

Perpendiculares, mediatrices, simetrías y proyecciones

1. Calcular en cada caso la ecuación de la recta perpendicular a la dada, y que pasa por el punto P que se indica:

- a) $5x - 2y - 3 = 0$ $P(-1, 3)$ b) $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-5}$ $P(2, -9)$
- c) $y = 3x - 5$ $P(-3, -2)$ d) $\left. \begin{array}{l} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 4t \end{array} \right\}$ $P(8, -3)$
-

2. Calcular la ecuación de la recta, que tiene la misma ordenada en el origen que la recta de ecuación $2x - 3y + 6 = 0$ y cuyo vector normal es $\vec{n}(1, -5)$.

3. Calcular el área del cuadrilátero de vértices $A(2, -2)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$ y $D(-2, 3)$.

4. Calcular la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por $A(-2, 3)$ y $B(8, -7)$

5. Calcular las coordenadas del punto simétrico de $A(0, 7)$ respecto de la recta $3x - 5y + 1 = 0$

6. Dada la recta $2x - 3y + 12 = 0$, calcular la ecuación de la mediatriz del segmento, que tiene de extremos los puntos de corte de dicha recta con los ejes de coordenadas.

7. La recta $4x - 3y - 29 = 0$ es mediatriz del segmento \overline{AB} . Sabiendo que las coordenadas del punto A son $(1, 0)$, calcular las del punto B .

8. Los puntos $B(-1, 3)$ y $C(3, -3)$ son los vértices de un triángulo isósceles, que tiene el tercer vértice A en la recta $x + 2y - 15 = 0$, siendo \overline{AB} y \overline{AC} los dos lados iguales. Calcular el vértice A .

9. El punto en el que se cortan las diagonales de un paralelogramo es el $M(3, 0)$ y dos de los vértices consecutivos del mismo son los puntos $A(2, 2)$ y $B(-3, -1)$. Hallar las coordenadas de los dos vértices que faltan, y el área de dicho paralelogramo.

10. Sea el punto $P(5, 7)$ y la recta $x + 2y - 4 = 0$, calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del punto P sobre la recta dada.

Perpendiculares, mediatrices, simetrías y proyecciones

1. Calcular en cada caso la ecuación de la recta perpendicular a la dada, y que pasa por el punto P que se indica:

a) $5x - 2y - 3 = 0$ $P(-1, 3)$

b) $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-5}$ $P(2, -9)$

c) $y = 3x - 5$ $P(-3, -2)$

d) $\left. \begin{array}{l} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 4t \end{array} \right\}$ $P(8, -3)$

-
2. Calcular la ecuación de la recta, que tiene la misma ordenada en el origen que la recta de ecuación $2x - 3y + 6 = 0$ y cuyo vector normal es $\vec{n}(1, -5)$.

DATOS

$$2x - 3y + 6 = 0$$

$$\vec{n}(1, -5)$$

PLAN

1. Calculamos n (despejando y de la ecuación general) para obtener la ordenada en el origen m

$$2x - 3y + 6 = 0$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

2. Podemos seguir el problema de dos formas

- a) $\vec{n}(1, -5)$ del vector normal de la recta sacamos la ecuación general

$$1x - 5y + c = 0 \quad (\text{La } c \text{ es la ordenada en el origen})$$

Despejamos y para tener una ecuación explícita y tener la misma condición que antes

$$y = \frac{-1x - c}{-5}$$

$$y = \frac{1}{5}x + 2$$

- b) Del vector normal se puede sacar el vector director cambiando el orden y uno de los símbolos.

$$\vec{n}(1, -5) \rightarrow \vec{v}_r(5, 1)$$

Y del vector director podemos obtener la ordenada en el origen m

$$m = \frac{1}{5}$$

Sacamos la explícita para tener la misma condición que antes.

$$y = \frac{1}{5}x + 2$$

-Yo he utilizado la opción b) porque es más rápida.

$$2x - 3y + 6 = 0$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$\vec{n}(1, -5) \rightarrow \vec{v}_r(5, 1)$$

$$m = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{5}x + 2$$

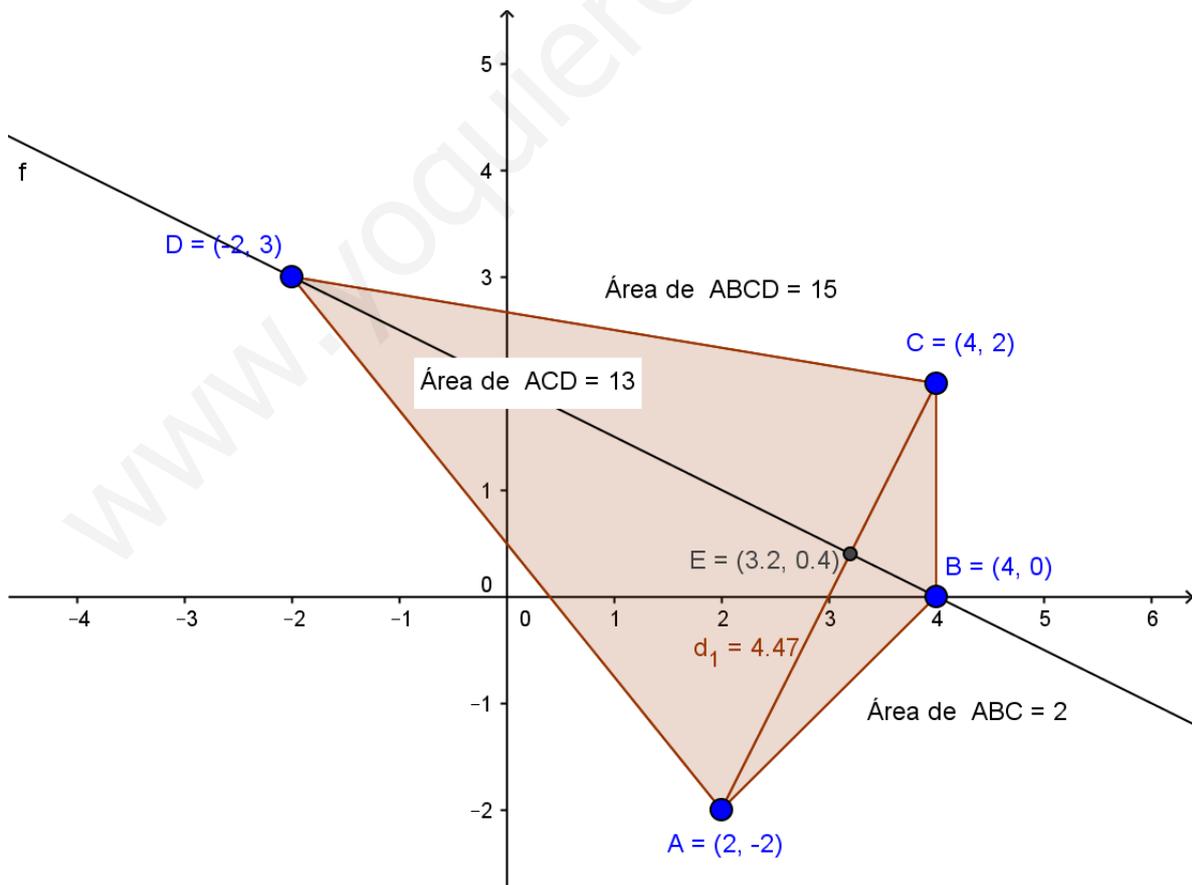
3. Calcular el área del cuadrilátero de vértices $A(2,-2)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$ y $D(-2,3)$.

PLAN

Observación: El área de este cuadrilátero se puede calcular como $\frac{D \cdot d}{2}$ gracias a que sus diagonales son perpendiculares. En caso contrario NO se podría y habría que calcular el área descomponiendo en dos triángulos.

Para calcular las bases se obtiene el módulo $|\vec{AC}| = 4,47$. Las alturas son dos, y se pueden calcular de forma general:

- (1) Dando todos los pasos: perpendicular a AC que pasa por D (y da la casualidad de que también pasa por B), punto de corte E de esa recta con AC, distancia del vértice D (o B) al punto E.
- (2) Utilizando la fórmula de la distancia de un punto a una recta.



4. Calcular la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por $A(-2, 3)$ y $B(8, -7)$

PLAN

1) Calculamos C , el punto medio de A y B haciendo las medias de las coordenadas:

$$C = \left(\frac{-2+8}{2}, \frac{3+(-7)}{2} \right) = (3, -2)$$

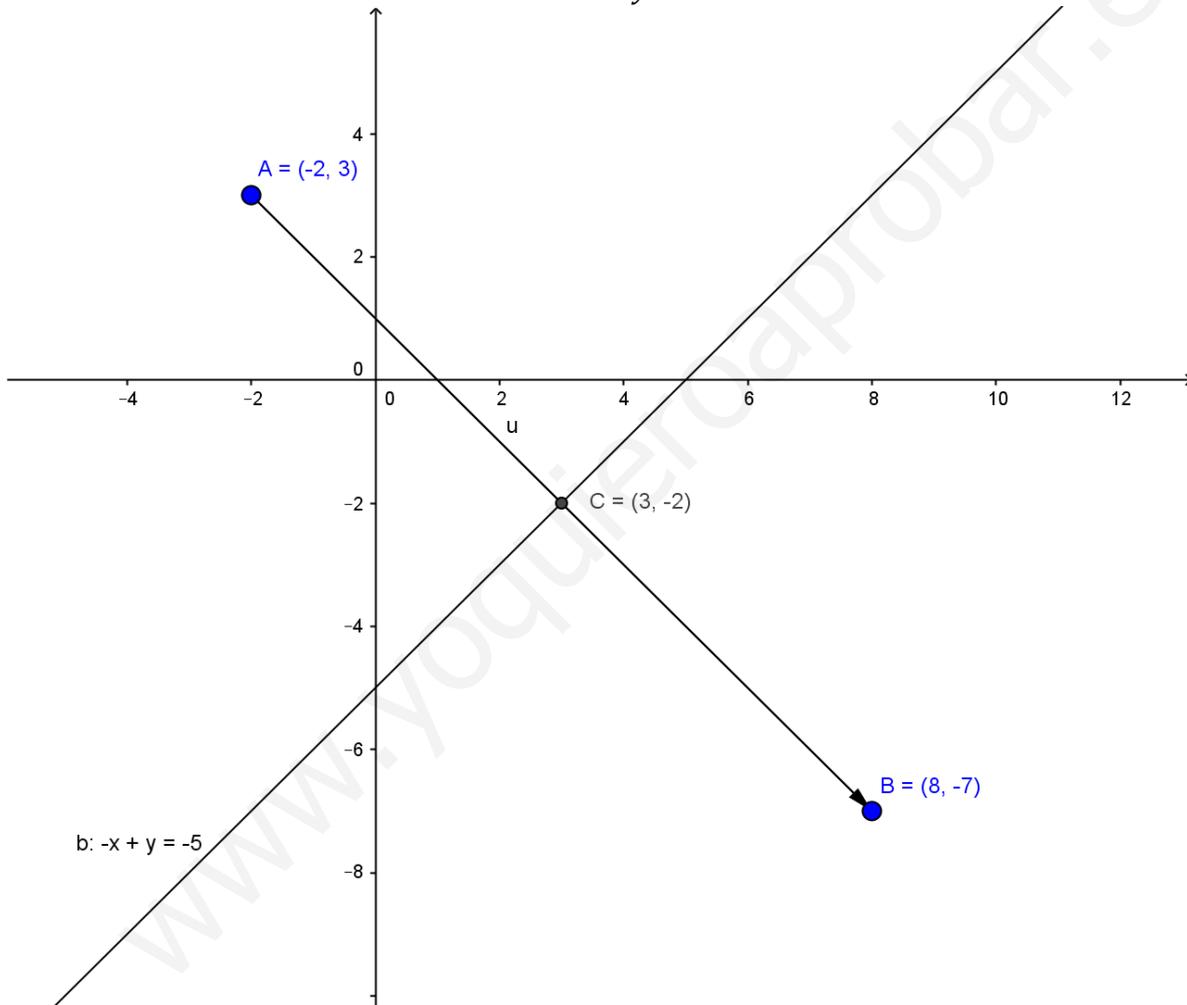
2) Calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (8 - (-2), -7 - 3) = (10, -10)$, que es proporcional al $(1, -1)$

3) Calculamos la recta s , perpendicular a \overrightarrow{AB} que pasa por el punto $C = (3, -2)$

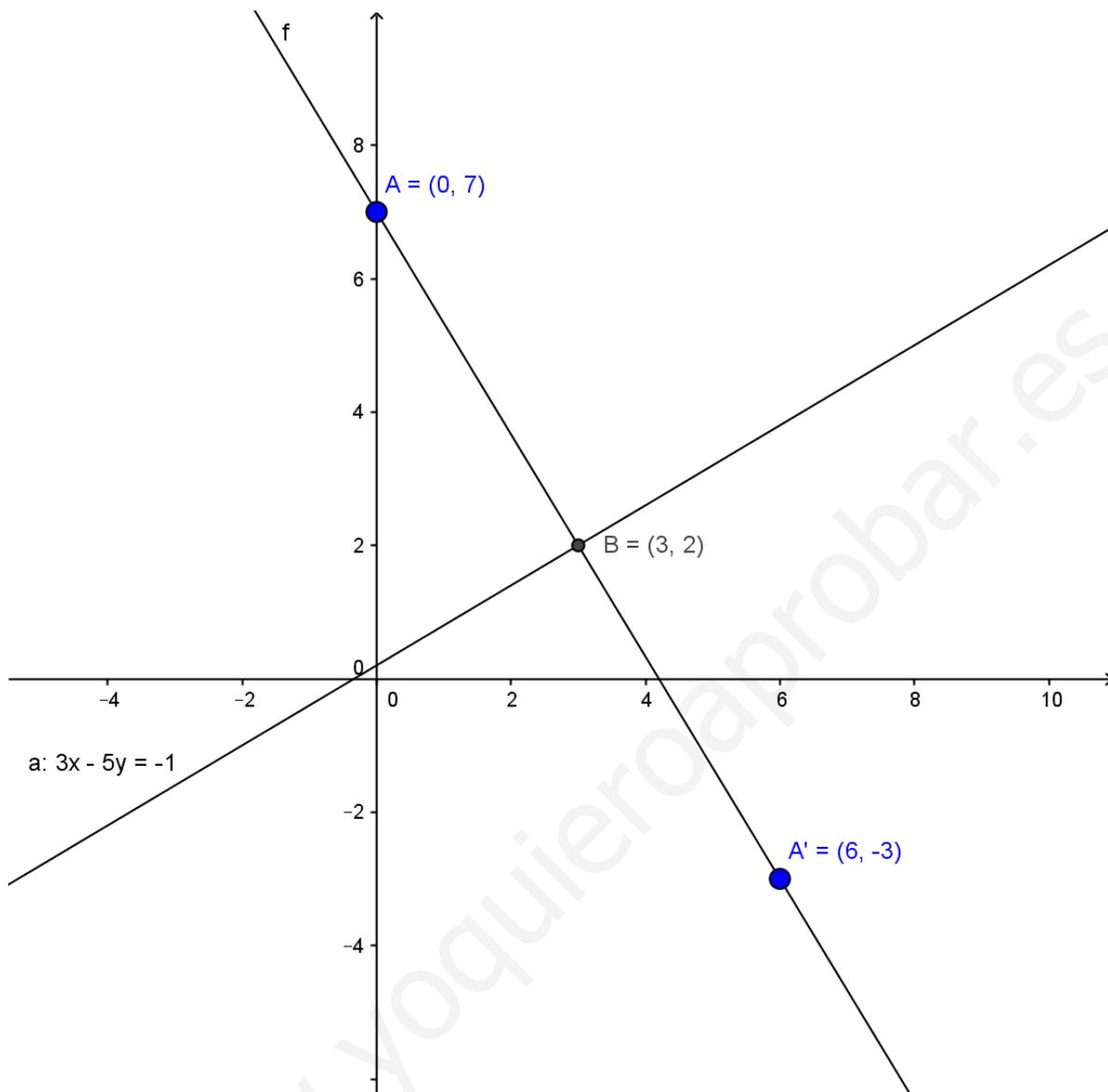
Los coeficientes en la ecuación general de s coinciden con las coordenadas del vector \overrightarrow{AB} , pues éste es el vector normal a s . Por tanto $s: x - y + C = 0$

Para que el punto $C = (3, -2) \in s$ se debe cumplir la ecuación al sustituir sus coordenadas. Así obtenemos $C = -3 - 2 = -5$

La mediatriz es la recta s de ecuación $s: x - y - 5 = 0$



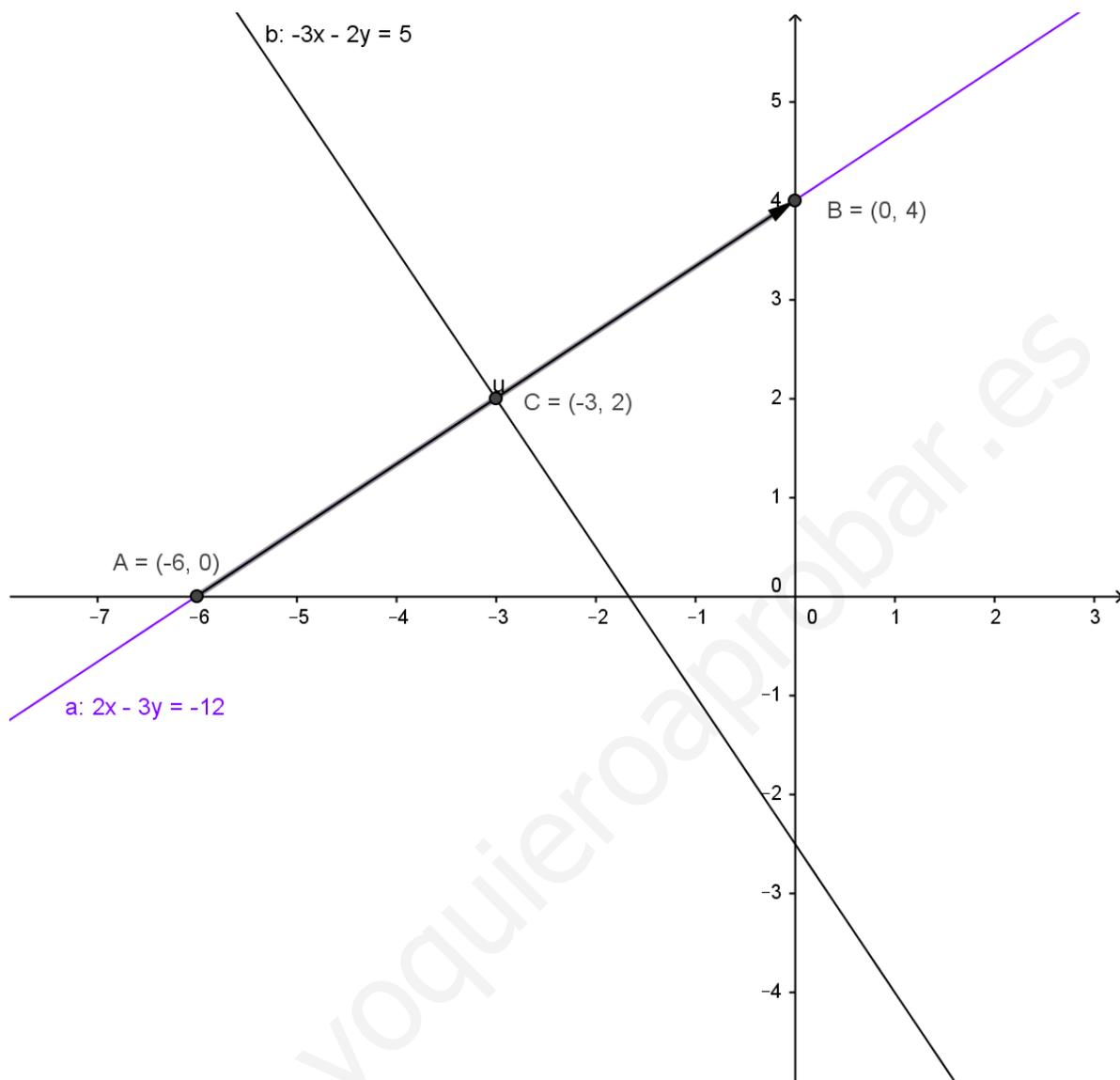
5. Calcular las coordenadas del punto simétrico de $A(0, 7)$ respecto de la recta $3x - 5y + 1 = 0$



6. Dada la recta $2x - 3y + 12 = 0$, calcular la ecuación de la mediatriz del segmento, que tiene de extremos los puntos de corte de dicha recta con los ejes de coordenadas.

PLAN

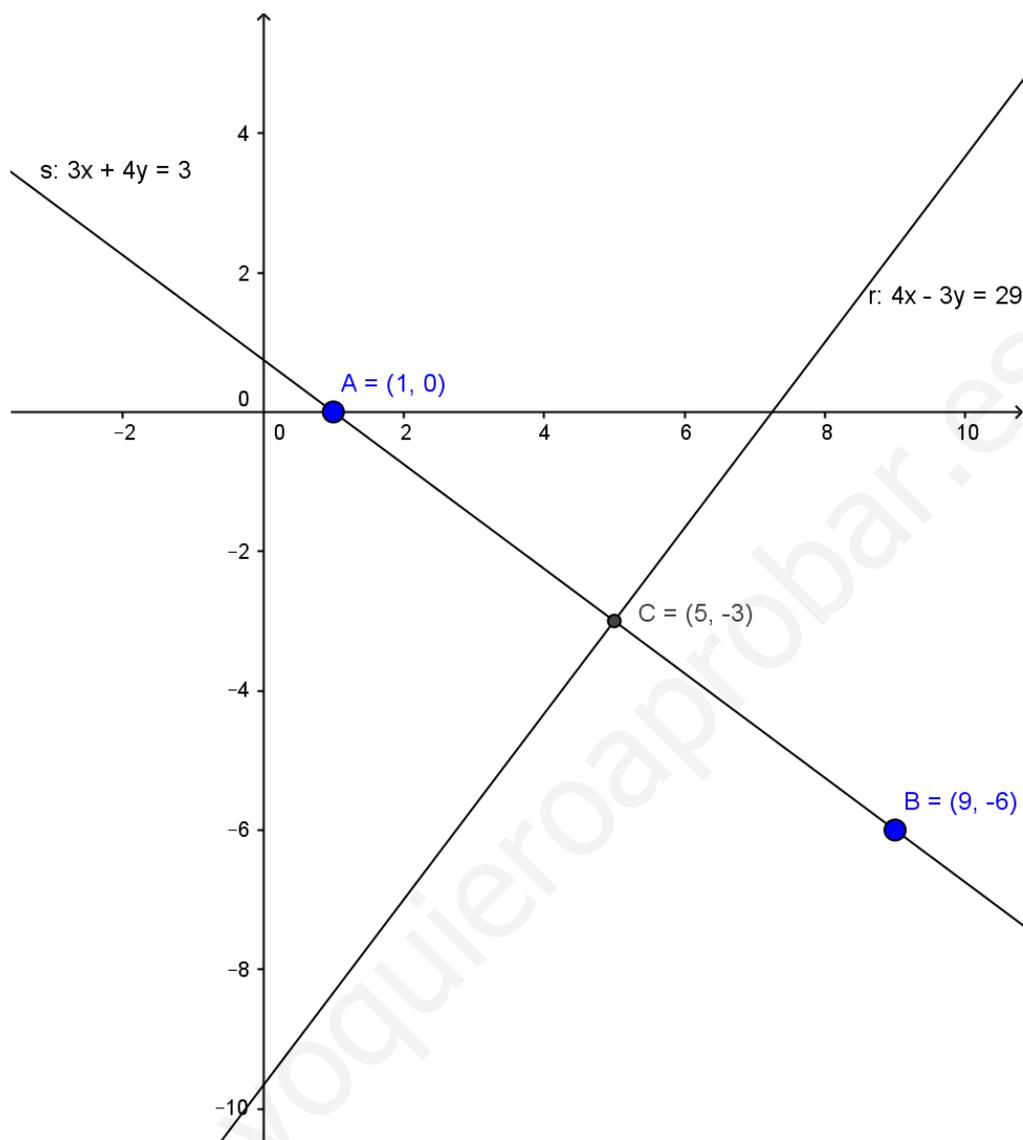
- 1) Calculamos los puntos A y B de corte con los ejes coordenados (Eje X de ecuación $y = 0$, Eje Y de ecuación $x = 0$)
- 2) Calculamos el punto medio $C = (3, -2)$
- 3) Calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (6, 4)$
- 4) Calculamos la recta $s \perp \overrightarrow{AB}, C \in s$



7. La recta $4x - 3y - 29 = 0$ es mediatriz del segmento \overline{AB} . Sabiendo que las coordenadas del punto A son $(1, 0)$, calcular las del punto B.

PLAN (B es el punto simétrico de A respecto de r)

- 1) Calculamos $s \perp r, A \in s$
- 2) Calculamos el punto $C = s \cap r$, resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones generales de las dos rectas (o una en general y otra en explícita, por sustitución)
- 3) Se calcula el punto B sabiendo que C es el punto medio de A y B, $B = (9, -6)$

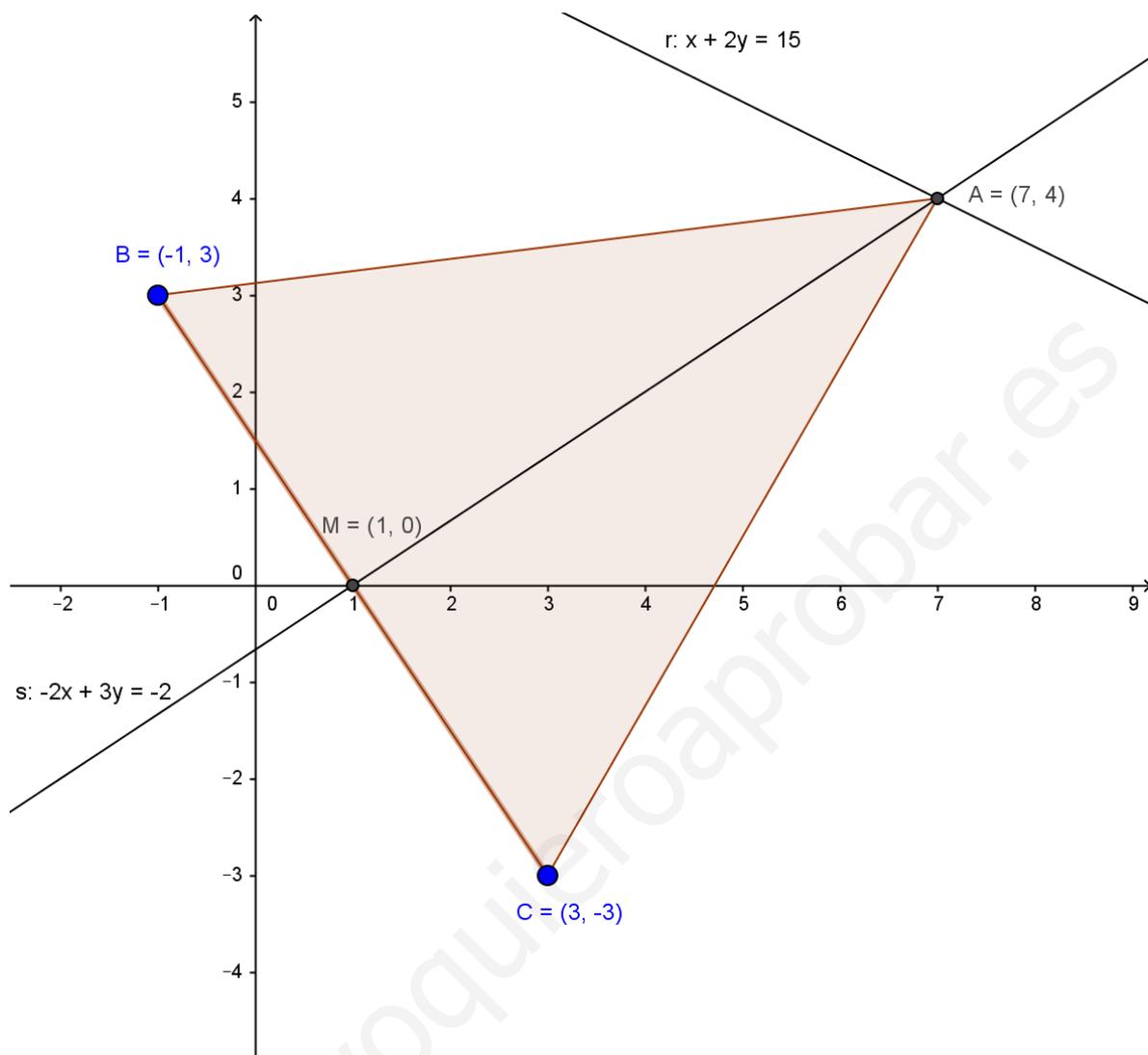


8. Los puntos $B(-1, 3)$ y $C(3, -3)$ son los vértices de un triángulo isósceles, que tiene el tercer vértice A en la recta $x + 2y - 15 = 0$, siendo \overline{AB} y \overline{AC} los dos lados iguales. Calcular el vértice A .

PLAN

Observación: la mediatriz es el lugar de los puntos que equidistan de dos dados

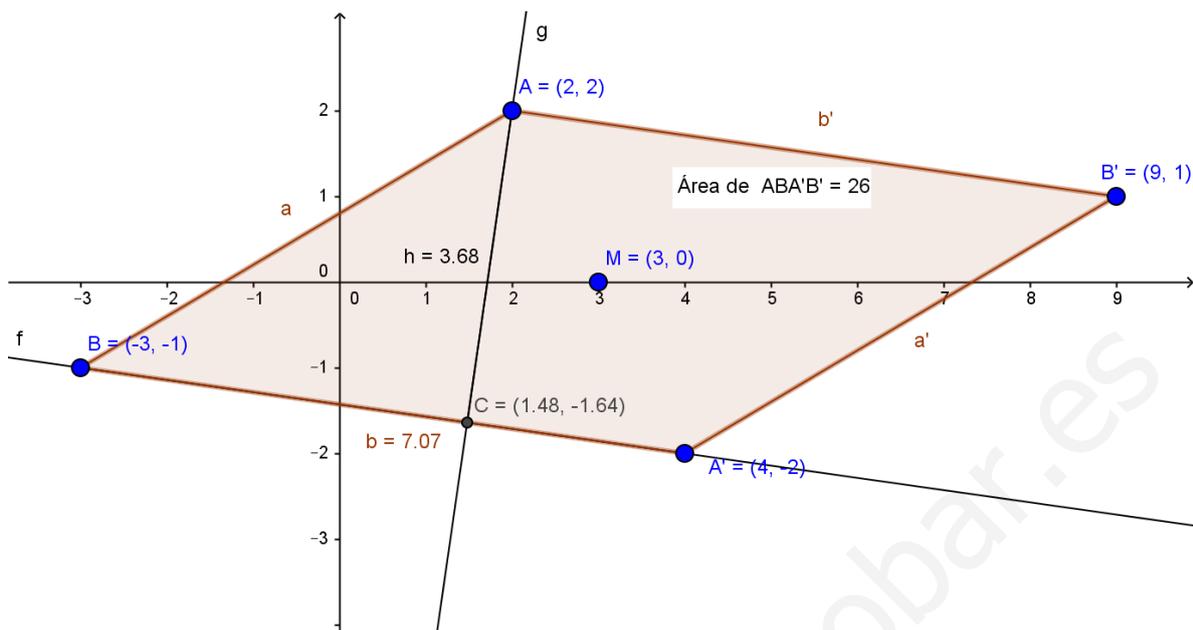
- 1) Calculamos la mediatriz s de A y B , $s: -2x + 3y + 2 = 0$. Para ello:
 - a. Calculamos el punto medio $M(1,0)$
 - b. Calculamos el vector $\overrightarrow{BC} = (4, -6)$
 - c. Calculamos la recta perpendicular a \overrightarrow{BC} que pasa por M
- 2) Calculamos $A = r \cap s$, pues A está en la recta del enunciado y, para que equidiste de los dos puntos A y B también debe estar en su mediatriz.



9. El punto en el que se cortan las diagonales de un paralelogramo es el $M(3, 0)$ y dos de los vértices consecutivos del mismo son los puntos $A(2, 2)$ y $B(-3, -1)$. Hallar las coordenadas de los dos vértices que faltan, y el área de dicho paralelogramo.

PLAN

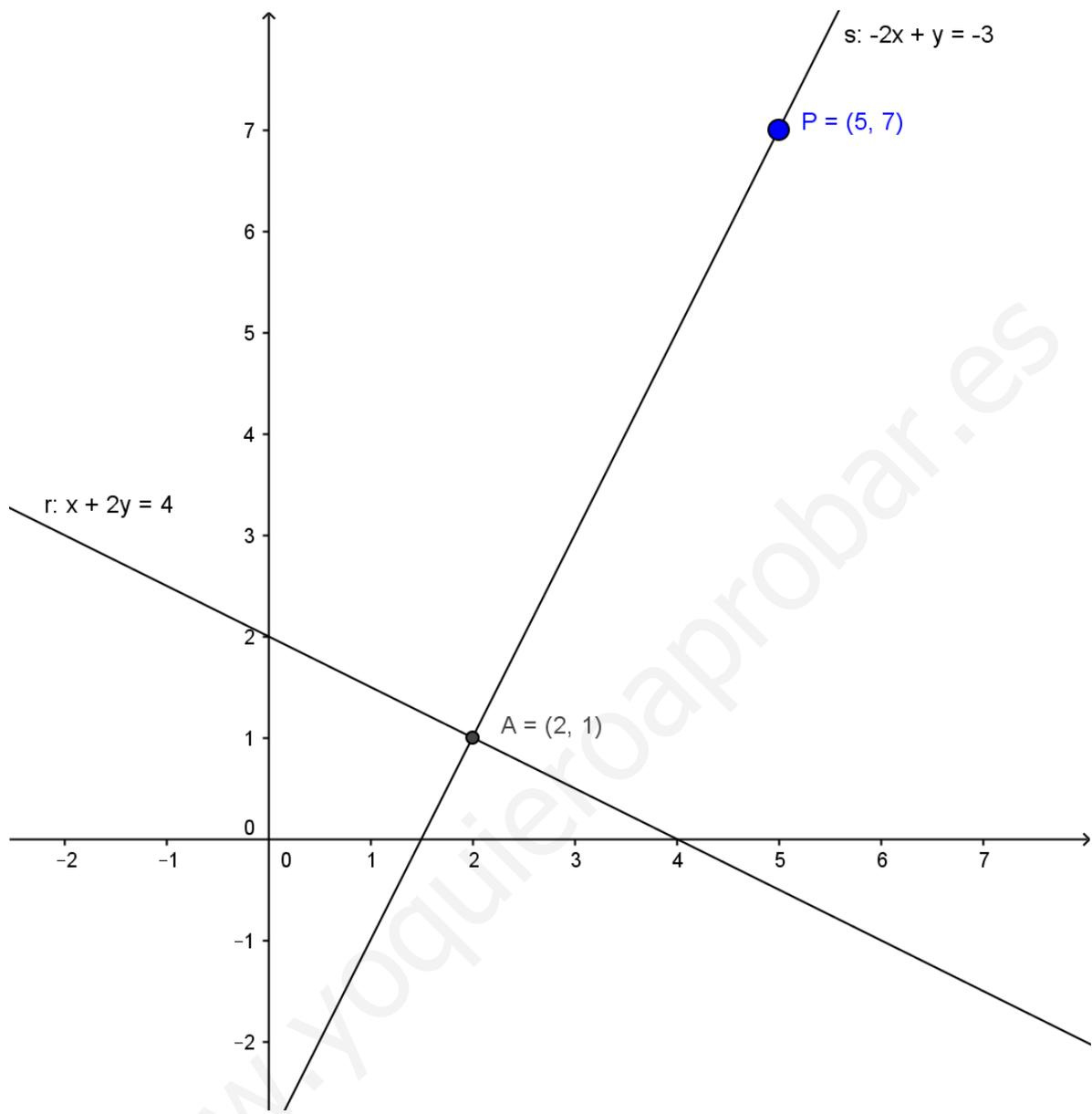
- 1) Los otros dos vértices A' y B' son los puntos simétricos de A y B respecto de M . Es decir, M es su punto medio. Salen $A' = (4, -2)$ y $B' = (9, 1)$
- 2) Para calcular el área tenemos que multiplicar base por altura, pero falta conocer la altura:
 - a. Base = $|\overrightarrow{BA'}|$
 - b. Altura, hay que calcularla
 - i. Se puede usar la fórmula con los vectores \overrightarrow{AB} y el normal a $\overrightarrow{BA'}$
 - ii. Se puede calcular la proyección ortogonal de A sobre la recta r que pasa por B y A' , es decir, el punto de intersección de la recta r con su perpendicular que pasa por A .



10. Sea el punto $P(5, 7)$ y la recta $x + 2y - 4 = 0$, calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del punto P sobre la recta dada.

PLAN

- 1) Calculamos $s \perp r, P \in s$
- 2) Calculamos A la proyección ortogonal de P sobre r , que no es otra cosa que la intersección entre r y s . La solución es $A = (2, 1)$



www.yoquieroaprobar.es