Probabilidad condicionada

1. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos sucesos tales que las probabilidades $P(A)=a$, $P(B)=b$ y $P(A\cap B)=c$ son conocidas. Calcular en función de a, b y c: $P(A\cup B)$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ y $P(\overline{A}\cup B)$.

---

2. Sea S un espacio de sucesos y A y B dos sucesos de S, tales que $P(A\cup B)-P(A\cap B)=0'3$, $P(A)=0'6$ y $P(B)=0'7$. Calcular: $P(A\cup B)$ y $P(A\cap B)$.

---

3. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que : $P(A)={}^{3}/_{4}$, $P(B)={}^{1}/_{2}$ y $P(\overline{A}\cap\overline{B})={}^{1}/_{20}$
   Calcúlese:

a) $P(A\cup B)$ b) $P(A\cap B)$ c) $P\left({}^{\overline{A}}/_{B}\right)$ d) $P\left({}^{\overline{B}}/_{A}\right)$

---

4. Sean los tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que: $P(A)={}^{1}/_{2}$, $P(B)={}^{1}/_{3}$, $P(C)={}^{1}/_{4}$, $P(A\cup B\cup C)={}^{2}/_{3}$, $P(A\cap B\cap C)=0$, $P({}^{A}/_{B})={}^{1}/_{2}$ y $P({}^{C}/_{A})={}^{1}/_{2}$.
   Calcular $P(C\cap B)$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})$.

---

5. Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad de forma que: $P(A)=0'4$, $P(B)=0'3$ y $P(A\cap B)=0'1$. Calcular razonadamente:

a) $P(A\cup B)$ b) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ c) $P({}^{A}/_{B})$ d) $P(\overline{A}\cap B)$

---

6. Se consideran dos sucesos A y B tales que: $P(A)={}^{1}/_{3}$, $P({}^{B}/_{A})={}^{1}/_{4}$ y $P(A\cup B)={}^{1}/_{2}$,
   calcúlese razonadamente: a) $P(A\cap B)$ b) $P(B)$ c) $P\left({}^{\overline{B}}/_{A}\right)$ d) $P\left({}^{\overline{A}}/_{\overline{B}}\right)$

---

7. Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A\cap B)=0'1$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0'6$ y
   $P({}^{A}/_{B})=0'5$. Calcúlese: a) $P(B)$ b) $P(A\cup B)$ c) $P(A)$ d) $P\left({}^{\overline{B}}/_{\overline{A}}\right)$

Probabilidad condicionada

1. Sean A y B dos sucesos tales que las probabilidades $P(A) = a$, $P(B) = b$ y $P(A \cap B) = c$ son conocidas. Calcular en función de a, b y c: $P(A \cup B)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ y $P(\bar{A} \cup B)$.

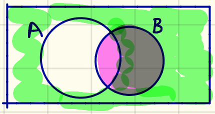
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = a + b - c$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \underset{\uparrow}{=} P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (a + b - c) = 1 - a - b + c$$

De Morgan

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) =$$

$$= 1 - a + b - (b - c) = 1 - a + c$$



Directamente, del diagrama de Venn, se vería que: $\bar{A} \cup B = \bar{A} \cup (A \cap B)$

2. Sea S un espacio de sucesos y A y B dos sucesos de S, tales que $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0'3$, $P(A) = 0'6$ y $P(B) = 0'7$. Calcular: $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0'3 \ ; \ P(A) = 0'6 \ ; \ P(B) = 0'7$$

Se puede resolver con un sistema donde $x = P(A \cup B)$ e $y = P(A \cap B)$

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow x = 0'6 + 0'7 - y \\ P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0'3 \Rightarrow x - y = 0'3 \rightarrow x = y + 0'3 \end{array}\right\}$$

$$y + 0'3 = 1'3 - y \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} = 0'5 \Rightarrow x = 0'5 + 0'3 = 0'8$$

Solución: $P(A \cup B) = 0'8$ $\qquad$ $P(A \cap B) = 0'5$

3. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos sucesos aleatorios tales que : $P(A) = 3/4$, $P(B) = 1/2$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1/20$
Calcúlese:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(A \cap B)$ c) $P\left(\overline{A}/B\right)$ d) $P\left(\overline{B}/A\right)$

<u>DATO</u>: $P(A) = \frac{3}{4}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{20} = P(\overline{A \cup B})$

a) $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$

b) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{19}{20} = \frac{15 + 10 - 19}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

c) $P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \underset{\text{Diag. Venn}}{=} \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/2 - 3/10}{1/2} = \frac{2/10}{1/2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

d) $P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3/4 - 3/10}{3/4} = \frac{\frac{15}{20} - \frac{6}{20}}{\frac{3}{4}} = \frac{9/20}{3/4} =$

$= \frac{3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{3}} = \frac{3}{5}$

También se podría haber razonado con una tabla de contingencia, pero quizá sea más largo

	A	$\bar{A}$	
B	$3/10$	$9/20$	$3/4$
$\bar{B}$	$1/5$	$1/20$	$1/4$
	$1/2$	$1/2$	1

4. Sean los tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(C) = 1/4$, $P(A \cup B \cup C) = 2/3$, $P(A \cap B \cap C) = 0$, $P(A/B) = 1/2$ y $P(C/A) = 1/2$.

Calcular $P(C \cap B)$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$.

Sabemos que

→ Datos

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Por otro lado, sabemos que

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C/A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Despejando de la primera fórmula se obtiene:

$$P(C \cap B) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) - P(A \cup B \cup C) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + 0 - \frac{2}{3} = \frac{12 + 8 + 6 - 4 - 3 - 16}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Por otro lado

$$P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) = P(\bar{A} \cup \overline{B \cap C}) = (\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1 - 0 = 1$$

5. Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad de forma que: $P(A) = 0'4$, $P(B) = 0'3$ y $P(A \cap B) = 0'1$. Calcular razonadamente:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ c) $P(A/_B)$ d) $P(\bar{A} \cap B)$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'4 + 0'3 - 0'1 = 0'6$

b) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) \underset{DM}{=} P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0'1 = 0'9$

c) $P(A/_B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0'1}{0'3} = \dfrac{1}{3} = 0'\widehat{3}$

d) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0'3 - 0'1 = 0'2$

6. Se consideran dos sucesos A y B tales que: $P(A) = 1/_3$, $P(B/_A) = 1/_4$ y $P(A \cup B) = 1/_2$,

calcúlese razonadamente: a) $P(A \cap B)$ b) $P(B)$ c) $P\left(\bar{B}/_A\right)$ d) $P\left(\bar{A}/_{\bar{B}}\right)$

a) $P(B/_A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/_A) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

b) $P(B) = -P(A) + P(A \cap B) + P(A \cup B) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-4+1+6}{12} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$

c) $P(\bar{B}/_A) = \dfrac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{1/3 - 1/12}{1/3} = \dfrac{1/4}{1/3} = \dfrac{3}{4}$

d) $P(\bar{A}/_{\bar{B}}) = \dfrac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \dfrac{1 - 1/2}{1 - 1/4} = \dfrac{1/2}{3/4} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

7. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A \cap B) = 0'1$, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0'6$ y $P(A/B) = 0'5$. Calcúlese: a) $P(B)$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(A)$ d) $P\left(\overline{B}/\overline{A}\right)$

a) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \dfrac{0'1}{0'5} = \dfrac{1}{5} = 0'2$

b) $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0'6 = 0'4$

c) $P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 0'4 - 0'2 + 0'1 = 0'1$

d) $P(\overline{B}/\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \dfrac{0'6}{1 - 0'1} = \dfrac{0'6}{0'9} = \dfrac{2}{3} = 0'\overline{6}$