

1. Estudia y clasifica los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-3x-6}{x+1}, & x < -1 \\ 4x-5, & -1 < x \leq 2 \\ \frac{4}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$$

(3 puntos)

2. Calcula el valor de  $a$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{3a+x}{x^2+1}, & x \leq -3 \\ 2x-a, & x > -3 \end{cases}$ , sea continua en su dominio. Razona la respuesta.

(2 puntos)

3. Calcula los siguientes límites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{4x+5}{5x+1} \right]^{\frac{x^2}{x+1}}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x+3}{2x-2} \right]^{-7x^2}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x+7}{\sqrt{7x^2+7}}$

(3 puntos)

4. Determina las asíntotas verticales y horizontales de la función:

$$f(x) = \frac{4x+4}{x^2-1}$$

(2 puntos)

## Soluciones

**1.** Dominio de  $f = \mathbb{R} - \{-1\}$ . La función es continua en todos los puntos distintos de -1 y 2.

Estudiamos ahora la función en  $x = -1$  y en  $x = 2$ .

En  $x = -1$  presenta una **discontinuidad evitable** ya que:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-1) \text{ no existe} \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3(x-2)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} 3(x-2) = -9 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (4x-5) = -9 \end{array} \right\}$$

En  $x = 2$  presenta una **discontinuidad inevitable de 1ª especie** ya que:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (4x-5) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x-2} = +\infty \end{array} \right\}$$

**2.** Para que  $f(x)$  sea continua ha de serlo en  $x = -3$ , ya que en el resto de los puntos continua.

$$f(x) \text{ es continua en } x = -3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(-3) = \frac{3a-3}{10} \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{3a+x}{x^2+1} = \frac{3a-3}{10} \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} (2x-a) = -6-a \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{3a-3}{10} = -6-a$$

**3.** (a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{4x+5}{5x+1} \right]^{\frac{x^2}{x+1}} = \left( \frac{4}{5} \right)^{-\infty} = +\infty$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x+3}{2x-2} \right]^{-7x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot (-7x^2)}{2x-2}} = e^{-\infty} = 0$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x+7}{\sqrt{7x^2+7}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x+7}{\sqrt{7x^2+7}} = \frac{-7}{\sqrt{7}}$

**4.**  $Dom f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x+4}{x^2-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x+4}{x^2-1} = +\infty \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{La recta } x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x+4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{x-1} = -2 \Leftrightarrow$  La recta  $x = -1$  **NO** es una asíntota vertical.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+4}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow$  La recta  $y = 0$  es una asíntota horizontal.

