EXAMEN DE NÚMEROS COMPLEJOS

1.- Escribir los siguientes números complejos en todas las formas:

a) $3 - \sqrt{3}\, i$ (0´75 puntos) b) 5_{135^o} (0´5 puntos)

2.- Calcular el valor de “x” para que el complejo $\dfrac{2-3xi}{3+4i}$

a) Sea un número real. b) Tenga su afijo en el eje de ordenadas.
(El primero, 0´75 puntos, el segundo, 0´5 puntos)

3.- Dados los números complejos $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = - i$, $z_3 = 1 - i$, calcular:

a) $z_1 - (z_2 \cdot z_3)$ (expresarlo en forma binómica) (0´75 puntos)
b) $(z_1)^5$ (expresarlo en forma binómica) (0´5 puntos)
c) $\sqrt[4]{z_3}$ (0´75 puntos)

4.- Dos números complejos suman (4 - i). Calcularlos, sabiendo que la parte real de uno de ellos es 3 y que al dividirlos se obtiene un número real. (1´25 puntos).

5.- Resolver en C las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$ (0´75 puntos)
b) $z (2 - i) - (3 + i) \cdot (1 + i) = (1 + i) \cdot z$ (0´75 puntos)

6.- Gráficamente, ¿cuáles son los complejos cuyo inverso coincide con su conjugado?. (0´75 puntos)

7.- El par (2, - 2) es un vértice de un cuadrado de centro el origen de coordenadas. Calcular los otros tres vértices (expresarlos en forma componente). (1 punto)

8.- Hallar dos números complejos, conjugado uno de otro, cuyo cociente sea imaginario puro y su diferencia 4 i . (1 punto)

EXAMEN DE NÚMEROS COMPLEJOS. RESUELTO

1.- Escribir los siguientes números complejos en todas las formas:

a) $3 - \sqrt{3}\,i$ b) 5_{135^o}

Forma componente: (a, b). Forma binómica: a + b i

Forma polar: r_α. Forma trigonométrica: $r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$

Si conocemos a y b , $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$

Si conocemos r y α , $a = r\cos\alpha$, $b = r\operatorname{sen}\alpha$

a) $3-\sqrt{3}i$. Está en forma binómica, a = 3, $b = -\sqrt{3}$

$r = \sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{3} = -30^o = 330^o$

Forma componente: $(3,-\sqrt{3})$. Forma binómica: $3-\sqrt{3}i$

Forma polar: $\sqrt{12}_{330^o}$. Forma trigonométrica: $\sqrt{12}(\cos 330^o + i\operatorname{sen}330^o)$

b) 5_{135^o} . Está en forma polar, r = 5, α = 135°

$a = 5\cdot\cos 135^\circ = 5\cdot\dfrac{-\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. $b = 5\cdot\operatorname{sen}135^\circ = 5\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Forma componente: $\left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$. Forma binómica: $-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}i$

Forma polar: 5_{135^o} . Forma trigonométrica: 5(cos 135° + i sen 135°)

2.- Calcular el valor de "x" para que el complejo $\dfrac{2-3xi}{3+4i}$:

a) Sea un número real.

b) Tenga su afijo en el eje de ordenadas.

$$\frac{2-3xi}{3+4i} = \frac{(2-3xi)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-9xi-8i+12xi^2}{3^2-4^2i^2} = \frac{6-9xi-8i+12x(-1)}{3^2-4^2(-1)} = \frac{(6-12x)+(-9x-8)i}{9+16} =$$
$$= \frac{6-12x}{25} - \frac{9x+8}{25}i$$

a) Para que sea un número real tiene que ser cero la parte imaginaria, $\dfrac{9x+8}{25} = 0$

de donde 9x + 8 = 0 , $x = -\dfrac{8}{9}$

b) El eje de ordenadas contiene los puntos en que la abscisa es nula. La primera componente del número complejo ha de se nula. $\dfrac{6-12x}{25} = 0$, de donde 6 - 12x = 0, $x = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

3.- Dados los números complejos $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1 - i$, calcular:

a) $z_1 - (z_2 \cdot z_3)$ b) $(z_1)^5$ c) $\sqrt[4]{z_3}$, expresando a) y b) en forma binómica.

Potencia, $z^n = (r_\alpha)^n = r^n{}_{n\cdot\alpha}$. Raíz, $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r_\alpha} = \sqrt[n]{r}_{\frac{\alpha+360\cdot k}{n}}$, con k = 0, 1, 2, 3, ... , n-1

a) $z_1 - (z_2 \cdot z_3) = (2 + 2i) - (-i) \cdot (1 - i) = (2 + 2i) - (-i + i^2) = (2 + 2i) - (-1 - i) = 3 + 3i$

b) $(z_1)^5$. En z_1 , a = 2, b = 2, r = $\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$. $\alpha = \text{arctg}\frac{2}{2} = \text{arctg}1 = 45^o$

$(z_1)^5 = \left(\sqrt{8}_{45^o}\right)^5 = \left(\sqrt{8}\right)^5_{45^o\cdot 5} = \sqrt{8^5}_{225^o} = 128\sqrt{2}_{225^o}$

Módulo = r = $128\sqrt{2}$, argumento = α = 225 º

a = r cos α = $128\sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-128\cdot 2}{2} = -128$

b = r sen α = $128\sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{128\cdot(-2)}{2} = -128$. En forma binómica es -128 - 128 i

c) $\sqrt[4]{z_3}$. En z_3 , a = 1, b = -1, $r = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\alpha = \text{arctg}\frac{-1}{1} = 315^o$

$\sqrt[4]{z_3} = \sqrt[4]{\sqrt{2}_{315^o}} = \sqrt[4]{\sqrt{2}}_{\frac{315^o+360^o\cdot k}{4}} = \sqrt[8]{2}_{78^o45'+90^o\cdot k}$, con k = 0, 1, 2, 3

Si k = 0 tenemos una raíz, $\sqrt[8]{2}_{78^o45'}$ Si k = 1 tenemos otra raíz, $\sqrt[8]{2}_{168^o45'}$

Si k = 2 tenemos otra raíz, $\sqrt[8]{2}_{258^o45'}$ Si k = 3 tenemos otra raíz, $\sqrt[8]{2}_{348^o45'}$

4.- Dos números complejos suman (4 - i). Calcularlos, sabiendo que la parte real de uno de ellos es 3 y que al dividirlos se obtiene un número real.

Si la parte real de uno es 3, el número complejo es 3 + b i

Si la suma es 4 - i , la parte real de la suma es 4 , por tanto, el otro número tiene parte real 4 - 3 = 1

Los números son 3 + b i , 1 + c i

Suman 4 - 1 , (3 + b i) + (1 + c i) = 4 - i

4 + (b + c) i = 4 - i de donde b + c = -1

Su cociente es un número real, $\frac{3+bi}{1+ci} = \frac{(3+bi)(1-ci)}{(1+ci)(1-ci)} = \frac{3+bi-3ci-bci^2}{1^2-c^2i^2} = \frac{3+bi-3ci-bc(-1)}{1^2-c^2(-1)} =$

$= \frac{(3+bc)+(b-3c)i}{1+c^2} = \frac{3+bc}{1+c^2} + \frac{(b-3c)}{1+c^2}i$

Ha de ser $\frac{b-3c}{1+c^2} = 0$, b - 3c = 0

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, $\begin{cases} b+c=-1 \\ b-3c=0 \end{cases}$

Restando, 4c = -1 , de donde $c = -\frac{1}{4}$. Sustituyendo en la primera, $b = -1-c = -1+\frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$

Los dos números complejos son $3-\frac{3}{4}i$ y $1-\frac{1}{4}i$

5.- Resolver en C las siguientes ecuaciones

a) $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$ b) $z(2 - i) - (3 + i)\cdot(1 + i) = (1 + i)\cdot z$

a) $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$. Los divisores del término independiente, 10, son 1, -1, 2, -2, 5, -5, 10 y -10

Si x = 1 , sustituyendo queda $1 - 4 + 9 - 10 = 10 - 14 = -4 \neq 0$. 1 no es solución.

Si x = -1 , sustituyendo queda $-1 - 4 - 9 - 10 = -24 \neq 0$. -1 no es solución.

Si x = 2 , sustituyendo queda $8 - 16 + 18 - 10 = 26 - 26 = 0$. 2 es solución.
Dividimos por Ruffini

	1	-4	9	-10
2	↓	2	-4	10
	1	-2	5	0

Queda el polinomio $x^2 - 2x + 5$

Igualamos a cero, $x^2 - 2x + 5 = 0$. Es una ecuación de segundo grado.

Resolviendo, $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} 1+2i \\ 1-2i \end{cases}$

Soluciones: $x = 2$, $x = 1 + 2i$, $x = 1 - 2i$

b) $z(2 - i) - (3 + i)\cdot(1 + i) = (1 + i)\cdot z$

$z(2 - i) - (1 + i)z = (3 + i)\cdot(1 + i)$

$z(2 - i - 1 - i) = (3 + i)(1 + i)$

$$z = \frac{2+4i}{1-2i} = \frac{(2+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+4i+8i^2}{1-4i^2} = \frac{2+8i-8}{1+4} = \frac{-6+8i}{5} = -\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i$$

6.- Gráficamente, ¿cuáles son los complejos cuyo inverso coincide con su conjugado?.

Son de la forma $a + bi$. Su conjugado es $a - bi$.

Ha de cumplir $\dfrac{1}{a+bi} = a - bi$

$$1 = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

Siendo r su módulo, es $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1} = 1$

Esos números complejos son los puntos de una circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas.

7.- El par (2, - 2) es un vértice de un cuadrado de centro el origen de coordenadas. Calcular los otros tres vértices (en forma componente).

Ese número es una de las cuatro raíces de un número complejo.

El número es (2, -2), a = 2, b = -2. $r=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$. $\alpha=\text{arctg}\frac{-2}{2}=315^\circ$

Esa solución es $\sqrt{8}_{135^\circ}$, $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Para calcular las otras tres se suma al argumento $\frac{360^\circ\cdot k}{4}=90^\circ\cdot k$, con k = 1, 2, 3

Si k = 1 ,

$$2\sqrt{2}_{315^\circ+90^\circ}=2\sqrt{2}_{405^\circ}=2\sqrt{2}_{45^\circ}=2\sqrt{2}\cos 45^\circ+2\sqrt{2}\text{sen}45^\circ i=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}i=2+2i$$

Si k = 2 ,

$$2\sqrt{2}_{45^\circ+180^\circ}=2\sqrt{2}_{225^\circ}=2\sqrt{2}\cos 225^\circ+2\sqrt{2}\text{sen}225^\circ i=2\sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}\frac{-\sqrt{2}}{2}i=-2-2i$$

Si k = 3 ,

$$2\sqrt{2}_{45^\circ+270^\circ}=2\sqrt{2}_{315^\circ}=2\sqrt{2}\cos 315^\circ+2\sqrt{2}\text{sen}315^\circ i=2\sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}i=-2+2i$$

Los otros tres vértices son los pares (2, 2) , (-2, -2) y (-2, 2)

8.- Hallar dos números complejos, conjugado uno de otro, cuyo cociente sea imaginario puro y su diferencia 4 i .

Son a + b i y a - b i

Su cociente es $\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)}=\frac{a^2+abi+abi+b^2i^2}{a^2-b^2i^2}=\frac{a^2+2abi-b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$

Es imaginario puro, por tanto $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=0$, $a^2-b^2=0$, $a^2=b^2$

Su diferencia es (a + b i) - (a - b i) = 2b i

La diferencia vale 4 i , por tanto 2b i = 4 i , de donde b = 2

Como además $a^2=b^2$, es $a^2=4$, de donde a = 2, a = -2

Hay dos solucione: Los números complejos son $\begin{cases}2+2i\\2-2i\end{cases}$ y $\begin{cases}-2+2i\\-2-2i\end{cases}$