EJERCICIOS DE LOGARITMOS.

1.-Resuelve aplicando la definición de logaritmo:

$\log_2 8 = 3 \quad (2^3 = 8)$ $\qquad \log_2 16 = 4 \quad (2^4 = 16)$ $\qquad \log_3 9 = 2 \quad (3^2 = 9)$

$\log 100 = 2 \quad (10^2 = 100)$ $\qquad \log_6 1 = 0 \quad (6^0 = 1)$ $\qquad \log_7 \frac{1}{7} = -1 \quad \left(7^{-1} = \frac{1}{7}\right)$

$\log_4 4 = 1 \quad (4^1 = 4)$ $\qquad \log_2 4 = 2 \quad (2^2 = 4)$ $\qquad \log_4 2 = \frac{1}{2} \quad \left(4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = 2\right)$

$\log_5 1 = 0 \quad (5^0 = 1)$ $\qquad \log_5 5 = 1 \quad (5^1 = 5)$ $\qquad \log_3 27 = 3 \quad (3^3 = 27)$

$\log_3 \frac{1}{9} = -2 \quad \left(3^{-2} = \frac{1}{9}\right)$ $\qquad \log_3 243 = 5 \quad (3^5 = 243)$ $\qquad \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \quad \left(2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\right)$

2.- Resuelve aplicando la definición de logaritmo:

$\log_3 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \quad \left(3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}\right)$ $\qquad \log_3 \frac{1}{81} = -4 \left(3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}\right)$ $\qquad \log_5 \sqrt[3]{5^2} = \frac{2}{3} \quad \left(5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}\right)$

$\log_7 \sqrt[3]{49} = \frac{2}{3} \quad \left(7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}\right)$ $\qquad \log_6 \frac{1}{6} = -1 \quad \left(6^{-1} = \frac{1}{6}\right)$ $\qquad \log_8 \frac{1}{64} = -2 \left(8^{-2} = \frac{1}{64}\right)$

$\log_2 \frac{1}{8} = -3 \quad \left(2^{-3} = \frac{1}{8}\right)$ $\qquad \log_5 \frac{1}{25} = -2 \ . \left(5^{-2} = \frac{1}{25}\right)$ $\qquad \log \frac{1}{1000} = -3 \left(10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}\right)$

$\log_{27} 3 = \frac{1}{3} \left(27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3\right)$ $\qquad \log_5 \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3} \quad \left(5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}\right)$ $\qquad \log_3 \frac{1}{27} = -3 \quad \left(3^{-3} = \frac{1}{27}\right)$

$\log_{25} 5 = \frac{1}{2} \left(25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{2}} = 5\right)$ $\qquad \log_{49} 7 = \frac{1}{2} \left(49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7\right)$ $\qquad \log_{125} 5 = \frac{1}{3} \left(125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5\right)$

3.- Calcula el valor de x que satisface las siguientes igualdades:

$\log_2 x = 4 \ ; \ x = 2^4 = 16$ $\qquad \log_x 4 = 2 \ ; x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = 2$ $\qquad \log_4 x = \frac{1}{2} \ ; \ x = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

$\log_3 x = 2 \ ; \ x = 3^2 = 9$ $\qquad \log_x 8 = 3 \ ; \ x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$ $\qquad \log_x 16 = 4 \ ; \ x^4 = 16 \rightarrow x = \sqrt[4]{16} = 2$

$\log_5 x = -2 \ ; x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$ $\qquad \log_x 100 = 2 \ ; \ x^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{100} = 10$ $\qquad \log_x 30 = 1 \ ; \ x^1 = 30 \rightarrow x = 30$

4.- Calcula sin utilizar la calculadora y comprueba:

a) $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \quad$ comprobamos: $2^6 = 64$

b) $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 \sqrt{3^3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \quad$ comprobamos: $3^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{3^3} = \sqrt{27}$

c) $\log 0'0001 = \log \frac{1}{10000} = \log\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \log 10^{-4} = -4 \quad$ comprobamos: $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10.000} = 0{,}0001$

d) $\log_{343} 7 = \frac{1}{3} \quad$ *Como* $343 = 7^3 \rightarrow 7 = \sqrt[3]{343} = 343^{\frac{1}{3}}$; *luego* $\log_{343} 7 = \log_{343} 343^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

e) $\log_2 \sqrt{8} = \log_2 \sqrt{2^3} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \quad$ comprobamos: $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8}$

f) $\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \log_3 3^{-4} = -4 \quad$ comprobamos: $3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

5.- Calcula utilizando las propiedades de los logaritmos:

a) $\log 0'001 \overset{\text{lo escribo como número racional}}{=} \log\frac{1}{1000} \overset{\text{Lo escribo como } \textit{resta}.}{=} \log 1 - \log 1000 \overset{\textit{Doy los valores a los logaritmos}}{=} 0-3=-3$

O bien:

$\log 0'001 \overset{\text{lo escribo como número racional}}{=} \log\frac{1}{1000} \overset{\text{Lo escribo como potencia}}{=} \log\left(\frac{1}{10}\right)^3 \overset{\text{Lo paso a potencia de la base}}{=} \log 10^{-3} \overset{\text{bajo el exponente}}{=} -3\cdot\log 10 \overset{\text{Como } \log_{10}10=1}{=} -3$

b) $2\log 9 - \log 81 \overset{\textit{Pongo los exponentes}}{=} \log 9^2 - \log 81 \overset{\text{Elevo}}{=} \log 81 - \log 81 \overset{\text{Como se resta la misma cosa...}}{=} 0$ o bien:

$2\log 9 - \log 81 \overset{\text{Factorizo las potencias.}}{=} 2\cdot\log 3^2 - \log 3^4 \overset{\text{Bajo los exponentes.}}{=} 2\cdot 2\cdot\log 3 - 4\cdot\log 3 = 4\log 3 - 4\log 3 \overset{\text{Como se resta la misma cantidad....}}{=} 0$

c) $\log 0'5 + \log 2 \overset{\textit{La suma de logaritmos es el logaritmo del producto}}{=} \log(0{,}5\cdot 2) = \log 1 \overset{10^0=1}{=} 0$ o bien:

$\log 0'5 + \log 2 \overset{\textit{Escribimos el decimal como fracción}}{=} \log\frac{1}{2} + \log 2 \overset{\textit{Escribo la fracción como potencia}}{=} \log 2^{-1} + \log 2 \overset{\text{Bajo los exponentes.}}{=} -\log 2 + \log 2 \overset{\text{Como se resta la misma cosa...}}{=} 0$

O bien: $\log 0'5 + \log 2 \overset{\textit{Escribimos el decimal como fracción}}{=} \log\frac{1}{2} + \log 2 \overset{\textit{Desarrollo la fracción.}}{=} \log 1 - \log 2 + \log 2 \overset{\text{Como se resta la misma cosa...}}{=} \log 1 = 0$

d) $\log 4 + \log\frac{1}{8} + \log 2 \overset{\textit{Es el logaritmo de un producto.}}{=} \log\left(\frac{4\cdot 2}{8}\right) = \log\left(\frac{8}{8}\right) = \log 1 = 0$ o bien:

$\log 4 + \log\frac{1}{8} + \log 2 \overset{\textit{Son potencias de dos}}{=} \log 2^2 + \log 2^{-3} + \log 2 \overset{\text{Bajo los exponentes.}}{=} 2\log 2 - 3\log 2 + \log 2 \overset{\text{Saco factor común}}{=} \overbrace{(2-3+1)}^{0}\cdot\log 2 = 0$

O bien: $\log 4 + \log\frac{1}{8} + \log 2 \overset{\textit{La suma de logaritmos es el logaritmo del producto}}{=} \log\left(\frac{4\cdot 2}{8}\right) = \log 1 \overset{10^0=1}{=} 0$

e) $\log 1000 - \log 10 \overset{\textit{Escribo como potencias}}{=} \log 10^3 - \log 10 \overset{\textit{Por la definición de logaritmo decim.}}{=} 3-1=2$

$\log 1000 - \log 10 \overset{\textit{Escribo mil como potencia.}}{=} \log 10^3 - \log 10 \overset{\textit{Bajo los exponentes}}{=} 3\cdot\log 10 - \log 10 \overset{\textit{Saco factor común.}}{=} \overbrace{(3-1)}^{\textit{Es dos}}\cdot\overbrace{\log 10}^{\textit{Como } \log_{10}10=1} = 2$

O bien: $\log 1000 - \log 10 \overset{\textit{Es el logaritmo de una división}}{=} \log\frac{1000}{10} \overset{\textit{Divido}}{=} \log 100 \overset{\textit{Factorizo}}{=} \log 10^2 \overset{\textit{Bajo Exponente}}{=} 2\log 10 \overset{\textit{Como } \log_{10}10=1}{=} 2$

f) $\log 50 + \log 2 = \log\frac{100}{2} + \log 2 \overset{\text{El logaritmo de una división...}}{=} \log 100 - \log 2 + \log 2 \overset{\text{Los log2 se anulan}}{=} \log 10^2 \overset{\textit{Bajo exponente.}}{=} 2\cdot\log 10 \overset{\textit{Como } \log_{10}10=1}{=} 2$

O bien: $\log 50 + \log 2 \overset{\textit{logaritmo de un producto}}{=} \log(50\cdot 2) \overset{\text{Multiplico}}{=} \log 100 \overset{\textit{Como } 100=10\cdot 10}{=} \log 10^2 \overset{\textit{Bajo exponente}}{=} 2\log 10 \overset{\textit{Como } \log_{10}10=1}{=} 2$

g) $\log 0{,}1 \overset{\textit{Escribo el decimal como fracción.}}{=} \log\frac{1}{10} \overset{\textit{Desarrollo la división}}{=} \log 1 - \log 10 = 0-1=-1$

$\log 0{,}1 \overset{\textit{Escribo el decimal como fracción.}}{=} \log\frac{1}{10} \overset{\textit{Escribo la fracción como potencia de la base.}}{=} \log 10^{-1} \overset{\textit{Bajo el exponente}}{=} -1\cdot\log 10 \overset{\text{Como } \log_{10}10=1}{=} -1$

h) $4\cdot(\log 2 + \log 5) - 3\cdot\log 10 \overset{\text{La suma de logaritmos es el log de la multiplicación}}{=} 4\cdot\log 10 - 3\cdot\log 10 \overset{\textit{Saco factor común}}{=} (4-3)\cdot\log 10 \overset{\textit{Como } \log_{10}10=1}{=} 1$

i) $2\cdot\left(\log 8+\log\frac{1}{2}+\log\frac{1}{4}\right)\overset{\substack{\text{La suma de logaritmos es el}\\ \text{logaritmo del producto}}}{=} 2\cdot\log\left(\frac{8}{2\cdot 4}\right)=2\cdot\log 1\overset{\log_{10}1=0}{=}0$

O bien:

$2\cdot\left(\log 8+\log\frac{1}{2}+\log\frac{1}{4}\right)\overset{\substack{\text{Argumentos}\\ \text{como potencias}}}{=} 2\cdot\left(\log 2^3+\log 2^{-1}+\log 2^{-2}\right)\overset{\substack{\text{Bajo los}\\ \text{exponentes}}}{=} 2\cdot\left(3\cdot\log 2-\log 2-2\cdot\log 2\right)\overset{\substack{\text{Saco factor}\\ \text{común}}}{=}$

$2\cdot\overbrace{(3-1-2)}^{\text{Es cero}}\cdot\log 2=0$

j) $\log 0,0001\overset{\substack{\text{Escribo el decimal}\\ \text{como fracción.}}}{=}\log\frac{1}{10000}\overset{\substack{\text{Escribo la fracción}\\ \text{como resta}}}{=}\log 1-\log 10.000=0-4=-4$

$\log 0,0001\overset{\substack{\text{Escribo el decimal}\\ \text{como fracción.}}}{=}\log\frac{1}{10000}\overset{\substack{\text{Escribo la fracción}\\ \text{como potencia de la base.}}}{=}\log 10^{-4}\overset{\substack{\text{Bajo el}\\ \text{exponente}}}{=}-4\cdot\log 10\overset{\text{Como }\log_{10}10=1}{=}-4$

k) $3\log 3-\log 27\overset{\substack{\text{Escribo multiplicación}\\ \text{como potencia.}}}{=}\log 3^3-\log 27\overset{\substack{\text{Calculo la}\\ \text{potencia}}}{=}\log 27-\log 27\overset{\substack{\text{Se resta la}\\ \text{misma cantidad.}}}{=}0$

6.- Calcula el valor de:

a) $\log 0,01=\log\frac{1}{100}=\log\left(\frac{1}{10}\right)^2=\log 10^{-2}=-2\cdot\log 10=-2$

b) $\log\sqrt{1000}=\log\sqrt{10^3}=\log 10^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\cdot\log 10=\frac{3}{2}$

c) $\log 125+\log 8=\log 1000=3$

d) $\log 5-\log 500=\log\frac{5}{500}=\log\frac{1}{100}=\log 1-\log 100=0-2=-2$ O bien:

$\log 5-\log 500=\log 5-\log(5\cdot 100)=\log 5-(\log 5+\log 100)=\log 5-\log 5-\log 100=-2$

e) $2\log 3-\log 9=2\log 3-\log 3^2=2\log 3-2\log 3=0$ O bien:

$2\log 3-\log 9=\log 3^2-\log 9=\log 9-\log 9=0$

f) $\log 0,02+\log 5=\log 0,1=\log\frac{1}{10}=\log 1-\log 10=0-1=-1$ O bien:

$\log 0,02+\log 5=\log\frac{1}{50}+\log 5=\overbrace{\log 1}^{0}-\log 50+\log 5=-\left(\log 5+\log 10\right)+\log 5=-\log 5-\log 10+\log 5=$

$=-\log 10=-1$

O bien: $\log 0,02+\log 5=\log(0,02\cdot 5)=\log 0,1=\log\frac{1}{10}=\log 1-\log 10=0-1=-1$

g) $\log 2500-2\log 5=\log(25\cdot 100)-\log 5^2=\log 25+\log 100-\log 25=\log 100=2$ O bien:

$\log 2500-2\log 5=\log\left(\overset{5^2}{25}\cdot 100\right)-2\log 5=\log 5^2+\log 100-2\log 5=2\log 5+2-2\log 5=2$

h) $\log\frac{1}{5}+\log 5=\log 1-\log 5+\log 5=\log 1=0$ O bien:

$\log\frac{1}{5}+\log 5=\log 5^{-1}+\log 5=-\log 5+\log 5=0$

i) $\log 1000 - \log 100 = 3 - 2 = 1$ O bien:

$\log 1000 - \log 100 = \log 10^3 - \log 10^2 = 3 \cdot \log 10 - 2 \cdot \log 10 = (3-2) \cdot \log 10 = 1$

7.- Calcula utilizando las propiedades de los logaritmos y sin utilizar la calculadora.

a) $\log 40 - \log 400 = \log 40 - \log(40 \cdot 10) = \lg 40 - (\log 40 + \log 10) = \log 40 - \log 40 - \log 10 = -1$

b) $\log \sqrt[4]{1000} = \log \sqrt[4]{10^3} = \log 10^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \cdot \log 10 = \frac{3}{4}$

c) $\log 0'001 = \log \frac{1}{1000} = \log \frac{1}{10^3} = \log 10^{-3} = -3 \cdot \log 10 = -3$

d) $7 \log 10 - 3(\log 25 + \log 4) = 7 \cdot \log 10 - 3 \cdot \log 100 = 7 \cdot \log 10 - 3 \cdot \log 10^2 = 7 \cdot \log 10 - 6 \cdot \log 10 = \log 10 = 1$

8.- Completa los huecos para que sean ciertas las siguientes igualdades:

a) log _7_ + log 3 = log 21

b) log 16 = _4_ · log 2

c) log $\sqrt{8}$ = $\underline{\log \sqrt{2}}$ · log 2

d) log _9_ = 2 · log 3

e) log 8 – log 2 = log _4_

f) log 28 = log _7_ + _2_ · log 2

g) log 72 = log ($\underline{2}^3 \cdot 3^2$) = log $\underline{2}^3$ + log 3^2 = _3_ · log 2 + 2 · log _3_

9.- Indica si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades y razona tu respuesta:

a) log 100 = log 50 +log 2 CIERTO porque: $\log 50 + \log 2 = \log(50 \cdot 2) = \log 100$

b) log 100 = 2 · log 50 FALSO porque: $2 \cdot \log 50 = \log 50^2 = \log 2500$, no $\log 100$.

c) log 4 = 2 · log 2 CIERTO porque: $2 \log 2 = \log 2^2 = \log 4$

d) log 10 = log 5 + log 5 FALSO porque: $\log 5 + \log 5 = \log(5 \cdot 5) = \log 25$, no log 10.

10.- Sin utilizar la calculadora, halla, como en el ejemplo, los siguientes logaritmos:

Ejemplo: $\log_3 729 = \frac{\log 729}{\log 3} = \frac{\log 3^6}{\log 3} = \frac{6 \cdot \log 3}{\log 3} = 6$

a) $\log_5 625 = \frac{\log 625}{\log 5} = \frac{\log 5^4}{\log 5} = \frac{4 \cdot \log 5}{\log 5} = 4$

b) $\log_6 216 = \frac{\log 216}{\log 6} = \frac{\log 6^3}{\log 6} = \frac{3 \cdot \log 6}{\log 6} = 3$

c) $\log_3 243 = \log_3 243 = \frac{\log 243}{\log 3} = \frac{\log 3^5}{\log 3} = \frac{5 \cdot \log 3}{\log 3} = 5$

11.- Expresa en función de log 2 :

a) $\log 32 + \log 4 + \log 8 = \log 2^5 + \log 2^2 + \log 2^3 = 5 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 2 = (5+2+3) \cdot \log 2 = 10 \cdot \log 2$

b) $(\log 8-\log 2)+(\log 6-\log 3)=\log\frac{8}{2}+\log\frac{6}{3}=\log 4+\log 2=\log(4\cdot 2)=\log 8=\log 2^3=3\cdot\log 2$

c) $\log 1024+\log\sqrt{8}-\log 160=\log 2^{10}+\log 2^{\frac{3}{2}}-(\log 2^4+\log 10)=10\log 2+\frac{3}{2}\log 2-4\log 2-1=$

$=\left(10+\frac{3}{2}-4\right)\cdot\log 2-1=\frac{19}{2}\cdot\log 2-1$

12.- Expresa en función de log 3:

a) $\log 9-3\cdot\log 3=\log 3^2-3\cdot\log 3=2\log 3-3\cdot\log 3=(2-3)\cdot\log 3=-\log 3$

b) $\log\frac{1}{3}+\log 27-\log 3=\log 3^{-1}+\log 3^3-\log 3=-\log 3+3\log 3-\log 3=(1+3-1)\cdot\log 3=\log 3$

c) $\log\overbrace{18}^{2\cdot 3^2}-(\log 3+\log 2)=(\log 2+\log 3^2)-(\log 3+\log 2)=\log 2+2\log 3-\log 3-\log 2=\log 3$

d) $\log\overbrace{54}^{2\cdot 3^3}+2\log 2-\log\overbrace{8}^{2^3}=(\log 2+\log 3^3)+2\log 2-\log 2^3=\log 2+3\log 3+2\log 2-3\log 2=$

$=3\log 3+\log 2+2\log 2-3\log 2=3\log 3+\overbrace{(1+2-3)}^{0}\cdot\log 2=3\cdot\log 3$

e) $\log\overbrace{27000}^{27\cdot 1000=3^3\cdot 10^3}-\left(\log\overbrace{30}^{3\cdot 10}+\log 3\right)=\log 3^3+\log 10^3-(\log 3+\log 10+\log 3)=$

$3\log 3+3\log 10-\log 3-\log 3-\log 10=\overbrace{(3-1-1)}^{1}\cdot\log 3+\overbrace{(3-1)}^{2}\cdot\overbrace{\log 10}^{1}=\log 3+2$

13.- Expresa en función de log 5:

a) $\log 25-3\cdot\log\frac{1}{5}=\log 5^2-3\cdot\left(\overbrace{\log 1}^{0}-\log 5\right)=2\log 5+3\cdot\log 5=5\cdot\log 5$ O bien:

$\log 25-3\cdot\log\frac{1}{5}=\log 5^2-3\cdot\log 5^{-1}=2\log 5+3\cdot\log 5=5\cdot\log 5$

b) $\log\overbrace{75}^{3\cdot 5^2}-2\log 3+\log\overbrace{15}^{3\cdot 5}=\log 3+\log 5^2-2\log 3+\log 3+\log 5=\log 3+2\log 5-2\log 3+\log 3+\log 5=$

$=\overbrace{(1-2+1)}^{0}\cdot\log 3+\overbrace{(2+1)}^{3}\cdot\log 5=3\log 5$

14.- Sabiendo que $\log 2 = 0'301$ calcula:

a) $\log 160=\log(16\cdot 10)=\log 16+\log 10=\log 2^4+\overbrace{\log 10}^{1}=4\cdot\log 2+1\cong 4\cdot 0,301+1=2,204$

b) $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2\cong 1-0,301=0,699$

c) $\log 0,02=\log\frac{2}{100}=\log 2-\log 100\cong 0,301-2=-1,699$

d) $\log\sqrt[3]{16}=\log(2^4)^{\frac{1}{3}}=\log 2^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}\cdot\log 2\cong\frac{4}{3}\cdot 0,301\cong 0,401$

e) $\log 8=\log 2^3=3\cdot\log 2\cong 3\cdot 0,301=0,903$

f) $\log\sqrt{2}=\log 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\log 2\cong\frac{1}{2}\cdot 0,301=0,1505$

g) $\log 0{,}64 = \log \dfrac{64}{100} = \log 64 - \log 100 = 6 \cdot \log 2 - 2 \cong 6 \cdot 0{,}301 - 2 = -0{,}194$

h) $\log \dfrac{1}{128} = \log \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 = \log 2^{-7} = -7 \cdot \log 2 \cong -7 \cdot \log 2 = -2{,}107$

15.- Sabiendo que log 2 = 0’3010, calcula el valor de:

a) $\log 64 = \log 2^6 = 6 \cdot \log 2 \cong 6 \cdot 0{,}301 = 1{,}806$

b) $\log \sqrt{2} = \log 2^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \log 2 \cong \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}301 \cong 0{,}1505$

c) $\log \dfrac{1}{2} = \log 2^{-1} = -\log 2 \cong -0{,}301$

d) $\log 2000 = \log(2 \cdot 1000) = \log 2 + \log 1000 \cong 0{,}301 + 3 = 3{,}301$

e) $\log 40 = \log(4 \cdot 10) = \log 4 + \log 10 = \log 2^2 + \log 10 = 2\log 2 + \log 10 \cong 2 \cdot 0{,}301 + 1 = 1{,}602$

f) $\log \sqrt{32} = \log\left(2^5\right)^{\frac{1}{2}} = \log 2^{\frac{5}{2}} = \dfrac{5}{2} \cdot \log 2 \cong \dfrac{5}{2} \cdot 0{,}301 = 0{,}7525$

g) $\log 5 = \log \dfrac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \cong 1 - 0{,}301 = 0{,}699$

16.- Sabiendo que log 2 = 0’3010 y log 3 = 0’4771 calcula el valor de:

a) $\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 \cong 0{,}301 + 0{,}4771 = 0{,}7781$

b) $\log 81 = \log 3^4 = 4\log 3 \cong 4 \cdot 0{,}4771 = 1{,}9084$

c) $\log 1{,}5 = \log \dfrac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \cong 0{,}4771 - 0{,}301 = 0{,}1761$

d) $\log 0{,}09 = \log \dfrac{9}{100} = \log 9 - \log 100 = \log 3^2 - \log 100 = 2 \cdot \log 3 - 2 \cong 2 \cdot 0{,}4771 - 2 = 1{,}0458$

e) $\log \sqrt{18} = \log\left(2 \cdot 3^2\right)^{\frac{1}{2}} = \log\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{2}}\right) = \log 2^{\frac{1}{2}} + \log 3 = \dfrac{1}{2} \cdot \log 2 + \log 3 \cong \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}301 + 0{,}4771 = 0{,}6276$

f) $\log \dfrac{4}{27} = \log 4 - \log 27 = \log 2^2 - \log 3^3 = 2\log 2 - 3\log 3 \cong 2 \cdot 0{,}301 - 3 \cdot 0{,}4771 = -0.8293$

g) $\log \dfrac{1}{240} = \overbrace{\log 1}^{0} - \log \overbrace{240}^{3 \cdot 8 \cdot 10} = -\log 3 - \log \overbrace{2^3}^{8} - \log 10 = -\log 3 - 3\log 2 - \log 10 \cong -0{,}4771 - 3 \cdot 0{,}301 - 1 =$
$-2{,}3801$

h) $\log 36 = \log 6^2 = 2\log 6 = 2 \cdot (\log 2 + \log 3) \cong 2 \cdot (0{,}301 + 0{,}4771) = 1{,}5562$

17.- Sabiendo que log 5 = 0’69, calcula:

a) $\log 25 = \log 5^2 = 2\log 5 \cong 2 \cdot 0.69 = 1{,}4$

b) log 50 $= \log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 \cong 0{,}69 + 1 = 1{,}7$

c) $\log \sqrt{5} = \log 5^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \log 5 \cong \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}69 = 0{,}35$

d) $\log 25000 = \log 25000 = \log 25 + \log 1000 = \log 5^2 + \log 10^3 = 2\log 5 + 3\log 10 \cong 2\cdot 0{,}69 + 3\cdot 1 = 4{,}4$

e) $\log 0'005 = \log \frac{5}{1000} = \log 5 - \log 1000 \cong 0{,}69 - 3 = -2{,}31$

f) $\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 \cong 1 - 0{,}69 = 0{,}31$

18.- Sabiendo que log 2 = 0'301 y log 3 = 0'477, calcula:

a) $\log 60 = \log(2\cdot 3\cdot 10) = \log 2 + \log 3 + \log 10 \cong 0{,}301 + 0{,}477 + 1 = 1{,}778$

b) $\log 0{,}006 = \log \frac{6}{1000} = \log \overbrace{6}^{2\cdot 3} - \log 1000 = \log 2 + \log 3 - \log 1000 \cong 0{,}301 + 0{,}47 - 3 = -2{,}222$

c) $\log 18 = \log 18 = \log\left(2\cdot 3^2\right) = \log 2 + \log 3^2 = \log 2 + 2\log 3 \cong 0{,}301 + 2\cdot 0{,}477 = 1{,}255$

d) $\log \frac{0{,}02}{3} = \log 0{,}02 - \log 3 = \log \frac{2}{100} - \log 3 = \log 2 - \log 100 - \log 3 \cong 0{,}301 - 2 - 0{,}477 = -2{,}176$

e) $\log \frac{40}{3} = \log \overbrace{40}^{4\cdot 10} - \log 3 = \log 2^2 + \log 10 - \log 3 = 2\log 2 + \log 10 - \log 3 \cong 2\cdot 0{,}301 + 1 - 0{,}47 = 1{,}125$

19.- Sabiendo que $\log 2 = 0{,}301$ y $\log 5 = 0{,}699$, calcula:

a) $\log 2{,}5 = \log \frac{25}{10} = \log 25 - \log 10 = \log 5^2 - \log 10 = 2\log 5 - \log 10 \cong 2\cdot 0{,}699 - 1 = 0{,}398$

b) $\log 0{,}2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 \cong 0{,}301 - 1 = -0{,}699$

c) $\log 0{,}5 = \log \frac{5}{10} = \log 5 - \log 10 \cong 0{,}699 - 1 = -0{,}301$ o bien: $\log 0{,}5 = \log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -\log 2 \cong -0{,}301$

d) $\log 25 = \log 5^2 = 2\log 5 \cong 2\cdot 0.69 = 1{,}4$

e) log4 $\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2 \cong 2\cdot 0{,}301 = 0{,}602$

20.- Expresa con un solo logaritmo:

a) $\log 6 + \log 8 - \log 3 = \log 6 + \log 8 - \log 3 = \log \frac{6\cdot 8}{3} = \log 16$

b) $2\log 9 + \log 28 - (\log 21 - \log 3) = \log 9^2 + \log 28 - \log 21 + \log 3 = \log \frac{81\cdot 28\cdot 3}{21} = \log 324$

c) $\log 3 + 2 - \log 5 = \log 3 + \log 100 - \log 5 = \log \frac{3\cdot 100}{5} = \log 60$

d) $\left(\frac{1}{3}\log \overbrace{8}^{2^3} + \log 12\right) - (\log 2 + \log 3) = \left(\log\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} + \log 12\right) - (\log 2 + \log 3) = \left(\log 2^1 + \log 12\right) - (\log 2 + \log 3) =$

$= \log \frac{2\cdot 12}{2\cdot 3} = \log 4$

21.- Expresa con un solo logaritmo las siguientes expresiones:

a) $\log 6 + \log 2 - \log 3 = \log \frac{6\cdot 2}{3} = \log 4$

b) $2 \cdot \log 2 + \log 36 - \log 12 = 2 \cdot \log 2 + \log 36 - \log 12 = \log 2^2 + \log 36 - \log 12 = \log \frac{4 \cdot 36}{12} = \log 12$

c) $(\overbrace{\log 3 + \log 25}^{\log(3\cdot 25)}) - \left(\frac{1}{2} \cdot \log \overbrace{9}^{3^2} + \log 5\right) = (\log 75) - \left(\overbrace{\cdot \log \left(\overbrace{3^2}^{Da\ 3}\right)^{\frac{1}{2}} + \log 5}^{\log(3\cdot 5)}\right) = \log 75 - \log 15 = \log \frac{75}{15} = \log 5$

d) $3 \cdot (\log 8 - \log 4) + \log 3 = 3 \cdot \log \frac{8}{4} + \log 3 = 3 \log 2 + \log 3 = \log 2^3 + \log 3 = \log 8 + \log 3 = \log 24$

e) $\log 16000 - (\log 40 + \log 2) = \log 16000 - (\log 80) = \log \frac{16000}{80} = \log 200$

f) $\log 5 + 1 = \log 5 + \log 10 = \log 50$

g) $2 - \log 4 = \log 100 - \log 4 = \log \frac{100}{4} = \log 25$

h) $3 + \log 3 - \log 5 = \log 1000 + \log 3 - \log 5 = \log \frac{1000 \cdot 3}{5} = \log 600$

22.- Expresa con un solo logaritmo:

a) $\log 4 + \log 3 + 2 \log 3 = \log 4 + \log 3 + \log 3^2 = \log(4 \cdot 3 \cdot 9) = \log 108$

b) $4 \log 2 - \log 4 = \log 2^4 - \log 4 = \log 16 - \log 4 = \log \frac{16}{4} = \log 4$

c) $\frac{1}{2} \log 9 - \log 3 = \log \log = \log 9^{\frac{1}{2}} - \log 3 = \log \sqrt{9} - \log 3 = \log \frac{\sqrt{9}}{3} = \log 1 = 0$

d) $\frac{1}{2} \cdot \log 2 - \log 5 = \log 2^{\frac{1}{2}} - \log 5 = \log \sqrt{2} - \log 5 = \log \frac{\sqrt{2}}{5}$

e) $\log \frac{1}{5} + \log 5 + \log 3 = \log 5^{-1} + \log 5 + \log 3 = -\log 5 + \log 5 + \log 3 = \log 3$

f) $\log 4 + \log 6 - \log 6 = \log 4$

g) $\log 0'2 + \log 5 = \log(0{,}2 \cdot 5) = \log 1 = 0$

h) $2 \log 3 - \log 9 = \log 3^2 - \log 9 = \log 9 - \log 9 = 0$

23.- Pasa a forma algebraica las siguientes expresiones:

$a)\ \log C = 2 \log x - \log y + 3$

$\log C = \log x^2 - \log y + \log 1000$

$\log C = \log \frac{1000 x^2}{y}$

$C = \frac{1000 x^2}{y}$

b) $\log B = 2 \log x - 3 \log y + 5 \log z$

$\log B = \log x^2 - \log y^3 + \log z^5$

$\log B = \log \frac{x^2 z^5}{y^3}$

$B = \frac{x^2 z^5}{y^3}$

c) $\log D = 1 - \log x + 3 \log z$

$\log D = \log 10 - \log x + \log z^3$

$\log D = \log \frac{10 z^3}{x}$

$D = \frac{10 z^3}{x}$

24.-Escribe como un único logaritmo las siguientes expresiones:

a) $\log_3 a + 5\log_3 a^2 = \log_3 a + \log_3\left(a^2\right)^5 = \log_3 a + \log_3 a^{10} = \log_3\left(a\cdot a^{10}\right) = \log_3 a^{11}$

b) $2\log_5 a - 5\log_5\sqrt{a} = \log_5 a^2 - \log_5\sqrt{a^5} = \log_5\dfrac{a^2}{\sqrt{a^5}} = \log_5\sqrt{\dfrac{a^4}{a^5}} = \log\sqrt{\dfrac{1}{a}}$

c) $3\log_6 a + 2\log_6\sqrt{a} - 4\log_6\sqrt[3]{a} = \log_6 a^3 + \log_6\sqrt{a^2} - \log_6\sqrt[3]{a^4} = \log_6\dfrac{a^3\cdot\sqrt{a^2}}{\sqrt[3]{a^4}} = \log_6\dfrac{a^3\cdot a}{a\cdot\sqrt[3]{a}} = \log\dfrac{a^3}{\sqrt[3]{a}} \overset{\text{racionalizamos}}{=}$

$\log\dfrac{a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \log\dfrac{a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}}{a} = \log\left(a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}\right) = \log\sqrt[3]{a^6\cdot a^2} = \log\sqrt[3]{a^8}$

$3\log_6 a + 2\log_6\sqrt{a} - 4\log_6\sqrt[3]{a} = \log_6 a^3 + \log_6\sqrt{a^2} - \log_6\sqrt[3]{a^4} = \log_6\dfrac{a^3\cdot\sqrt{a^2}}{\sqrt[3]{a^4}} = \log_6\dfrac{\sqrt[6]{a^{18}}\cdot\sqrt[6]{a^6}}{\sqrt[6]{a^8}} = \log\sqrt[6]{a^{16}} =$

$= \log\sqrt[3]{a^8}$

O bien: $3\log_6 a + 2\log_6\sqrt{a} - 4\log_6\sqrt[3]{a} = \log_6 a^3 + \log_6 a^1 - \log_6 a^{\frac{4}{3}} = 3\log_6 a + \log_6 a - \dfrac{4}{3}\log_6 a = \left(3+1-\dfrac{4}{3}\right)\cdot\log_6 a =$

$= \dfrac{8}{3}\cdot\log_6 a = \log_6 a^{\frac{8}{3}} = \log\sqrt[3]{a^8}$

25.- Simplifica al máximo:

a) $3\log_3 18^4 - \log_3 54^2 = \log_3 18^{12} - \log_3 54^2 = \log_3\left(2\cdot3^2\right)^{12} - \log_3\left(2\cdot3^3\right)^2 = \log\dfrac{2^{12}\cdot3^{24}}{2^2\cdot3^6} = \log_3\left(2^{10}\cdot3^{18}\right) =$

$= \log_3 2^{12} + \log_3 3^{24} = 12\log_3 2 + 24\log_3 3 = 12\log_3 2 + 24$

b) $\log_8 a^4 - \log_8 8^a = 4\log_8 a - a\log_8 8 = 4\log_8 a - a$

26.- Despeja el valor de A:

a) $\log A = 2\cdot\log B - 1 - \dfrac{3\cdot\log D}{5}$

$\log A = \log B^2 - \log 10 - \log D^{\frac{3}{5}}$

$\log A = \log B^2 - \left(\log 10 + \log\sqrt[3]{D^5}\right)$

$\log A = \log B^2 - \log\left(10\cdot\sqrt[3]{D^5}\right)$

$\log A = \log\dfrac{B^2}{10\cdot\sqrt[3]{D^5}}$

$A = \dfrac{B^2}{10\cdot\sqrt[3]{D^5}}$

b) $\log A = -\dfrac{\log B}{3} + 2 - \log D$

$\log A = -\log B^{\frac{1}{3}} + \log 100 - \log D$

$\log A = \log 100 - \left(\log D + \log\sqrt[3]{B}\right)$

$\log A = \log 100 - \log\left(D\sqrt[3]{B}\right)$

$\log A = \log\dfrac{100}{D\sqrt[3]{B}}$

$A = \dfrac{100}{D\sqrt[3]{B}}$

c) $\log A = \log B - \dfrac{\log C}{3} - 3$

$\log A = \log B - \log C^{\frac{1}{3}} - \log 1000$

$\log A = \log B - \left(\log\sqrt[3]{C} + \log 1000\right)$

$\log A = \log B - \log\left(1000\sqrt[3]{C}\right)$

$\log A = \log\dfrac{B}{1000\sqrt[3]{C}}$

$A = \dfrac{B}{1000\sqrt[3]{C}}$

27.- Utilizando los logaritmos decimales de la calculadora y la expresión del cambio de base, calcula:

a) $\log_3 2 = \dfrac{\log 2}{\log 3} = 0{,}630929753....$

b) $\log_5 15 = \dfrac{\log 15}{\log 5} = 1{,}682606194....$

c) $\log_3 512 = \dfrac{\log 512}{\log 3} = 5{,}678367782....$

28.- Calcula los siguientes logaritmos utilizando la expresión del cambio de base y la calculadora; después, comprueba el resultado utilizando la definición de logaritmo.

a) $\log_5 25 = \dfrac{\log 25}{\log 5} = 2 \xrightarrow{\text{empleando la definición:}} 5^2 = 25$

b) $\log_4 64 = \dfrac{\log 64}{\log 4} = 3 \xrightarrow{\text{empleando la definición:}} 4^3 = 64$

c) log9 3 = $\log_9 3 = \dfrac{\log 3}{\log 9} = 0{,}5 \xrightarrow{\text{empleando la definición:}} 9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

AMPLIACIÓN.

29.- Calcula:

a) El valor de la suma $S(n) = \log 2 + \log 4 + \log 8 + \cdots + \log 2^n$, sabiendo que $\log 2 = 0'301$, y el valor que se obtiene cuando n = 50.

b) Determina hora el valor de la suma $S(n) = \log_a a + \log_a a^2 + \log_a a^3 + \cdots + \log_a a^n$.

a) $S(50) = \log 2 + \log 4 + \log 8 + \cdots + \log 2^{50} \rightarrow S(n) = \log 2^1 + \log 2^2 + \log 2^3 + \cdots + \log 2^{50} \rightarrow$

$S(50) = \log 2 + 2\log 2 + 3\log 2 + \cdots + 50\log 2 \quad \rightarrow \quad \textit{Saco factor común} \log 2$

$S(50) = \underbrace{(1+2+3+....+50)}_{\frac{(1+50)\cdot 50}{2} \Downarrow 1275} \cdot \log 2 = 1275 \cdot 0{,}301 = 383{,}775$

→ Suma de los 50 primeros términos de una progresión aritmética de primer término 1 y último 50.

b) $S(n) = \log_a a + \log_a a^2 + \log_a a^3 + \cdots + \log_a a^n$

$S(50) = \log_a a + 2\log_a a + 3\log_a a + \cdots + n\log_a a \quad \rightarrow \quad \textit{Saco factor común} \log_a a$

$S(50) = \underbrace{(1+2+3+....+n)}_{\frac{(1+n)\cdot n}{2}} \cdot \log_a \text{a} = \dfrac{n+n^2}{2} \cdot \underbrace{\log_a \text{a}}_{es\,1} = \dfrac{n+n^2}{2}$

→ Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de primer término 1 y último n.

Si lo hacemos de forma que sea para cualquier valor de "n" sería:

a) Descomponemos los argumentos de cada logaritmo en forma de potencias, para bajar luego los exponentes:

$S(n) = \log 2 + \log 4 + \log 8 + \cdots + \log 2^n \rightarrow S(n) = \log 2^1 + \log 2^2 + \log 2^3 + \cdots + \log 2^n \rightarrow$

$S(n) = \log 2 + 2\log 2 + 3\log 2 + \cdots + n\log 2$

Ahora saco factor común log2:

$S(n) = (1+2+3+....+n)\cdot \log 2$

Siendo ($1+2+3+\ldots.+n$) una progresión aritmética de diferencia la unidad y n términos, con el último de ellos "n". La fórmula de la suma de n términos de una progresión venía dada por:

$$\mathrm{S_n} = \frac{(a_1 + a_n)\cdot \mathrm{n}}{2} \xrightarrow{Haciendo\ a_1=1} (1+2+3+\ldots n) = \frac{(1+n)\cdot n}{2} = \frac{1}{2}(n^2+n)$$ sustituyendo en S(n) queda:

$$\mathrm{S(n)} = \frac{1}{2}(n^2+n)\cdot \log 2$$

Si n = 50 (sustituyo n por 50), como me dice le enunciado, sale:

$$\mathrm{S(50)} = \frac{1}{2}(50^2+50)\cdot \log 2 = \frac{2550}{2}\cdot \log 2 = 1275\cdot 0,301 = 383,775$$

b) Siguiendo el mismo proceso obtendríamos:

$$\mathrm{S(n)} = \frac{1}{2}(n^2+n)\cdot \log_{\mathrm{a}} a \xrightarrow{Como\ \log_a a=1} \mathrm{S(n)} = \frac{1}{2}(n^2+n)$$