 \rightarrow yx - x = 1 + 3y \rightarrow x(y-1) = 1 + 3y \rightarrow x = \frac{1+3y}{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{x-1}$$

Inversa de g:

$$y = \sqrt{9-x^2} \rightarrow y^2 = 9 - x^2 \rightarrow x^2 = 9 - y^2 \rightarrow x = \sqrt{9-y^2} \rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{9-x^2}$$

Inversa de h:

$$y = x^2 - 9 \rightarrow y + 9 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y+9} \rightarrow h^{-1}(x) = \sqrt{x+9}$$

17 Calcular el dominio, ceros y simetrías de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

c) $f(x) = L(x^2 + 1)$

SOLUCIÓN:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$

Dominio: Al ser una función racional su dominio será el conjunto de números reales salvo los puntos que anulan el denominador. Por tanto:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$$

Ceros: Para calcular los ceros de la función igualamos a cero:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Simetría: calculamos $f(-x)$ para compararlo con $f(x)$

$$f(-x) = \frac{(-x)-2}{(-x)^2-1} = \frac{-x-2}{x^2-1} = -\frac{x+2}{x^2-1} \Rightarrow \begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$$

Por tanto, no tiene simetría respecto del eje OY ni respecto del origen.

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

Dominio: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 6x + 8 \geq 0\}$ Veamos cuales son estos puntos:

$$x^2 - 6x + 8 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) \geq 0 \Rightarrow x \geq 4, x \leq 2$$

Por tanto, $Dom(f) = (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

Ceros:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Simetría: calculamos $f(-x)$ para compararlo con $f(x)$

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 6(-x) + 8} = \sqrt{(-x)^2 + 6x + 8} \neq f(x) \rightarrow \text{No es simétrica}$$

c) $f(x) = L(x^2 + 1)$

Dominio: el dominio de la función logarítmica es el conjunto de puntos que hacen el argumento estrictamente positivo. Entonces:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 > 0\} = \mathbb{R} \text{ puesto que } x^2 + 1 \text{ siempre es estrictamente mayor que cero.}$$

Ceros: $f(x) = 0 \Rightarrow L(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$

Simetría:

$$f(-x) = L((-x)^2 + 1) = L(x^2 + 1) = f(x)$$

Por tanto, es una función par y es simétrica respecto del eje OY .