CURSO COMPLETO

1º Halla a y b para que el polinomio $P(x)=x^3+ax^2+bx+5$ sea divisible por $\left(x^2+x+1\right)$. Obtén las raíces y la descomposición de $P(x)=x^5+2x^4-7x^3+2x^2-8x$

2º Resuelve:

a) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}=\sqrt{x-4}$

b) $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

3º Calcula $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}\cdot i}$.

4º Estudia los puntos notables, la monotonía y la curvatura de. $f(x)=\frac{2x^2}{x-1}$

5º Calcula la 1ª derivada de $f(x)=(\operatorname{sen}x)^{\operatorname{arctg}x}$.

6º Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea de 8 dm^3. Averigua las dimensiones de la caja para que la superficie exterior sea mínima.

7º Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x^3+8}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$

8º Las diagonales de un paralelogramo miden 22 y 16 cm y forman un ángulo de 60º. Halla los lados del paralelogramo y el área del mismo.

9º Estudia la posición relativa de las rectas r y s en función del parámetro m. Halla la distancia entre las rectas según los valores de m. Siendo $r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}$ y $s: 6x-my+1=0$.

10º Halla el punto simétrico de P=(3, 2) respecto de la recta $r:\begin{cases}x=-3+5k\\ y=2-3k\end{cases}\quad k\in\mathbb{R}$

① ¿a, b?

La condición para que un polinomio divida a otro es que el resto de la división sea cero. Realizamos la división "normal" pues el divisor es de grado 2.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + ax^2 + bx + 5 & x^2+x+1 \\
\cline{2-2}
-x^3 - x^2 - x & x + a - 1 \\
\cline{1-1}
(a-1)x^2 + (b-1)x + 5 & \\
-(a-1)x^2 - (a-1)x - a + 1 & \\
\cline{1-1}
(b-1-a+1)x + 5 - a + 1 &
\end{array}
$$

El resto es $R(x) = (b-a)x + 6 - a$

La condición para que un polinomio sea nulo para cualquier valor de x es que sus coeficientes sean nulos.

$$R(x) = \text{polinomio nulo} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b-a=0 \\ 6-a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=b=6}$$

Descomposición de $P(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 8x$

$P(x) = x \cdot (x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 2x - 8)$

$-8: \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

¿1? $P(1) = 1 + 2 - 7 + 2 - 8 \neq 0$

¿−1? $P(-1) = 1 - 2 - 7 - 2 - 8 \neq 0$

¿+2? $P(2) = 16 + 16 - 28 + 4 - 8 = 0 \rightarrow$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & -7 & 2 & -8 \\
2 & & 2 & 8 & 2 & 8 \\
\hline
 & 1 & 4 & 1 & 4 & \boxed{0} \\
-4 & & -4 & 0 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

¿−2? $P(-2) = -8 + 16 - 2 + 4 \neq 0$

¿−4? $P(-4) = -64 + 64 - 4 + 4 = 0$

La solución será:

$$P(x) = x\cdot(x-2)\cdot(x+4)\cdot(x^2+1).$$

2 a) $\left(\sqrt{3x+1}\right)^2 = \left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}\right)^2 \iff$

$3x+1 = x-4+2\sqrt{(x-4)\cdot(x+1)} + x+1 \iff$

$(x+4)^2 = \left(2\sqrt{(x-4)(x+1)}\right)^2 \iff$

$x^2+8x+16 = 4(x-4)\cdot(x+1) \iff$

$x^2+8x+16 = 4x^2+4x-16x-16 \iff$

$\boxed{3x^2-20x-32=0} \implies$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2-4\cdot 3\cdot(-32)}}{2\cdot 3} = \frac{20\pm 28}{6} = \begin{cases} \frac{20+28}{6} = 8 \\ \frac{20-28}{6} = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Comprobación:

$x=8$: $\sqrt{25} - \sqrt{9} = \sqrt{4}$ válida

$x=-\frac{4}{3}$: $\sqrt{-3} - \sqrt{-1/3} = \sqrt{-16/3}$ no válida

Solución $\boxed{x=8}$

b) $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 0 \iff$

$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

Recuerda $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \implies$

$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(-2x-\frac{\pi}{3}\right)$

Recuerda $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \implies \alpha = \beta + 2\pi k$ y $\alpha = \pi - \beta + 2\pi k$. $k\in\mathbb{Z}$. $\implies$

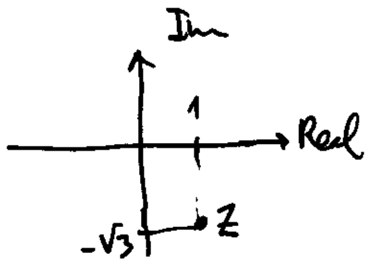
(1) $x+\frac{\pi}{6} = -2x-\frac{\pi}{3}+2\pi k$ (2) $x+\frac{\pi}{6} = \pi + 2x + \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

(1) $3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k}$

(2) $\boxed{x = -\frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k}$ $k \in \mathbb{Z}$.

3º $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}\cdot i} = z \Leftrightarrow z^3 = 1-\sqrt{3}\cdot i$

Hay que expresar $1-\sqrt{3}i$ en forma polar.



módulo: $r^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4 \rightarrow r = 2$.

argumento: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{1} \rightarrow \alpha = -60^\circ$ ó $-60^\circ + 180^\circ$

como z está en el 4º cuadrante. $\alpha = -60^\circ = 300^\circ$.

$\Rightarrow 1-\sqrt{3}i = 2_{300^\circ}$.

$\Rightarrow \boxed{z^3 = 2_{300^\circ}}$

expresamos z en forma polar $z = r_\alpha \rightarrow$

$(r_\alpha)^3 = 2_{300^\circ} \Leftrightarrow r^3_{3\alpha} = 2_{300^\circ}$

igualdad de módulos: $r^3 = 2 \longrightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{2}}$

igualdad de argumentos: $3\alpha = 300^\circ + 360k$ $k \in \mathbb{Z} \rightarrow (*)$

$\alpha_0 = 100^\circ \rightarrow z_0 = \sqrt[3]{2}_{100^\circ}$

$\alpha_1 = 220^\circ \rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2}_{220^\circ}$

$\alpha_2 = 340^\circ \rightarrow z_2 = \sqrt[3]{2}_{340^\circ}$

(*) Recuerda $3\alpha = 300^\circ + 360^\circ k \Leftrightarrow \alpha = 100^\circ + 120^\circ k$, para $k=3$ se obtiene $\alpha_0 = \alpha_3$ y así sucesivamente.

④ 1ª y 2ª derivada

$$f'(x) = \frac{4x\cdot(x-1) - 2x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{4x^2-4x-2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(4x-4)\cdot(x-1)^2-(2x^2-4x)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(4x-4)\cdot(x-1)-(2x^2-4x)\cdot 2}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{4x^2-4x-4x+4-4x^2+8x}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Resumiendo

$$f'(x) = \frac{2x^2-4x}{(x-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

• Extremos.

Condición de extremo $f'(x)=0 \to 2x^2-4x=0 \Rightarrow 2x\cdot(x-2)=0 \Rightarrow$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

$f''(0) = \frac{4}{(-1)^3} < 0 \to$ máximo. $\boxed{M = (0, f(0)) = (0,0)}$

$f''(2) = \frac{4}{1^3} > 0 \to$ mínimo. $\boxed{m = (2, f(2)) = (2,8)}$

• Puntos de inflexión

Condición de punto de inflexión $f''(x)=0 \Rightarrow 4=0 \Rightarrow$ no hay.

• Monotonía.

Se estudia el signo de la 1ª derivada. Tabla con los valores que anulan a $f'(x)$ (*) y los puntos de discontinuidad de f y f' (en este caso sólo es $x=1$)

(*) a f' le anulan $x=0$ y $x=2$.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$\nexists$ no existe

$\exists$ existe.

$-3 \in (-\infty,0) : f'(-3) = \frac{18+12}{+} > 0$

$1/2 \in (0,1) : f'(1/2) = \frac{1/2-2}{+} < 0$

$3/2 \in (1,2) : f'(3/2) = \frac{4{,}5-6}{+} < 0$

$3 \in (2,\infty) : f'(3) = \frac{18-12}{+} > 0$

• Curvatura.

Se estudia el signo de la 2ª derivada. Tabla con los valores que anulan a $f''(x)$ (no tiene) y de discontinuidad de f y f'' ($x=1$)

	$(-\infty,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\cap$ cóncava	$\nexists$	$\cup$ convexa

$0 \in (-\infty,1) : f''(0) = \frac{4}{-1} < 0$

$3 \in (1,\infty) : f''(3) = \frac{4}{2^3} > 0$

5º Al tratarse de una función exponencial deberemos aplicar el método de la derivación logarítmica

$y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} x} \Rightarrow$

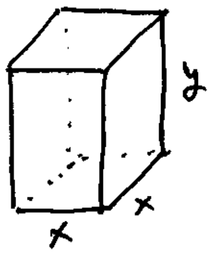
$\ln y = \ln (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} x} \Rightarrow$

$$\ln y = \operatorname{arctg} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) \quad \rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(\operatorname{sen} x) + \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \quad \rightarrow$$

$$\boxed{y' = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} x} \cdot \left[\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} \right]}$$

(6º) Observa la figura



- variables x = ancho = largo $\quad y$ = alto $\quad (x, y > 0)$
- ligadura o restricción: el volumen es 8 dm³

$$x^2 \cdot y = 8$$

- Función a optimizar: superficie exterior. (recuerda el desarrollo)

$$f = 2x^2 + 4xy$$

- Se introduce la ligadura: es más sencillo despejar la y

$$y = \frac{8}{x^2} \rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x \frac{8}{x^2} = 2x^2 + \frac{32}{x} \quad (*)$$

- 1ª y 2ª derivadas

$$f'(x) = 4x - \frac{32}{x^2} \qquad f''(x) = 4 + \frac{64}{x^3}.$$

Condición de extremo $f' = 0 \rightarrow 4x - \frac{32}{x^2} = 0 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow \boxed{x = 2}$

$f''(2) > 0 \rightarrow$ mínimo.

(*) Es MUY IMPORTANTE efectuar las operaciones correctamente.

Solución:

$$x = 2 \longrightarrow y = \frac{8}{2^2} = 2$$

La caja tiene forma de cubo de arista 2 dm.

Superficie mínima $f(2) = 2 \cdot 2^2 + \dfrac{32}{2} = 24 \text{ dm}^2$

7º a) $$\lim_{x \to -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} = \frac{(-2)^4 - 16}{(-8) + 8} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Hay que simplificar la fracción: -2 es una raíz del numerador y denominador. Observa que el numerador se puede descomponer de modo sencillo mediante las identidades notables

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b) \qquad a^4 - b^4 = (a^2+b^2) \cdot (a^2 - b^2)$$

Num) $$x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x^2 + 4) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

Den)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & +4 & \lfloor 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x^2+4) \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{(x+2) \cdot (x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \to -2} \frac{(x^2+4) \cdot (x-2)}{x^2 - 2x + 4} = \frac{8 \cdot -4}{4+4+4} = \boxed{-1}$$

b) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{n(n+3)} - n = (\infty - \infty)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\sqrt{n(n+3)} - n\right) \cdot \left(\sqrt{n(n+3)} + n\right)}{\sqrt{n(n+3)} + n} =$$

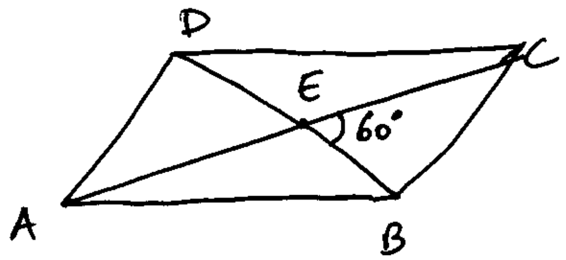
Se multiplica y divide por el conjugado.

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+3) - n^2}{\sqrt{n(n+3)} + n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^2} + 3n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+3n} + n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

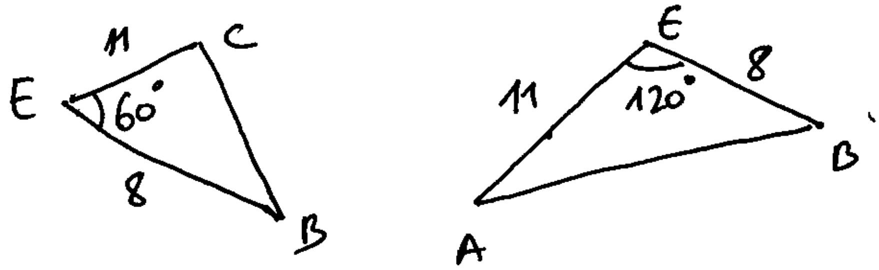
Se divide por la mayor potencia del denominador : n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+3n}\;+n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}\;+1} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

8. Observa el dibujo.



Recuerda: las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Del paralelogramo se obtienen 2 triángulos



$EC = EA$ y $EB = ED$.

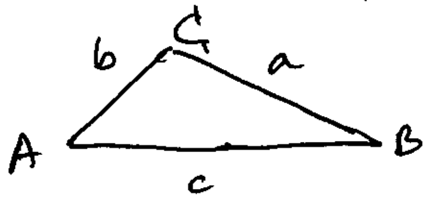
$\hat{E}$ en $\widehat{ECB}$ y $\hat{E}$ en $\widehat{EAB}$ son suplementarios.

Aplicando el teorema del coseno a cada triángulo podemos averiguar el valor de los lados $AB = DC$ y $BC = AD$ respectivamente

¿BC? $BC^2 = 11^2 + 8^2 - 2\cdot 11\cdot 8\cdot \cos 60° = 97 \to \boxed{BC = \sqrt{97}\text{ cm}}$

¿AB? $AB^2 = 11^2 + 8^2 - 2\cdot 11\cdot 8\cdot \cos 120° = 273 \to \boxed{AB = \sqrt{273}\text{ cm}}$

Recuerda cómo se puede hallar el área de un triángulo



$$S = \frac{1}{2} ab \,\mathrm{sen}\, C = \frac{1}{2} ac \,\mathrm{sen}\, B = \frac{1}{2} bc \,\mathrm{sen}\, A$$

En el paralelogramo $\underbrace{\widehat{ADE}}_{T_1} = \widehat{EBC}$ y $\underbrace{\widehat{ABE}}_{T_2} = \widehat{DFC}$

$$T_1 = \frac{1}{2}\, 11 \cdot 8 \cdot \mathrm{sen}\, 60^\circ$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\, 11 \cdot 8 \cdot \mathrm{sen}\, 120^\circ$$

$$\Rightarrow S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \mathrm{sen}\, 60^\circ + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \mathrm{sen}\, 120^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 11 \cdot 8 \cdot \mathrm{sen}\, 60^\circ + 11 \cdot 8 \cdot \mathrm{sen}\, 120^\circ = 2 \cdot 11 \cdot 8 \cdot \mathrm{sen}\, 60^\circ = 88\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2}$$

$$\mathrm{sen}\, 60^\circ = \mathrm{sen}\, 120^\circ$$

9º Posición relativa.

1º se expresan ambas rectas en forma general

$$r: 3x + 3 = 2y - 4 \rightarrow r: 3x - 2y + 7 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} r: 3x - 2y + 7 = 0 \\ s: 6x - my + 1 = 0 \end{array}\right\} \text{¿}\ \frac{3}{6} = \frac{-2}{-m} = \frac{7}{1}\ \text{?}$$

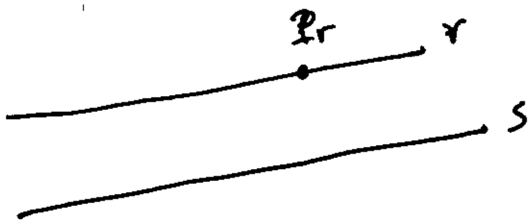
$$\frac{3}{6} = \frac{-2}{-m} \Leftrightarrow 3m = 12 \rightarrow m = 4$$

si $m = 4 \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{7}{1}$ paralelas.

si $m \neq 4 \rightarrow \frac{3}{6} \neq \frac{-2}{-m}$ secantes.

Distancias

si $m = 4 \rightarrow \mathrm{dis}(r, s) = \mathrm{dis}(r, P_s) = \mathrm{dis}(s, P_r)$



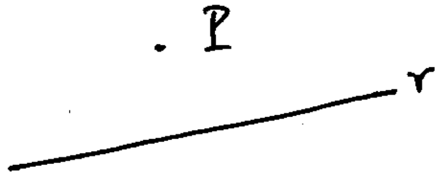
Vamos a emplear la última condición pues ya tenemos un punto de r (recuerda que r nos la han proporcionado en forma continua)

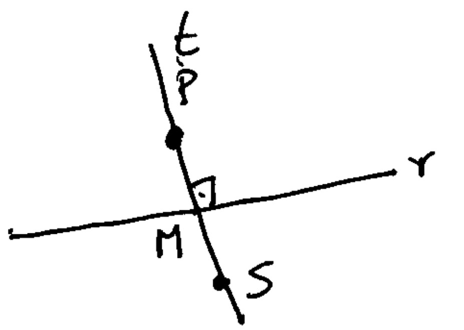
$$\left.\begin{array}{l} s: 6x-4y+1=0 \\ P_r=(-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{dis}(s,P_r)=\frac{|6\cdot(-1)-4\cdot 2+1|}{\sqrt{6^2+(-4)^2}}=\frac{13}{\sqrt{52}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{dis}(r,s)} = \operatorname{dis}(s,P_r)=\frac{13}{\sqrt{52}}\cdot\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{52}}=\frac{13\sqrt{52}}{52}=\frac{\sqrt{52}}{4}=\frac{2\sqrt{13}}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{13}}{2}\,u}$$

si $m \neq 4$ $\operatorname{dis}(r,s)=0$ pues son secantes.

(10º) observa las figuras





¿t? $t \perp r$ y pasa por P.

$$\vec{v}_t \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_t=(3,5) \rightarrow t: \frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{5}$$

¿M? es la intersección de r y t. Para resolver bien el sistema se expresan ambas rectas en forma general.

$$r: \left.\begin{array}{l} x=-3+5k \\ y=2-3k \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{x+3}{5}=\frac{y-2}{-3} \Leftrightarrow -3x-9=5y-10 \Rightarrow$$

$$-3x-5y=-1$$

$$\boxed{3x+5y=1}$$

$t: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{5} \Leftrightarrow 5x-15 = 3y-6 \Leftrightarrow 5x-3y = 9$

sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3x+5y = 1 \\ 5x-3y = 9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 9x+15y = 3 \\ 25x-15y = 45 \\ \hline 34x \quad = 48 \end{array} \rightarrow x = \frac{48}{34} = \frac{24}{17}.$$

$$\begin{array}{r} -15x-25y = -5 \\ 15x-9y = -27 \\ \hline -34y = -32 \end{array} \rightarrow y = \frac{32}{34} = \frac{16}{17}.$$

$$M = \left(\frac{24}{17}, \frac{16}{17}\right)$$

¿S? M es el punto medio de P y su simétrico: S.

$$M = \frac{P+S}{2} \rightarrow S = 2M - P$$

$$S = 2\cdot\left(\frac{24}{17}, \frac{16}{17}\right) - (3,2) \Rightarrow \boxed{S = \left(\frac{-3}{17}, \frac{-2}{17}\right)}$$