Examen de Matemáticas 2º de bachillerato de C.S. (Cálculo diferencial)

Alumno………..

Fecha: 23 de Febrero 12

OPCIÓN A

1. Determina los valores de los parámetros a y b de modo que la función *f*(*x*) sea continua en su dominio.

$$f(x)=\begin{cases} x+a, si\ x\le 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{3x}, si\ 0<x<1 \\ bx, si\ x\ge 1 \end{cases}$$

2. El número de personas que utilizan las instalaciones de una piscina de verano viene expresado por la función $f(t)=10t^3-120t^2+450t$, donde t representa el tiempo transcurrido desde la apertura de la piscina, 12 de la mañana (instante t = 0) hasta el cierre de la piscina que se produce a las 19 horas de la tarde.

(a) Determina el dominio en el que estudiamos la función. ¿Cuántas personas quedan a la hora del cierre?

(b) ¿A qué hora el número de personas que utilizan la piscina es mayor? ¿Cuántas personas hay en ese momento?

3. Dada la función $f(x)=\frac{4x^2+x+3}{3+4x^2}$, determina:

(a) Dominio y asíntotas.

(b) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

4. **(a)** Determina los parámetros a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=ax^2-b$ en el punto (1, 5) sea la recta de ecuación $y=3x+2$.

(b) Calcula las funciones derivadas de:

$$f(x)=e^{1-x}+\ln(x+2) \qquad \text{y} \qquad g(x)=\sqrt{log_5\left(\frac{2x-1}{3x^2}\right)}$$

www.yoquieroaprobar.es

Examen de Matemáticas 2º de bachillerato de C.S. (Cálculo diferencial)

Alumno……..

Fecha: 23 de Febrero 12

OPCIÓN B

1. Determina y clasifica los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, si\ x < -1 \\ x^2-3, si -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{3}{x-2}, si\ x > 2 \end{cases}$$

2. Una empresa dedicada a montajes en cadena, ha determinado que el número de montajes, M(t), realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento, t, de acuerdo con la función:

$$M(t) = \frac{30t}{t+4}$$

(a) ¿Cuántos montajes realizará el primer día de entrenamiento? ¿Y el sexto?

(b) ¿Existe un número de días de entrenamiento para los que el número de montajes es máximo? Razona la respuesta.

(c) ¿Qué ocurriría, con el número de montajes, si nunca acabara el entrenamiento? Justifícalo.

3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$, determina:

(a) Dominio y asíntotas.

(b) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

4. **(a)** Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, calcula a, b y c para que el punto P = (1, 5) y el de abscisa x = 2 sean extremos relativos. Razona la respuesta.

(b) Calcula las funciones derivadas de:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{(3x-1)^2}} \qquad \text{y} \qquad g(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \left(1+\sqrt{x}\right)$$

www.yoquieroaprobar.es

Examen de Matemáticas 2º de bachillerato de C.S. (Cálculo diferencial)

SOLUCIÓN OPCIÓN A

1. Tendremos que exigir que la función sea continua en x = 0 y x = 1, puesto que en el resto de los puntos ya lo es.

f continua en x = 0 $\underset{DEF}{\Longleftrightarrow} f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$\left.\begin{cases} f(0) = a \\ \lim\limits_{x\to 0^-} (x+a) = a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{3x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)} = \dfrac{1}{3} \end{cases}\right\} \underset{DEF}{\Longleftrightarrow} a = \frac{1}{3}$$

f continua en x = 1 $\underset{DEF}{\Longleftrightarrow} f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$$\left.\begin{cases} f(1) = b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} bx = b \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{3x} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}\right\} \underset{DEF}{\Longleftrightarrow} b = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

2. **(a)** $\boldsymbol{f(7) = 10\cdot 7^3 - 120\cdot 7^2 + 450\cdot 7 = 700}$ personas

(b) $f'(x) = 30t^2 - 240t + 450$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 30t^2 - 240t + 450 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow t = 3, t = 5$$

Intervalos	0<x<3	3<x<5	5<x<7
Signo de f’	positivo	negativo	positivo
Función f	creciente	decreciente	creciente

La función presenta en x = 3 un máximo relativo, siendo f(3) = 540 personas. Pero a la hora del cierre, x = 7, la función alcanza un máximo absoluto de f(7) = 700 personas. Por lo tanto, a la hora del cierre, 19 horas, hay un mayor número de personas que utilizan la piscina.

3. **(a)** Dominio f = R

No tiene asíntotas verticales.

La recta y = 1 es una asíntota horizontal ya que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+x+3}{3+4x^2} = 1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+x+3}{3+4x^2}$$

No tiene asíntotas oblicuas pues:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

(b) $f'(x) = \frac{3-4x^2}{(3+4x^2)^2}$ $\qquad f''(x) = \frac{32x^3-72x}{(3+4x^2)^3}$

www.yoquieroaprobar.es

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x(32x^2 - 72) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}, x = \frac{-3}{2}$$

Intervalo	x<-1.5	-1.5<x<0	0<x<1.5	x>1.5
Signo de f''(x)	negativa	positiva	negativa	positiva
Curvatura	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Los puntos de abscisas x = 0, x = -1.5, x = 1.5 son de inflexión.

SOLUCIÓN OPCIÓN B

1. $Domf = R - \{-1\}$

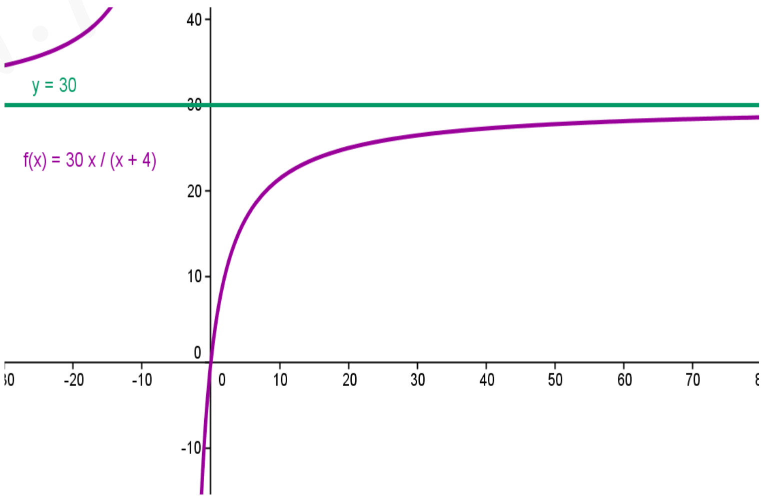
$$\left\{\begin{matrix} x = -1 \notin Domf \\ \lim_{x\to -1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = -2 \\ \lim_{x\to -1^+} (x^2 - 3) = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x)\ presenta\ una\ discontinuidad\ evitable\ en\ x = -1$$

$$\left\{\begin{matrix} f(2) = 1 \\ \lim_{x\longrightarrow 2^-} (x^2 - 3) = 1 \\ \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty \end{matrix}\right\} \Longrightarrow f(x) presenta\ en\ x = 2\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ 1^{\underline{a}}\ especie$$

1. **(a)** $\boldsymbol{M(1) = \frac{30}{5} = 6}$ montajes. $M(6) = \frac{180}{10} = 18$ montajes.

(b) $\boldsymbol{M'(t) = \frac{120}{(t+4)^2} > 0, \forall t \Longrightarrow M(t) es\ creciente\ en\ R^+ \Longrightarrow No\ presenta\ extremos\ relativos}$

(c) $\boldsymbol{\lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{30t}{t+4} = 30}$ El número de montajes se va incrementando pero sin sobrepasar el nº de 30.



www.yoquieroaprobar.es

Examen de Matemáticas 2º de bachillerato de C.S. (Cálculo diferencial)

3. (a) $\boldsymbol{Domf = R - \{1\}}$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2+3}{x-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2+3}{x-1} = +\infty \end{cases}\right\} \Longrightarrow la\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Longrightarrow No\ tiene\ asíntotas\ horizontales$$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3}{x^2-x} = 1 = m \\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+3}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x-1} = 1 \end{cases}\right\} \Longrightarrow y = x + 1\ es\ asíntota\ oblícua$$

(b) $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, $\quad f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$ $\qquad f''(x) \neq 0\ en\ su\ dominio$

Intervalo	x<1	x>1
Signo de f’’(x)	negativa	positiva
Curvatura	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

No tiene puntos de inflexion pues x = 1 no es del dominio.

4. **(a)** $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$P(1{,}5) \in gráfica \Longrightarrow f(1) = 5 \Longrightarrow a + b + c = 5$

La función es derivable en R y x = 1 es extremo relativo $\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

La función es derivable en R y x = 2 es extremo relativo $\Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones obtenemos: a = 2, b = -9, c = 12.

(c) $\boldsymbol{f(x) = \ln\sqrt{\frac{1}{(3x-1)^2}} = \frac{1}{2}[\ln 1 - 2\ln(3x-1)] = -\ln(3x-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{3x-1}}$

$$\boldsymbol{g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \sqrt{x}\right) + e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x} + 2\right)}{2\sqrt{x}}}$$

www.yoquieroaprobar.es