2 Divisibilidad

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

PÁGINAS PARES E IMPARES

¿Todos los números cuestan el mismo dinero? En principio los números ni se compran ni se venden, con lo cual no podemos clasificarlos según su precio. Ahora bien, hay algunos casos en los que hay diferencias entre ellos. Por ejemplo, en la prensa los números impares son más caros que los pares.

Si quieres poner un anuncio en un periódico o revista, uno de los factores que influyen en su precio es el número de la página donde va incluido. Si es impar, es más caro que si es par. ¿Por qué?

Al leer un periódico o revista, o simplemente al ojearlo, las páginas impares se van viendo al pasar casi sin querer, mientras que las que tienen numeración par (las que cuyo número dividido por 2 nos da como resto 0) hay que girar la cabeza para buscarlas. Es lógico, por tanto, que la publicidad, cuyo objetivo es ser vista por el mayor número de personas, cueste más en las páginas impares que en las pares.

Investiga

1. Busca información sobre las tarifas que aplican los periódicos en sus espacios publicitarios. Calcula la diferencia que existe entre insertar un anuncio en una página par o en una impar.
2. Según esas tarifas, ¿cuánto cuesta insertar un anuncio en la página 22? ¿Y cuánto cuesta insertar un anuncio en una doble página?

CÁLCULO MENTAL

Sumar 11, 21, 31, ...

36 + 21

$36 \xrightarrow{+20} 56 \xrightarrow{+1} 57$ ($+21$)

Calcula mentalmente.

37 + 11 =

42 + 21 =

65 + 31 =

Sumar 12, 13, 14, ...

72 + 14

$72 \xrightarrow{+10} 82 \xrightarrow{+4} 86$ ($+14$)

Calcula mentalmente.

25 + 12 =

34 + 13 =

72 + 14 =

Sumar 9, 19, 29, ...

53 + 19

$53 \xrightarrow{+20} 73 \xrightarrow{-1} 72$ ($+19$)

Calcula mentalmente.

32 + 9 =

46 + 19 =

74 + 29 =

Sumar 18, 17, 16, ...

45 + 18

$45 \xrightarrow{+20} 65 \xrightarrow{-2} 63$ ($+18$)

Calcula mentalmente.

26 + 18 =

35 + 17 =

67 + 16 =

1 Comprobar si un número es múltiplo de otro

- Un número *b* es **múltiplo** de *a* si la división *b* : *a* es una división exacta (su resto es 0).
- Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando el número por los números naturales.

12 es múltiplo de 3 porque la división 12 : 3 es una división exacta.

1. Observa los números y señala.

72 365 924 3452 8040

a) Los múltiplos de 2.

b) Los múltiplos de 4.

c) Los múltiplos de 3.

d) Los múltiplos de 5.

2. Calcula y escribe los números que se indican.

a) Los múltiplos de 2 menores que 30.

b) Los múltiplos de 3 comprendidos entre 40 y 60.

c) Los múltiplos de 5 mayores que 100 y menores que 150.

3. Piensa y escribe cuatro números.

a) Menores que 150 que sean múltiplos de 2, de 3 y de 5.

b) Entre 200 y 900 que sean múltiplos de 5, de 6 y de 7.

2 Comprobar si un número es divisor de otro

- Un número *a* es **divisor** de otro número *b* si la división *b* : *a* es una división exacta.
- Si un número *a* es divisor de *b* entonces decimos que *b* es divisible por *a*.

3 es divisor de 72 porque la división 72 : 3 es exacta y, por tanto, se cumple que 72 es divisible por 3.

4. Calcula y contesta razonando tu respuesta.

a) ¿Es 2 divisor de 34?

b) ¿Es 3 divisor de 235?

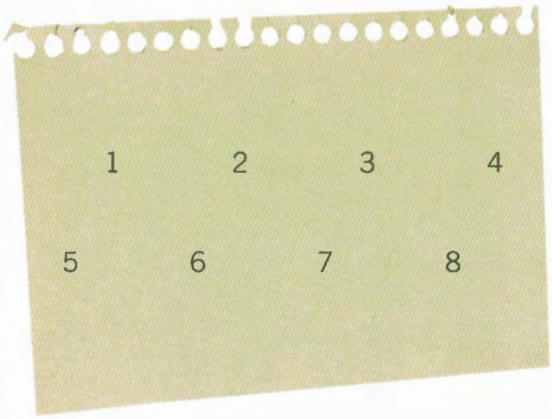
c) ¿Es 7 divisor de 980?

5. Observa los números y rodea.

Los divisores de 2.

Los divisores de 4.

Los divisores de 8.



a) ¿Qué números son divisores de 2, 4 y 8?

b) ¿Qué números son divisores de 2 y de 4?

c) ¿Qué números son divisores de 2, de 4 y de 8?

6. Resuelve.

a) En una clase de Educación Física hay 15 personas y se quieren formar grupos iguales sin que sobre ninguna persona. ¿De cuántas formas se pueden hacer los grupos?

b) Un bidón contiene 20 litros de aceite. Se quiere envasar en botellas iguales sin que sobre ningún litro. ¿De cuántas formas se puede envasar?

3 Calcular todos los divisores de un número

Para calcular todos los divisores de un número sigue estos pasos:

1.º Divide el número entre los números naturales: 1, 2, 3,... hasta que el cociente sea menor que el divisor.

2.º De cada división exacta obtenemos dos divisores: el divisor y el cociente.

Calculamos todos los divisores de 16.

16 | 1	16 | 2	16 | 3	16 | 4	16 | 5
0 16	0 8	1 5	0 4	1 3 ← Menor que el divisor
▼	▼		▼	
1 y 16	2 y 8		4	

Divisores de 16 ▶ Div (16) = {1, 2, 4, 8, 16}

7. Calcula todos los divisores de cada número.

a) 45

b) 50

c) 18

d) 32

8. Piensa y comprueba con un ejemplo.

a) Si *a* es divisor de *b* y *b* es divisor de *c*, entonces *a* es divisor de *c*.

b) Si 8 es divisor de un número *a*, ¿podrías decir otro divisor de *a*?

4 Averiguar si un número es primo o compuesto

- Un **número** es **primo** si solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.
- Un **número** es **compuesto** si tiene más de dos divisores.
- El número 1 no es primo ni compuesto.

Div (7) = {1,7}. El número 7 es primo porque solo tiene dos divisores, él mismo y la unidad.

Div (8) = {1, 2, 4, 8}. El número 8 es compuesto.

9. Completa la tabla con los números hasta el 100. Sigue los pasos que se indican y averigua cuáles son los números primos menores que 100.

- Tacha el 1.
- Tacha todos los múltiplos de 2.
- Tacha todos los múltiplos de 3.
- Tacha todos los múltiplos de 5.
- Continúa con los números siguientes hasta que no puedas tachar más.

1	2	3	4						10
11									
									100

10. Calcula y averigua cuáles de los siguientes números son primos y cuáles compuestos.

a) 89 **b)** 101 **c)** 222 **d)** 770

5 Conocer y aplicar los criterios de divisibilidad

Los **criterios de divisibilidad** son reglas que nos permiten averiguar, sin realizar la división, si un número es divisible por otro.

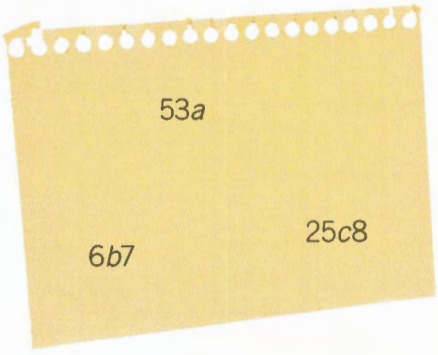
Los criterios de divisibilidad más importantes son:

- Un número es **divisible por 2** si la última cifra del número es 0 o par.
- Un número es **divisible por 3** si la suma de las cifras del número es divisible por 3.
- Un número es **divisible por 5** si la última cifra del número es 0 o 5.
- Un número es **divisible por 10** si la última cifra del número es 0.
- Un número es **divisible por 11** si la diferencia entra la suma de las cifras de lugar par del número y la suma de las cifras de lugar impar es 0 o divisible por 11.

11. Aplica los criterios de divisibilidad y marca una cruz en las casillas correspondientes.

	230	854	900	3765	8950	2340	4623	5712	8485
Divisible por 2	X								
Divisible por 3									
Divisible por 5									
Divisible por 10									

12. Observa cada número y contesta.



a) ¿Qué valores puede tener *a* para que el número sea divisible por 3? ¿Y por 2? ¿Y por 5?

b) ¿Qué valores puede tener *b* para que el número sea divisible por 3? ¿Puede ser este número divisible por 2? ¿Y por 5? ¿Por qué?

c) ¿Qué valores puede tener *c* para que el número sea divisible por 2 y por 3?

13. Piensa y escribe cuatro números.

a) Menores que 50 que sean divisibles por 2 y por 3.

b) Mayores que 200 que sean divisibles por 5 y por 10.

6 Factorizar un número

Factorizar un número es descomponerlo en factores primos, es decir, expresarlo como producto de sus divisores primos.

Para factorizar un número sigue estos pasos:

1.º Divide el número entre los sucesivos números primos (2, 3, 5, 7, 11,...), tantas veces como se pueda hasta obtener la unidad.

2.º Escribe el número como producto de todos los factores primos obtenidos, y si hay factores repetidos exprésalos como potencia.

Factorizamos el número 36.

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

La factorización del número 36 es:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

14. Descompón los siguientes números como producto de factores primos.

a) 28 **b)** 30 **c)** 45 **d)** 80

15. Factoriza los números.

a) 72 **b)** 90 **c)** 120 **d)** 450

16. Calcula los números y contesta.

a) $2^2 \cdot 3^2 =$ **b)** $3^2 \cdot 10 =$ **c)** $2^3 \cdot 5 \cdot 7 =$

¿La expresión $3^2 \cdot 10$ puede ser la factorización de un número? ¿Por qué?

7 Calcular el máximo común divisor

El **máximo común divisor** de dos o más números es el mayor de los divisores comunes. El máximo común divisor de *a* y *b* se expresa: m.c.d. (*a*, *b*).

Para calcular el m.c.d. de dos o más números sigue estos pasos:

1.º Descompón los números en producto de factores primos.

2.º Elige los factores comunes elevados al menor exponente.

3.º El producto de estos factores es el m.c.d. de los números.

Calculamos el m.c.d. (36, 18).

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

18	2
9	3
3	3
1	

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$ $\quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$

Factores comunes: 2 y 3

Elevados al menor exponente: 2 y 3^2

m.c.d. (36, 18) $= 2 \cdot 3^2 = 18$

17. Calcula el m.c.d. de los siguientes números.

a) 12 y 20 **b)** 15 y 25 **c)** 18 y 9 **d)** 6 y 30

18. Calcula el m.c.d.

a) 4, 6 y 12 **b)** 8, 9 y 18 **c)** 5, 10 y 24

19. Resuelve.

Se han envasado 30 botellas de zumo de naranja y 80 botellas de zumo de limón en cajas, de tal forma que el contenido de todas las cajas es igual y no sobra ninguna botella. ¿Cuántas botellas como máximo pondremos en cada caja? ¿Cuántas cajas necesitamos?

8 Calcular el mínimo común múltiplo

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes.
El mínimo común múltiplo de *a* y *b* se expresa: m.c.m. (*a*, *b*).

Para calcular el m.c.m. de dos números sigue estos pasos:

1.º Descompón los números en producto de factores primos.

2.º Elige los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

3.º El producto de estos factores es el m.c.m. de los números.

Calculamos el m.c.m. (15, 20)

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$15 = 3 \cdot 5 \quad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$

Factores comunes y no comunes: 2, 3 y 5.

Elevados al mayor exponente: 2^2, 3 y 5.

m.c.m. (15, 20) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

20. Calcula el m.c.m. de los siguientes números.

a) 5 y 20 **b)** 10 y 6 **c)** 12 y 18 **d)** 15 y 24

21. Calcula el m.c.m. de los siguientes números.

a) 9, 12 y 24 **b)** 10, 14 y 25 **c)** 18, 22 y 30

22. Resuelve.

De un aeropuerto salen un avión cada 10 días y otro cada 12 días. Hoy han salido los dos aviones del aeropuerto. ¿Cuántos días han de pasar para que coincidan la próxima vez?

9 Resolver problemas utilizando el m.c.d. y el m.c.m.

- Los problemas de m.c.d. consisten en dividir en grupos varios tipos de elementos sin que sobre ninguno.
- Los problemas de m.c.m. consisten en encontrar el primer número que es múltiplo de varios números a la vez.

Andrés debe cubrir una pared de 16 m de largo y 6 m de ancho con paneles cuadrados iguales y lo más grandes posible. ¿Cuánto debe medir el lado del panel?

1.º El lado del panel tiene que ser un divisor común de 16 y 6, y además tiene que ser lo más grande posible. Por tanto, se trata de un problema de m.c.d.

2.º Calculamos el m.c.d. (6, 16).

$6 = 2 \cdot 3$ $\quad$ $16 = 2^4$ $\quad$ m.c.d. (6, 16) = 2

El lado del panel debe medir 2 m.

23. Resuelve.

a) Gustavo quiere dividir un terreno rectangular de 140 m de largo por 80 m de ancho en parcelas cuadradas lo más grandes posible. ¿Cuánto medirá el lado de cada parcela?

b) Marina tiene 8 bolas rojas, 12 azules y 10 verdes. Quiere hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna. ¿Cuántas bolas de cada color pondrá en cada collar? ¿Cuántos collares hará?

c) Juan va a la biblioteca cada 4 días y su amiga Paula, cada 9 días. Hoy han coincidido los dos en la biblioteca. ¿Cuántos días, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir?

d) Una campana suena cada 30 minutos y otra cada 45 minutos. A las 12 de la mañana han coincidido las dos. ¿Cuántas veces sonarán juntas hasta las 12 de la noche?

24. Lee y resuelve.

Miguel y Juani tienen una panadería y venden pan y pastas de distintas clases que ellos mismos elaboran.

Pastas de crema ▶ Cada 4 días.

Pastas de azúcar ▶ Cada 6 días.

Pastas de frutas ▶ Cada 5 días.

a) Hoy, Miguel ha hecho pastas de crema y de azúcar. ¿Cuántos días han de pasar como mínimo para que vuelva a hacer estos dos tipos de pastas?

b) El lunes pasado, Juani hizo los tres tipos de pastas. ¿Cuántos días han de pasar para que vuelva a hacer los tres tipos de pastas de nuevo?

c) Un día, Miguel utilizó 120 g de fresas, 150 g de manzana y 200 g de melocotón para hacer tartas iguales con la máxima cantidad de frutas de cada tipo sin que le sobrara nada. ¿Qué cantidad de cada tipo de fruta puso en cada tarta?

d) Juani tiene que repartir 25 pasta de crema, 40 de azúcar y 55 de frutas en el máximo número de cajas con la misma composición y sin que sobren pastas. ¿Cuántas pastas de cada clase pondrá en cada caja?

REPASA LO APRENDIDO

1 Escribe en forma de potencia.

a) $3 \cdot 3 =$

b) $10 \cdot 10 =$

c) $2 \cdot 2 \cdot 2 =$

d) $10 \cdot 10 \cdot 10 =$

e) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$

f) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$

2 Escribe la descomposición polinómica de cada número.

a) 3876219 =

b) 45037214 =

c) 623905830 =

3 Contesta y razona tu respuesta.

a) ¿Es 120 múltiplo de 2?

b) ¿Es 3 divisor de 45?

c) ¿Es 240 múltiplo de 7?

d) ¿Es 5 divisor de 100?

4 Calcula.

a) Cinco múltiplos de 4.

b) Tres divisores de 12.

c) Cinco múltiplos de 6.

d) Tres divisores de 20.

5 Resuelve.

Paula tiene 20 canicas rojas. Quiere repartirlas en montones con el mismo número de canicas en cada uno sin que le sobre ninguna. ¿De cuántas formas lo puede hacer?

2 Divisibilidad

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

PÁGINAS PARES E IMPARES

¿Todos los números cuestan el mismo dinero? En principio los números ni se compran ni se venden, con lo cual no podemos clasificarlos según su precio. Ahora bien, hay algunos casos en los que hay diferencias entre ellos. Por ejemplo, en la prensa los números impares son más caros que los pares.

Si quieres poner un anuncio en un periódico o revista, uno de los factores que influyen en su precio es el número de la página donde va incluido. Si es impar, es más caro que si es par. ¿Por qué?

Al leer un periódico o revista, o simplemente al ojearlo, las páginas impares se van viendo al pasar casi sin querer, mientras que las que tienen numeración par (las que cuyo número dividido por 2 nos da como resto 0) hay que girar la cabeza para buscarlas. Es lógico, por tanto, que la publicidad, cuyo objetivo es ser vista por el mayor número de personas, cueste más en las páginas impares que en las pares.

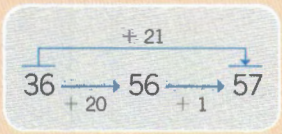
Investiga

1. Busca información sobre las tarifas que aplican los periódicos en sus espacios publicitarios. Calcula la diferencia que existe entre insertar un anuncio en una página par o en una impar.
2. Según esas tarifas, ¿cuánto cuesta insertar un anuncio en la página 22? ¿Y cuánto cuesta insertar un anuncio en una doble página?

CÁLCULO MENTAL

Sumar 11, 21, 31, ...

36 + 21



Calcula mentalmente.

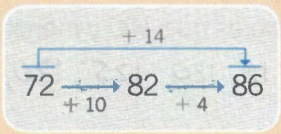
37 + 11 = 48

42 + 21 = 63

65 + 31 = 96

Sumar 12, 13, 14, ...

72 + 14



Calcula mentalmente.

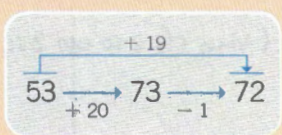
25 + 12 = 37

34 + 13 = 47

72 + 14 = 86

Sumar 9, 19, 29, ...

53 + 19



Calcula mentalmente.

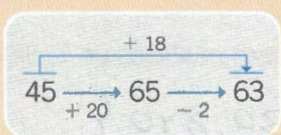
32 + 9 = 41

46 + 19 = 65

74 + 29 = 103

Sumar 18, 17, 16, ...

45 + 18



Calcula mentalmente.

26 + 18 = 44

35 + 17 = 53

67 + 16 = 83

1 Comprobar si un número es múltiplo de otro

- Un número *b* es **múltiplo** de *a* si la división *b* : *a* es una división exacta (su resto es 0).
- Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando el número por los números naturales.

12 es múltiplo de 3 porque la división 12 : 3 es una división exacta.

1. Observa los números y señala.

72 365 924 3452 8040

a) Los múltiplos de 2.

{72, 924, 3452, 8040}

b) Los múltiplos de 4.

{72, 924, 8452, 8040}

c) Los múltiplos de 3.

{72, 924, 8040}

d) Los múltiplos de 5.

{365, 8040}

2. Calcula y escribe los números que se indican.

a) Los múltiplos de 2 menores que 30.

{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28}

b) Los múltiplos de 3 comprendidos entre 40 y 60.

40 : 3 3·14 = 42 {42, 45, 48, 51, 54, 57}
10 13 → uno más ↳ de 3 en 3.

c) Los múltiplos de 5 mayores que 100 y menores que 150.

{105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145}

3. Piensa y escribe cuatro números.

a) Menores que 150 que sean múltiplos de 2, de 3 y de 5. → 2·3·5 = 30. Van de 30 en 30.

{30, 60, 90, 120}

b) Entre 200 y 900 que sean múltiplos de 5, de 6 y de 7. → 5·6·7 = 210 (van de 210 en 210)

{210, 420, 630, 840}

2 Comprobar si un número es divisor de otro

- Un número *a* es **divisor** de otro número *b* si la división *b* : *a* es una división exacta.
- Si un número *a* es divisor de *b* entonces decimos que *b* es divisible por *a*.

3 es divisor de 72 porque la división 72 : 3 es exacta y, por tanto, se cumple que 72 es divisible por 3.

4. Calcula y contesta razonando tu respuesta.

a) ¿Es 2 divisor de 34?

34 | 2
14 | 17
0

Sí, porque 17·2 = 34.
La división da exacta.

b) ¿Es 3 divisor de 235?

235 | 3
25 | 78

No, porque el resto de la división no es cero.

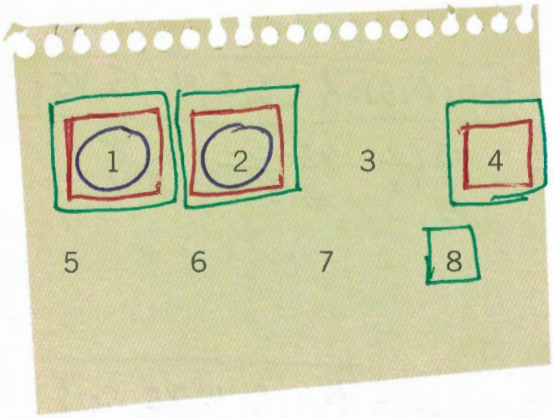
c) ¿Es 7 divisor de 980?

980 | 7
28 | 140
00

Sí, porque 140·7 = 980.
La división da exacta.

5. Observa los números y rodea.

Los divisores de 2.
Los divisores de 4.
Los divisores de 8.



a) ¿Qué números son divisores de 2, 4 y 8?

{1, 2}

b) ¿Qué números son divisores de 2 y de 4?

{1, 2}

c) ¿Qué números son divisores de 2, de 4 y de 8?

{1, 2}

6. Resuelve.

a) En una clase de Educación Física hay 15 personas y se quieren formar grupos iguales sin que sobre ninguna persona. ¿De cuántas formas se pueden hacer los grupos?

Div (15) = {1, 3, 5, 15}

15 | 1
0 | 15

15 | 3
0 | 5

Un grupo de 15 personas
Tres grupos de 5 personas
Cinco grupos de 3 personas
15 grupos de 1 persona.

b) Un bidón contiene 20 litros de aceite. Se quiere envasar en botellas iguales sin que sobre ningún litro. ¿De cuántas formas se puede envasar?

Div (20) = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

20 | 1
0 | 20

20 | 2
0 | 10

20 | 4
0 | 5

Veinte botellas de 1 litro
Diez botellas de 2 litros
Cinco botellas de 4 litros
Cuatro botellas de 5 litros
Dos botellas de 10 litros.
Una botella de 20 litros.

3 Calcular todos los divisores de un número

Para calcular todos los divisores de un número sigue estos pasos:

1.º Divide el número entre los números naturales: 1, 2, 3,... hasta que el cociente sea menor que el divisor.

2.º De cada división exacta obtenemos dos divisores: el divisor y el cociente.

Calculamos todos los divisores de 16.

16 | 1	16 | 2	16 | 3	16 | 4	16 | 5
0 16	0 8	1 5	0 4	1 3 ← Menor que el divisor
▼	▼		▼	
1 y 16	2 y 8		4	

Divisores de 16 ▶ Div (16) = {1, 2, 4, 8, 16}

7. Calcula todos los divisores de cada número.

a) 45

$\boxed{Div(45) = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}}$

45 | 1 → 0 45   45 | 3 → 15 15 → 0   45 | 5 → 0 9   ~~45 | 9 → 0 5~~

b) 50

$\boxed{Div(50) = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}}$

50 | 1 → 0 50   50 | 2 → 10 25 → 0   50 | 5 → 00 10 → 0   ~~50 | 10 → 0 5~~

c) 18

$\boxed{Div(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}}$

18 | 1 → 0 18   18 | 2 → 0 9   18 | 3 → 0 6   ~~18 | 6 → 0 3~~

d) 32

$\boxed{Div(32) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}}$

32 | 1 → 02 32 → 0   32 | 2 → 12 16 → 0   32 | 4 → 0 8   ~~32 | 8 → 0 4~~

Si un número no es divisor de otro, entonces ningún múltiplo del primero será divisor del segundo. Utilizad las reglas de divisibilidad.

8. Piensa y comprueba con un ejemplo. → Nunca se comprueba con un ejemplo.

a) Si *a* es divisor de *b* y *b* es divisor de *c*, entonces *a* es divisor de *c*. Sí

2 es divisor de 6 y 6 es divisor de 18 ⇒ 2 es divisor de 18.

b) Si 8 es divisor de un número *a*, ¿podrías decir otro divisor de *a*?

{1, 2, 4} que son los divisores de 8.

4 Averiguar si un número es primo o compuesto

- Un **número** es **primo** si solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.
- Un **número** es **compuesto** si tiene más de dos divisores.
- El número 1 no es primo ni compuesto.

Div (7) = {1,7}. El número 7 es primo porque solo tiene dos divisores, él mismo y la unidad.

Div (8) = {1, 2, 4, 8}. El número 8 es compuesto.

9. Completa la tabla con los números hasta el 100. Sigue los pasos que se indican y averigua cuáles son los números primos menores que 100.

- Tacha el 1.
- Tacha todos los múltiplos de 2.
- Tacha todos los múltiplos de 3.
- Tacha todos los múltiplos de 5.
- Continúa con los números siguientes hasta que no puedas tachar más.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

10. Calcula y averigua cuáles de los siguientes números son primos y cuáles compuestos.

a) 89

89 | 7
19 12
5

89 | 13
11 6

89 | 17
04 5

84 | 19
8 4

84 | 23
15 3

Es primo

b) 101

101 | 7
31 14
3

101 | 13
10 7

101 | 17
16 5

101 | 23
09 4

101 | 19
6 5

101 | 29
14 3

101 | 31
8 3

Es primo

c) 222 2+2+2=6 ✓

222 | 3
12 74
0

Es compuesto
(regla del 3)

d) 770 (7+0)−7=0 ✓

770 | 11
00 70
0

Es compuesto
(regla del 11)

5 Conocer y aplicar los criterios de divisibilidad

Los **criterios de divisibilidad** son reglas que nos permiten averiguar, sin realizar la división, si un número es divisible por otro.

Los criterios de divisibilidad más importantes son:

- Un número es **divisible por 2** si la última cifra del número es 0 o par.
- Un número es **divisible por 3** si la suma de las cifras del número es divisible por 3.
- Un número es **divisible por 5** si la última cifra del número es 0 o 5.
- Un número es **divisible por 10** si la última cifra del número es 0.
- Un número es **divisible por 11** si la diferencia entra la suma de las cifras de lugar par del número y la suma de las cifras de lugar impar es 0 o divisible por 11.

11. Aplica los criterios de divisibilidad y marca una cruz en las casillas correspondientes.

	230	854	900	3765	8950	2340	4623	5712	8485
Divisible por 2	X	X	X		X	X		X	
Divisible por 3			X	X		X	X	X	
Divisible por 5	X		X	X	X	X			X
Divisible por 10			X		X	X			

12. Observa cada número y contesta.

53*a*

6*b*7

25*c*8

a) ¿Qué valores puede tener *a* para que el número sea divisible por 3? ¿Y por 2? ¿Y por 5?

Por 3: {1,4,7} Por 2: {0,2,4,6,8} Por 5: {0,5}

b) ¿Qué valores puede tener *b* para que el número sea divisible por 3? ¿Puede ser este número divisible por 2? ¿Y por 5? ¿Por qué?

Por 3: {2,5,8} Para que sus cifras sean un múltiplo de 3.
Por 2: ninguno. No termina en cifra par o cero. Por 5: ninguno. Porque no termina en 0 ni en 5.

c) ¿Qué valores puede tener *c* para que el número sea divisible por 2 y por 3?

Por 3 y por 2: {0, 3, 6, 9} → Para que sean divisibles en 3 (suma de cifras...) puesto que para que lo sean entre 2 ya lo es, pues termina en cifra par (8).

13. Piensa y escribe cuatro números.

a) Menores que 50 que sean divisibles por 2 y por 3 → múltiplos de 6.

{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

b) Mayores que 200 que sean divisibles por 5 y por 10. → deben terminar en cero.

{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190}

6 Factorizar un número

Factorizar un número es descomponerlo en factores primos, es decir, expresarlo como producto de sus divisores primos.

Para factorizar un número sigue estos pasos:

1.° Divide el número entre los sucesivos números primos (2, 3, 5, 7, 11,...), tantas veces como se pueda hasta obtener la unidad.

2.° Escribe el número como producto de todos los factores primos obtenidos, y si hay factores repetidos exprésalos como potencia.

Factorizamos el número 36.

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

La factorización del número 36 es:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

14. Descompón los siguientes números como producto de factores primos.

a) 28

28 | 2
14 | 2
7 | 7
1 |

o bien

28 | 7
4 | 2·2=4
1 |

$\boxed{28 = 2^2 \cdot 7}$

b) 30

30 | 2
15 | 3
5 | 5
1 |

o bien:

30 | 2·5=10
3 | 3
1 |

$\boxed{30 = 2 \cdot 3 \cdot 5}$

c) 45

45 | 3
15 | 3
5 | 5
1 |

o bien

45 | 5
9 | 3·3=9
1 |

$\boxed{45 = 3^2 \cdot 5}$

d) 80

80 | 2
40 | 2
20 | 2
10 | 2
5 | 5
1 |

o bien

80 | 2·5=10
8 | 2·2·2=8
1 |

$\boxed{80 = 2^4 \cdot 5}$

15. Factoriza los números.

a) 72

72 | 2
36 | 2
18 | 2
9 | 3
3 | 3
1 |

72 | 3·3=9
8 | 2·2·2=8
1 |

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

b) 90

90 | 2
45 | 5
9 | 3
3 | 3
1 |

o bien

90 | 2·5=10
9 | 3·3=9
1 |

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

c) 120

120 | 2
60 | 2
30 | 2
15 | 3
5 | 5
1 |

o bien

120 | 2·5=10
12 | 2·2=4
3 | 3
1 |

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

d) 450

450 | 2
225 | 3
75 | 3
25 | 5
5 | 5
1 |

o bien

450 | 2·5=10
45 | 3·3=9
5 | 5
1 |

$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

16. Calcula los números y contesta.

a) $2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$ **b)** $3^2 \cdot 10 = 9 \cdot 10 = 90$ **c)** $2^3 \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 5 \cdot 7 = 280$

¿La expresión $3^2 \cdot 10$ puede ser la factorización de un número? ¿Por qué?

No si entendemos que los factores deben ser números primos. En este caso 10 es un número compuesto.

7 Calcular el máximo común divisor

El **máximo común divisor** de dos o más números es el mayor de los divisores comunes. El máximo común divisor de *a* y *b* se expresa: m.c.d. (*a*, *b*).

Para calcular el m.c.d. de dos o más números sigue estos pasos:

1.º Descompón los números en producto de factores primos.

2.º Elige los factores comunes elevados al menor exponente.

3.º El producto de estos factores es el m.c.d. de los números.

Calculamos el m.c.d. (36, 18).

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

18	2
9	3
3	3
1	

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$ $\quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$

Factores comunes: 2 y 3

Elevados al menor exponente: 2 y 3^2

m.c.d. (36, 18) $= 2 \cdot 3^2 = 18$

No hace falta hacer los porque uno de los dos números es divisor del otro.

17. Calcula el m.c.d. de los siguientes números.

a) 12 y 20

12	2
6	2
3	3
1	

20	2·5
2	2
1	

$12 = 2^2 \cdot 3$
$20 = 2^2 \cdot 5$
M.C.D.(12,20) $= 2^2 = \boxed{4}$

b) 15 y 25

$15 = 3 \cdot 5$
$25 = 5^2$
M.C.D.(15,25) $= \boxed{5}$

c) 18 y 9

M.C.D(18,9) $= 3^2 = \boxed{9}$

18	2
9	3
3	3
1	

9	3
3	3
1	

$18 = 2 \cdot 3^2$
$9 = 3^2$

d) 6 y 30

$6 = 2 \cdot 3$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
M.C.D.(6,30) $= 2 \cdot 3 = \boxed{6}$

18. Calcula el m.c.d.

a) 4, 6 y 12

$4 = 2^2$
$6 = 2 \cdot 3$
$12 = 2^2 \cdot 3$
M.C.D.(4,6,12) $= \boxed{2}$

b) 8, 9 y 18

$8 = 2^3$
$9 = 3^2$
$18 = 2 \cdot 3^2$
M.C.D.(8,9,18) $= \boxed{1}$

c) 5, 10 y 24

$5 = 5$
$10 = 2 \cdot 5$
$24 = 2^3 \cdot 3$
M.C.D.(5,10,24) $= \boxed{1}$

Cuando no hay factores en común, el M.C.D. es 1, pues es divisor común de todos los números. Se dice que son primos entre sí.

19. Resuelve.

Se han envasado 30 botellas de zumo de naranja y 80 botellas de zumo de limón en cajas, de tal forma que el contenido de todas las cajas es igual y no sobra ninguna botella. ¿Cuántas botellas como máximo pondremos en cada caja? ¿Cuántas cajas necesitamos?

El nº de botellas debe ser un divisor común de 80 y 30 para que no sobre ninguna. Si debe ser máximo, será el máximo común divisor. 1º Calculo el M.C.D:

30	2
15	3
5	5
1	

80	2·5
8	2
4	2
2	2
1	

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
$80 = 2^4 \cdot 5$
M.C.D. (30,80) $= 2 \cdot 5 =$ **10 botellas en cada caja.**

2º Calculo el nº de cajas:

$30 : 10 =$ **3 cajas de zumo de naranja**

$80 : 10 =$ **8 cajas de zumo de limón**

8 Calcular el mínimo común múltiplo

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes.
El mínimo común múltiplo de *a* y *b* se expresa: m.c.m. (*a*, *b*).

Para calcular el m.c.m. de dos números sigue estos pasos:

1.º Descompón los números en producto de factores primos.

2.º Elige los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

3.º El producto de estos factores es el m.c.m. de los números.

Calculamos el m.c.m. (15, 20)

15	3
5	5
1	

20	2
10	2
5	5
1	

$15 = 3 \cdot 5 \quad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$

Factores comunes y no comunes: 2, 3 y 5.

Elevados al mayor exponente: 2^2, 3 y 5.

m.c.m. (15, 20) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

20. Calcula el m.c.m. de los siguientes números.

a) 5 y 20

$5=5$
$20=2^2 \cdot 5$
M.C.M. $(5,20) = 2^2 \cdot 5 = \boxed{20}$

No hace falta hacerlo, porque 20 es múltiplo de los otros, es decir, el 5.

b) 10 y 6

$10=2 \cdot 5$
$6=2 \cdot 3$
M.C.M. $(10,6) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = \boxed{30}$

c) 12 y 18

$12=2^2 \cdot 3$
$18=2 \cdot 3^2$
M.C.M. $(12,18) = 2^2 \cdot 3^2 = \boxed{36}$

d) 15 y 24

$15=3 \cdot 5$; $24=2^3 \cdot 3$
M.C.M. $(15,24) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = \boxed{120}$

21. Calcula el m.c.m. de los siguientes números.

a) 9, 12 y 24

$9=3^2$
$12=2^2 \cdot 3$
$24=2^3 \cdot 3$
M.C.M. $(9,12,24) = 2^3 \cdot 3^2 = \boxed{72}$

b) 10, 14 y 25

$10=2 \cdot 5$
$14=2 \cdot 7$
$25=5^2$
M.C.M. $(10,14,25) = 2 \cdot 5^2 \cdot 7 = \boxed{350}$

c) 18, 22 y 30

$18=2 \cdot 3^2$
$22=2 \cdot 11$
$30=2 \cdot 3 \cdot 5$
M.C.M. $(18,22,30) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = \boxed{990}$

22. Resuelve.

De un aeropuerto salen un avión cada 10 días y otro cada 12 días. Hoy han salido los dos aviones del aeropuerto. ¿Cuántos días han de pasar para que coincidan la próxima vez?

Los aviones salen en los múltiplos de 10 días y 20 días respectivamente. La primera coincidencia es en el primer múltiplo común, el M.C.M.
(El resto de veces lo hacen en los múltiplos del M.C.M)

1º) Factorizo los números:
$10=2 \cdot 5$; $12=2^2 \cdot 3$

2º) Calculo el M.C.M. de ambos:
M.C.M. $(10,12) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = \boxed{60 \text{ días}}$

9 Resolver problemas utilizando el m.c.d. y el m.c.m.

- Los problemas de m.c.d. consisten en dividir en grupos varios tipos de elementos sin que sobre ninguno.
- Los problemas de m.c.m. consisten en encontrar el primer número que es múltiplo de varios números a la vez.

Andrés debe cubrir una pared de 16 m de largo y 6 m de ancho con paneles cuadrados iguales y lo más grandes posible. ¿Cuánto debe medir el lado del panel?

1.º El lado del panel tiene que ser un divisor común de 16 y 6, y además tiene que ser lo más grande posible. Por tanto, se trata de un problema de m.c.d.

2.º Calculamos el m.c.d. (6, 16).

$6 = 2 \cdot 3$ $\quad 16 = 2^4$ $\quad$ m.c.d. (6, 16) = 2

El lado del panel debe medir 2 m.

23. Resuelve.

a) Gustavo quiere dividir un terreno rectangular de 140 m de largo por 80 m de ancho en parcelas cuadradas lo más grandes posible. ¿Cuánto medirá el lado de cada parcela?

El lado de cada cuadrado debe ser un divisor común de ambos lados para que no sobre terreno, El problema nos pide el mayor posible, luego buscamos que dicho lado sea el M.C.D. de 140m y 80m.

1º Factorizo los números:
$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad 80 = 2^4 \cdot 5$

2º Calculo el lado de cada cuadrado, que es el M.C.D:
M.C.D(140,80) = $2^2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 =$ **20m de lado**

b) Marina tiene 8 bolas rojas, 12 azules y 10 verdes. Quiere hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna. ¿Cuántas bolas de cada color pondrá en cada collar? ¿Cuántos collares hará?

El número de collares debe ser un divisor común de 8, 12 y 10 para que no sobre ninguna bola. Como debe ser el mayor número de collares posible, el divisor común debe ser el mayor posible: el M.C.D.

1º Factorizo los números:
$8 = 2^3$; $12 = 2^2 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$

2º Calculo el nº de collares: M.C.D.(8,12,10) = **2 collares**

3º Calculo los nºs de bolas: 8:2=4 ; 12:2=6 ; 10:2=5
4 bolas rojas; 6 bolas azules; 5 bolas verdes

c) Juan va a la biblioteca cada 4 días y su amiga Paula, cada 9 días. Hoy han coincidido los dos en la biblioteca. ¿Cuántos días, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir?

Juan va en los múltiplos de 4 días y Paula en los múltiplos de 9 días. Coincidirán por 1ª vez en el primer múltiplo común, es decir, el M.C.M de 4 días y 9 días.

1º Factorizo los números:
$4 = 2^2$; $9 = 3^2$

2º Calculo el número de días que han curren:
M.C.M.(4,9) = $2^2 \cdot 3^2 =$ **36 días después**

d) Una campana suena cada 30 minutos y otra cada 45 minutos. A las 12 de la mañana han coincidido las dos. ¿Cuántas veces sonarán juntas hasta las 12 de la noche?

Cada campana suena en los múltiplos de 30min y 45 min respectivamente. Coincidirán en el primer múltiplo común de ambos, es decir, el M.C.M. de 30 y 45. El resto de las veces lo hacen en los múltiplos del M.C.M.

1º Factorizo los números: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; $45 = 3^2 \cdot 5$

2º Calculo el tiempo que tardan en coincidir:
M.C.M.(30,45) = $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ min.

3º Como transcurren 12 h, las convierto a minutos:
$12 \cdot 60 = 720$ min.

4º Calculo el nº de veces que cabe el M.C.M en 720 min:
720 : 90 = **8 veces**

24. Lee y resuelve.

Miguel y Juani tienen una panadería y venden pan y pastas de distintas clases que ellos mismos elaboran.

Pastas de crema ▶ Cada 4 días.

Pastas de azúcar ▶ Cada 6 días.

Pastas de frutas ▶ Cada 5 días.

Cada pasta se hace en los múltiplos de 4 días, 6 días y 5 días respectivamente.

a) Hoy, Miguel ha hecho pastas de crema y de azúcar. ¿Cuántos días han de pasar como mínimo para que vuelva a hacer estos dos tipos de pastas?

El nº de días que deben transcurrir será el primer múltiplo común de 4 y 6, es decir, el M.C.M.

1º Factorizo los números: $4=2^2$; $6=2\cdot3$

2º Calculo los días que deben transcurrir:

$M.C.M.(4,6)=2^2\cdot3=4\cdot3=$ **12 días**

b) El lunes pasado, Juani hizo los tres tipos de pastas. ¿Cuántos días han de pasar para que vuelva a hacer los tres tipos de pastas de nuevo?

El número de días que deben transcurrir debe ser el primer múltiplo común de 4, 6 y 5 días. Es decir, el M.C.M de ellos.

1º Factorizo los números: $4=2^2$; $6=2\cdot3$; $5=5$

2º Calculo el nº de días que deben transcurrir:

$M.C.M\ (4,6,5)=2^2\cdot3\cdot5=$ **60 días** (cada)

c) Un día, Miguel utilizó 120 g de fresas, 150 g de manzana y 200 g de melocotón para hacer tartas iguales con la máxima cantidad de frutas de cada tipo sin que le sobrara nada. ¿Qué cantidad de cada tipo de fruta puso en cada tarta? "Problema de mínimo común divisor."

Una sola tarta con 120 g de fresas, 150 g de manzana y 200 g de melocotón. Esto no es un problema de M.C.D. tal como está planteado. Debería haber dicho así: "para hacer el mayor número de tartas iguales sin que le sobre fruta". Se propone hacerlo así.

d) Juani tiene que repartir 25 pastas de crema, 40 de azucar y 55 de frutas en el máximo número de cajas con la misma composición y sin que sobren pastas. ¿Cuántas pastas de cada clase pondrá en cada caja?

El número de cajas será un divisor común de 25, 40 y 55. Como debe ser máximo, será el máximo común divisor.

1º Factorizo los números:

$25=5^2$; $40=2^3\cdot5$; $55=5\cdot11$

2º Calculo el nº de cajas:

$M.C.D(25,40,55)=$ **5 cajas**.

3º Calculo la composición de cada caja

$25:5=$ 5 pastas de crema

$40:5=$ 8 pastas de azucar

$55:5=$ 11 pastas de frutas

REPASA LO APRENDIDO

1 Escribe en forma de potencia.

a) $3 \cdot 3 =$ 3^2

b) $10 \cdot 10 =$ 10^2

c) $2 \cdot 2 \cdot 2 =$ 2^3

d) $10 \cdot 10 \cdot 10 =$ 10^3

e) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$ $4^4 = 2^8$

f) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ 10^5

2 Escribe la descomposición polinómica de cada número.

a) 3.876.219 = $3 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 9$

b) 45.037.214 = $4 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 4$

c) 623.905.830 = $6 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10$

3 Contesta y razona tu respuesta.

a) ¿Es 120 múltiplo de 2? Sí

Aplicando la regla de divisibilidad: termina en cero. O si dividimos, la división será exacta. 120 | 2, 00 60, 0

b) ¿Es 3 divisor de 45?

Sí. La suma de sus cifras es 9, que es múltiplo de 3. (3·3). También podemos decir que sí porque 15 es múltiplo de 3. 3·15 = 45. O porque la división es exacta.

c) ¿Es 240 múltiplo de 7?

No, porque 7 debería ser divisor de 240, y la división no es exacta. 240 | 7, 30 34, 2

d) ¿Es 5 divisor de 100?

Sí porque la división es exacta 100 | 5, 00 20, 0 o bien porque 100 termina en cero y cumple la regla de divisibilidad del 5.

4 Calcula.

a) Cinco múltiplos de 4.

{4, 8, 12, 16, 20}

b) Tres divisores de 12.

{1, 2, 3}

c) Cinco múltiplos de 6.

{6, 12, 18, 24, 30}

d) Tres divisores de 20.

{1, 2, 5}

5 Resuelve.

Paula tiene 20 canicas rojas. Quiere repartirlas en montones con el mismo número de canicas en cada uno sin que le sobre ninguna. ¿De cuántas formas lo puede hacer?

20 | 1, 0 20 — Div (20) = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

20 | 2, 0 10

20 | 4, 0 5

~~20 | 5, 0 4~~

Un montón de 20 canicas
Dos montones de 10 canicas
Cuatro montones de 5 canicas
Cinco montones de 4 canicas
Diez montones de 2 canicas
Veinte montones de 1 canica

20 | 1, 0 20 → 1 montón de 20, 20 montones de 1

20 | 2, 0 10 → 2 montones de 10, 10 montones de 2

20 | 4, 0 5 → 4 montones de 5, 5 montones de 4