

# 11 Números complejos

1. Realiza las siguientes operaciones:

a)  $(3 - 2i) + (-5 + 6i)$

d)  $(1 + i) - (2 + i) + (3 + i) - (4 + i)$

b)  $(-4 + 2i) - (6 - 3i)$

e)  $(1 + i) - 2(2 + i) + 3(3 + i) - 4(4 + i)$

c)  $2(2 + 3i) - 3(4 - 2i) - 5i$

2. Realiza las siguientes operaciones:

a)  $(1 - 3i) \cdot (-2 + 5i)$

d)  $(1 + i) \cdot (2 + i) \cdot (3 + i)$

b)  $(-3 + 3i) \cdot (2 - 3i)$

e)  $(1 + i) \cdot (1 + 2i) \cdot (1 + 3i) - 2i$

c)  $3(-2 + 2i) \cdot (-3 + 3i) - 2i$

3. Calcula los siguientes cocientes de números complejos:

a)  $\frac{2 + i}{2 - i}$

b)  $\frac{2 - 3i}{3 + 2i}$

c)  $\frac{1 - 5i}{3 - 4i}$

d)  $\frac{(3 - 2i) \cdot (1 + 4i)}{2 + 2i}$

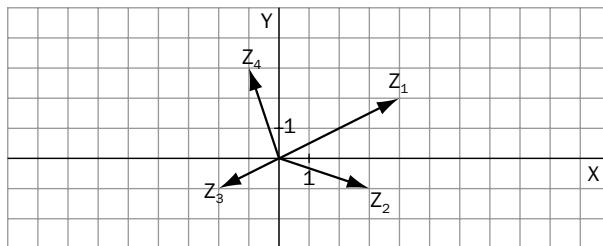
4. Escribe en forma binómica los números complejos  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  y  $z_4$  representados en la siguiente figura y, después, calcula las siguientes operaciones:

a)  $z_1 + z_2$

b)  $z_1 + z_2 + z_3$

c)  $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$

d)  $z_1 - z_2 + z_3 - z_4$



5. Calcula el inverso de los siguientes números complejos:

a)  $2 + 2i$

b)  $1 - 3i$

c)  $-8 + 6i$

d)  $-12 - 5i$

6. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

a)  $(3 - 2i)^2$

b)  $(4 - i)^3$

c)  $(-2 + 3i)^4$

7. Representa los siguientes números complejos y escríbelos en su forma polar:

a)  $3 + 3i$

b)  $3 - \sqrt{3}i$

c)  $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

d)  $-1 + i$

8. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

a)  $(-2 + 2i)^5$

b)  $(1 + \sqrt{3}i)^6$

c)  $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10}$

9. Calcula el valor de las siguientes raíces de números complejos:

a)  $\sqrt[3]{3 - 3i}$

b)  $\sqrt[4]{2 + \sqrt{12}i}$

c)  $\sqrt[4]{-1 - 3i}$

10. Halla todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a)  $z^2 - 6z + 10 = 0$

b)  $z^4 + z = 0$

c)  $z^4 + z^3 - z^2 + z - 2 = 0$

11. Calcula el valor de  $k$  para que el producto de números complejos  $(3 - 2i) \cdot (k + 1 - ki)$ :

a) Dé como resultado un número imaginario puro.

b) Dé como resultado un número real.

# SOLUCIONES

1. a)  $-2 + 4i$       d)  $-2$   
 b)  $-10 + 5i$       e)  $-10 - 2i$   
 c)  $-8 + 7i$

2. a)  $13 + 11i$       d)  $10i$   
 b)  $3 + 15i$       e)  $-10 - 2i$   
 c)  $-38i$

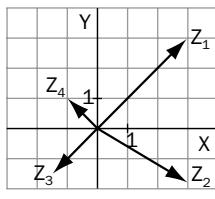
3. a)  $\frac{(2+i)^2}{(2-i) \cdot (2+i)} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$   
 b)  $\frac{(2-3i) \cdot (3-2i)}{(3+2i) \cdot (3-2i)} = \frac{-13}{13}i = -i$   
 c)  $\frac{(1-5i) \cdot (3+4i)}{(3-4i) \cdot (3+4i)} = \frac{23-11i}{25} = \frac{23}{25} - \frac{11}{25}i$   
 d)  $\frac{(11+10i) \cdot (2-2i)}{(2+2i) \cdot (2-2i)} = \frac{21}{4} - \frac{1}{4}i$

4.  $z_1 = 4 + 2i$      $z_3 = -2 - i$   
 $z_2 = 3 - i$      $z_4 = -1 + 3i$   
 a)  $7 + i$     b)  $5$     c)  $4 + 3i$     d)  $-i$

5. a)  $\frac{2-2i}{(2+2i) \cdot (2-2i)} = \frac{2-2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$   
 b)  $\frac{1+3i}{(1-3i) \cdot (1+3i)} = \frac{1+3i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$   
 c)  $\frac{-8-6i}{(-8+6i) \cdot (-8-6i)} = \frac{-8-6i}{100} = -\frac{2}{25} - \frac{3}{50}i$   
 d)  $\frac{-12+5i}{(-12-5i) \cdot (-12+5i)} = \frac{-12+5i}{169} = -\frac{12}{169} + \frac{5}{169}i$

6. a)  $5 - 12i$     b)  $52 - 47i$     c)  $-119 + 120i$

7. a)  $z_1 = 3 + 3i = 3\sqrt{2}_{45^\circ}$   
 b)  $z_2 = 3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}_{30^\circ}$   
 c)  $z_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2_{225^\circ}$   
 d)  $z_4 = -1 + i = \sqrt{2}_{135^\circ}$



8. a)  $(2\sqrt{2}_{135^\circ})^5 = 128\sqrt{2}_{675^\circ} = 128\sqrt{2}_{315^\circ} = 128\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = 128\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 128 - 128i$   
 b)  $(2_{60^\circ})^6 = 64_{360^\circ} = 64(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = 64$   
 c)  $(2_{315^\circ})^{10} = 1024_{3150^\circ} = 1024_{270^\circ} = 1024(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -1024i$

9. a)  $\sqrt[3]{3-3i} = \sqrt[3]{\sqrt{18}_{315^\circ}} =$   
 $= \begin{cases} \sqrt[6]{18}_{\frac{315^\circ}{3}} = \sqrt[6]{18}_{105^\circ} \\ \sqrt[6]{18}_{\frac{675^\circ}{3}} = \sqrt[6]{18}_{225^\circ} \\ \sqrt[6]{18}_{\frac{105^\circ}{3}} = \sqrt[6]{18}_{345^\circ} \end{cases}$

b)  $\sqrt{2+\sqrt{12i}} = \sqrt{4_{60^\circ}} = \begin{cases} 2_{\frac{60^\circ}{2}} = 2_{30^\circ} \\ 2_{\frac{420^\circ}{2}} = 2_{210^\circ} \end{cases}$   
 c)  $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2_{240^\circ}} =$   
 $= \begin{cases} \sqrt[4]{2}_{\frac{240^\circ}{4}} = \sqrt[4]{2}_{60^\circ} \\ \sqrt[4]{2}_{\frac{600^\circ}{4}} = \sqrt[4]{2}_{150^\circ} \\ \sqrt[4]{2}_{\frac{960^\circ}{4}} = \sqrt[4]{2}_{240^\circ} \\ \sqrt[4]{2}_{\frac{1320^\circ}{4}} = \sqrt[4]{2}_{330^\circ} \end{cases}$

10. a)  $z_1 = 3 + i$      $z_2 = 3 - i$   
 b)  $z^4 + z = z(z^3 + 1) = 0 \Rightarrow z_1 = 0$   
 $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -1, z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$   
 c)  $z^4 + z^3 - z^2 + z - 2 = (z-1) \cdot (z+2) \cdot (z^2+1) = 0 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -2, z_3 = i, z_4 = -i$

11.  $(3-2i) \cdot (k+1-ki) = 3k + 3 - 3ki - 2ki - 2i + 2ki^2 = k + 3 - (5k + 2)i$   
 a) Para  $k = -3$  el resultado es un número imaginario puro.  
 b) Para  $k = -\frac{2}{5}$  el resultado es un número real.