

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

① Completa en tu cuaderno la siguiente tabla referida a la equivalencia de ángulos en los distintos sistemas de medida.



Vamos a hacer las equivalencias y después las vamos introduciendo en la tabla, teniendo en cuenta que:

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$$

- 1) Como 180° son π rad, 90° que son la mitad serán $\pi/2$ rad.
- 2) Aunque en este es muy fácil razonar como en el anterior ($1/4$ es la mitad de $1/2$) para este tipo de ejercicios en que se nos da el ángulo en radianes en función de π , lo más rápido es sustituir π rad por 180° :

$$\frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

- 3) Ahora resolvemos una sencilla proporción: $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{120^\circ}{x} \Leftrightarrow x = \frac{120\pi}{180} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}.$

- 4) $\frac{3\pi}{2} \text{ rad} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ.$

- 5) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{225^\circ}{x} \Leftrightarrow x = \frac{225\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}.$

- 6) $\frac{4\pi}{3} \text{ rad} = \frac{4 \cdot 180^\circ}{3} = 240^\circ.$

- 7) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{39^\circ 42'}{x} \Leftrightarrow x = \frac{39^\circ 42' \pi}{180} \text{ rad} = 0,693 \text{ rad}$

- 8) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x}{1 \text{ rad}} \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{\pi} = 57,29578^\circ = 57^\circ 17' 44''.$

- 9) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{135^\circ 22' 42''}{x} \Leftrightarrow x = \frac{135^\circ 22' 42'' \pi}{180} \text{ rad} = 2,36 \text{ rad}.$

- 10) $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{x}{2,5} \Leftrightarrow x = \frac{2,5 \cdot 180^\circ}{\pi} = 143,23945^\circ = 143^\circ 14'.$

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)
90°	45°	120°	270°	225°	240°	39° 42'	57°17'44''	135°22'42''	143°14'
$\pi/2$ rad	$\pi/4$ rad	$2\pi/3$ rad	$3\pi/2$ rad	$5\pi/4$ rad	$4\pi/3$ rad	0,693 rad	1 rad	2,36 rad	2,5 rad

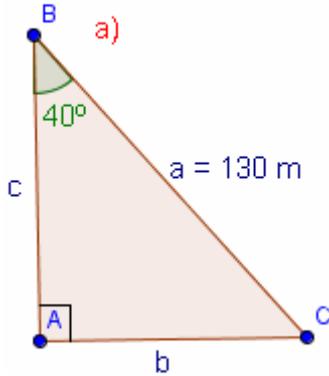


② Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



Resolver un triángulo es conocer la amplitud de sus tres ángulos y la longitud de sus tres lados. Como son triángulos rectángulos, la suma de los ángulos agudos ha de ser 90° .

a) Como $\hat{B} = 40^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$



Para hallar las longitudes de los lados debemos usar, siempre que sea posible, datos del problema y no valores calculados para evitar acumular errores por aproximaciones sucesivas.

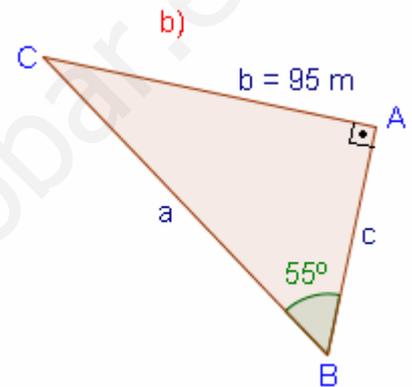
Del ángulo conocido \hat{B} , sabemos la hipotenusa (a) y hemos de hallar el cateto opuesto, b, (usamos el seno) y el cateto contiguo, c, (usamos el coseno):

$$\begin{cases} \text{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow b = a \cdot \text{sen}\hat{B} = 130\text{m} \cdot \text{sen}40^\circ \cong 83,56 \text{ m} \\ \text{cos}\hat{B} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow c = a \cdot \text{cos}\hat{B} = 130\text{m} \cdot \text{cos}40^\circ \cong 99,59 \text{ m} \end{cases}$$

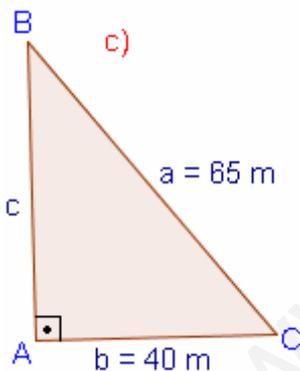
b) Como $\hat{B} = 55^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$

Como conocemos el cateto opuesto a \hat{B} , para hallar la hipotenusa (a) usamos el seno y para calcular el cateto contiguo (c) usamos la tangente:

$$\begin{cases} \text{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{95 \text{ m}}{\text{sen}55^\circ} = 115,97 \text{ m} \\ \text{tg}\hat{B} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow c = \frac{b}{\text{tg}\hat{B}} = \frac{95 \text{ m}}{\text{tg}55^\circ} = 66,92 \text{ m} \end{cases}$$



c) En este triángulo conocemos la hipotenusa, a, y uno de los catetos, b, pero ningún ángulo, el cateto que nos falta es fácil de hallar, usamos el teorema de Pitágoras:



$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{65^2 - 40^2} = \sqrt{2625} \cong 51,23 \text{ m}$$

¿Cómo hallamos los dos ángulos que nos faltan?. Si somos capaces de calcular uno de los dos sabremos el otro ya que son complementarios (suman 90°). Hallemos \hat{B} , ¿qué razón trigonométrica de \hat{B} relaciona la hipotenusa, a, con el cateto opuesto, b?, pues el seno, luego nos basta con calcular el ángulo cuyo seno es un valor conocido (b/a):

$$\text{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \hat{B} = \text{arc sen}\left(\frac{b}{a}\right) = \text{arc sen}\left(\frac{40}{65}\right) = \text{arc sen}(0,6153846) = 37^\circ 58' 46''$$

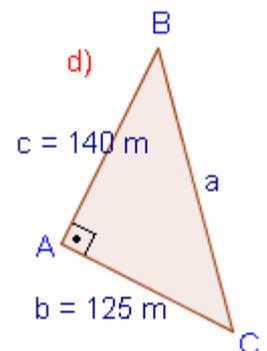
Conocido \hat{B} , sabemos que $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 37^\circ 58' 46'' = 52^\circ 1' 14''$

d) Es similar al anterior pues conocemos dos lados pero ningún ángulo.

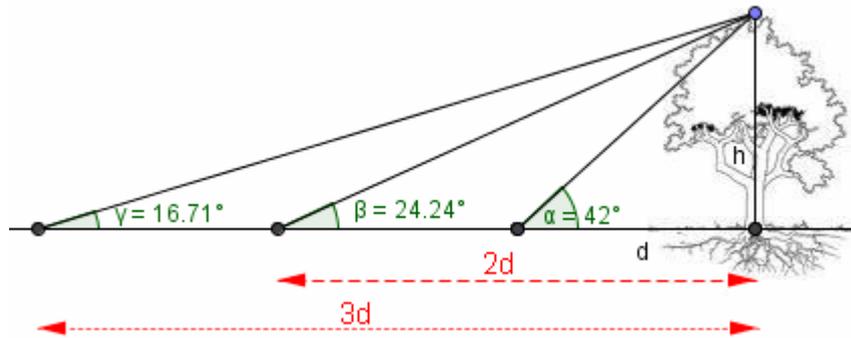
$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{125^2 + 140^2} \cong 187,68 \text{ m}$$

$$\text{tg}\hat{B} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \hat{B} = \text{arc tg}\left(\frac{b}{c}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{125}{140}\right) = 41^\circ 45' 37''$$

Luego $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 41^\circ 45' 37'' = 48^\circ 14' 23''$



③ Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42° . ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia doble? ¿y colocándose a distancia triple?

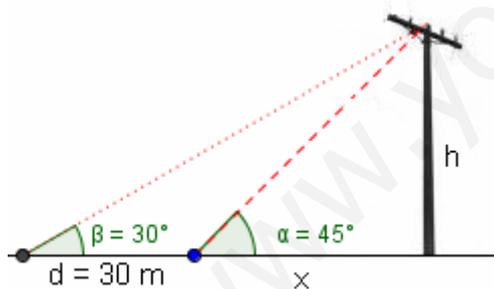


El ángulo bajo el que se ve el árbol a una distancia d es $\alpha = 42^\circ$, luego escribiendo las tangentes de los desconocidos en función de la tangente del ángulo α podemos hallarlos:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}42^\circ = \frac{h}{d} \\ \operatorname{tg}\beta = \frac{h}{2d} = \frac{1}{2} \frac{h}{d} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg}42^\circ = 0,450202 \Rightarrow \beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg}0,450202 = 24^\circ 14' 14'' \\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{h}{3d} = \frac{1}{3} \frac{h}{d} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} \operatorname{tg}42^\circ = 0,3001346 \Rightarrow \gamma = \operatorname{arc} \operatorname{tg}0,3001346 = 16^\circ 42' 22'' \end{cases}$$



④ Calcula la altura de un poste, sabiendo que desde un cierto punto del suelo se ve este con un ángulo de 30° y, si nos acercamos 30 m, lo vemos con un ángulo de 45° .



Se trata de un ejercicio clásico de los denominados “de doble observación”, para resolverlos planteamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a partir de la tangente de los dos ángulos conocidos:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = x \operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{tg}\beta = \frac{h}{x+d} \Leftrightarrow h = (x+d) \operatorname{tg}\beta \end{cases} \quad \text{si resolvemos este sistema tendremos}$$

x y h , igualando h tenemos una ecuación en x , que resolvemos:

$$x \operatorname{tg}\alpha = (x+d) \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow x \operatorname{tg}\alpha = x \operatorname{tg}\beta + d \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow x \operatorname{tg}\alpha - x \operatorname{tg}\beta = d \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow x(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = d \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow x = \frac{d \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} \text{ y sustituyendo}$$

este valor de x en la primera igualdad para h , tenemos:

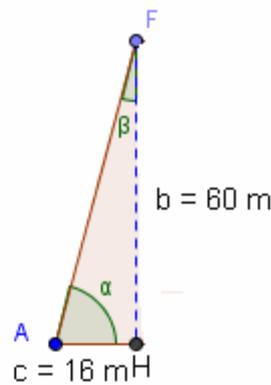
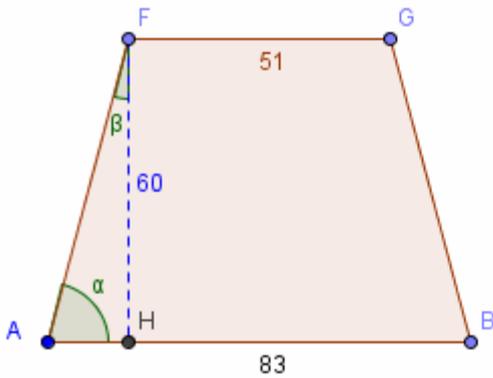
$$h = x \operatorname{tg}\alpha = \frac{d \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{d \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{30 \operatorname{m} \cdot \operatorname{tg}45^\circ \cdot \operatorname{tg}30^\circ}{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}30^\circ} \cong 40,98 \text{ m mide el poste.}$$

Si tienes dificultades para operar con variables, sustituye valores al igualar h :

$$x \operatorname{tg}\alpha = (x+d) \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow x \operatorname{tg}45^\circ = (x+30) \operatorname{tg}30^\circ \Leftrightarrow x = (x+30) \cdot 0,577 \Leftrightarrow x = 0,577x + 17,32; \text{ etc.}$$



5) Calcula los ángulos de un trapecio isósceles de altura 60 m cuyas bases miden 83 y 51 m.



Se trata de hallar el ángulo $\alpha = \hat{A} = \hat{B}$, ya que conocido α , sabemos $\beta = 90^\circ - \alpha$, y por tanto los ángulos $\hat{F} = \hat{G} = 90^\circ + \beta = 90^\circ + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$.

Para hallar el ángulo α , usamos el triángulo rectángulo AHF, en donde conocemos los dos catetos, la altura $b = 60$ m y $AH = c = \frac{AB - FG}{2} = \frac{83 - 51}{2} = 16$ m:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{b}{c} \right) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{60\text{m}}{16\text{m}} \right) =$$

$75^\circ 4' 6,9''$, luego $\hat{F} = \hat{G} = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - (75^\circ 4' 6,9'') = 104^\circ 55' 54,1''$

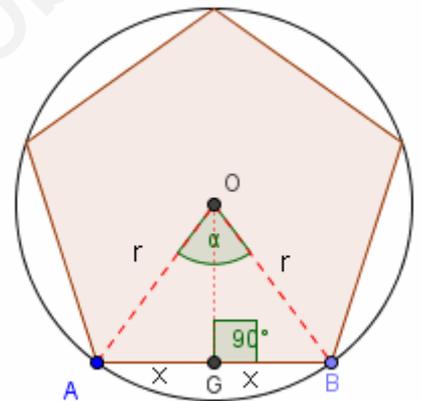


6) Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de diámetro.

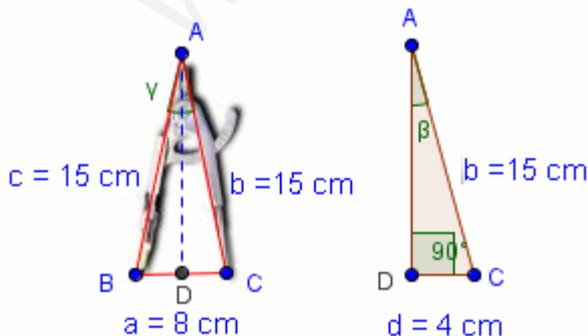


Para conocer el perímetro, $p = 5L$, hemos de hallar la longitud del lado, $L = 2x$. Partimos del triángulo rectángulo OGB, como los 360° grados de una circunferencia están divididos en 5 partes iguales, el ángulo $\alpha = 360^\circ/5 = 72^\circ$, su mitad es la amplitud del ángulo con vértice en O del triángulo OGB, que llamamos $\beta = 36^\circ$. De ese ángulo, en el triángulo rectángulo OGB, conocemos la hipotenusa $r = 30$ cm y queremos calcular el cateto opuesto x , utilizamos, pues, el seno de β :

$\operatorname{sen} \beta = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \operatorname{sen} \beta = 30\text{cm} \cdot \operatorname{sen} 36^\circ \cong 17,63$ cm, luego el lado del pentágono es $L = 2x = 2 \cdot 17,63 = 35,24$ cm y su perímetro $p = 5 \cdot L = 5 \cdot 35,24$ cm = 176,2 cm.



7) Si las puntas de un compás distan 8 cm y cada rama mide 15 cm, ¿qué ángulo forman?



Las ramas del compás forman un triángulo isósceles, si tomamos si trazamos la altura AD y tomamos el triángulo rectángulo ADC:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{d}{b} \Rightarrow \beta = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{d}{b} \right) = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{4\text{cm}}{15\text{cm}} \right) = 15^\circ 27' 57''$$

Luego el ángulo pedido será el doble $\gamma = 2\beta = 2 \cdot 15^\circ 27' 57'' = 30^\circ 55' 54''$.



Ⓜ Sabiendo que $\cos \alpha = -5/12$ y que el ángulo está en el segundo cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.



Despejamos el seno de la ecuación fundamental de la trigonometría $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$:

$\text{sen} \alpha = \sqrt{1 - \text{cos}^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \sqrt{\frac{119}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12}$ en al estar en el 2º cuadrante hemos tomado el valor positivo de la raíz ya que en ese cuadrante el seno es positivo. El resto de las razones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} = \frac{\sqrt{119}/12}{-5/12} = -\frac{\sqrt{119}}{5} \\ \text{sec} \alpha = \frac{1}{\text{cos} \alpha} = \frac{1}{-5/12} = -\frac{12}{5} \\ \text{cosec} \alpha = \frac{1}{\text{sen} \alpha} = \frac{1}{\sqrt{119}/12} = \frac{12}{\sqrt{119}} = \frac{12\sqrt{119}}{119} \\ \text{cot} \alpha = \frac{1}{\text{tg} \alpha} = \frac{\text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha} = -\frac{5\sqrt{119}}{119} \end{array} \right.$$



Ⓜ Sabiendo que $\text{tg} x = 3$ y que $180^\circ < x < 270^\circ$, calcula las demás ángulos razones trigonométricas.



Podemos resolverlo de dos formas:

1) Usando una de las ecuaciones de la trigonometría $1 + \text{tg}^2 \alpha = \text{sec}^2 \alpha$:

$\text{sec} \alpha = -\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} = -\sqrt{1 + 3^2} = -\sqrt{10} \Rightarrow \text{cos} \alpha = \frac{1}{\text{sec} \alpha} = \frac{1}{-\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ tomamos el valor negativo de la raíz ya que en el tercer cuadrante ambas razones trigonométricas son negativas.

Ahora hallamos las demás:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} \leftarrow \text{sen} \alpha = \text{cos} \alpha \cdot \text{tg} \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \text{cosec} \alpha = \frac{1}{\text{sen} \alpha} = \frac{1}{-\frac{3\sqrt{10}}{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{3} \\ \text{cot} \alpha = \frac{1}{\text{tg} \alpha} = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

2) Formando un sistema con la definición de la tangente y la ecuación fundamental:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} \\ \text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{sen} \alpha = \text{cos} \alpha \cdot \text{tg} \alpha = 3 \text{cos} \alpha \Rightarrow 9 \text{cos}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow 10 \text{cos}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \text{cos} \alpha = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

que es el valor obtenido por el primer método.



ⓂⓂ Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo A cuya tangente es positiva y $\text{sen} A = -3/5$



Si la tangente es positiva y el seno negativo es porque estamos en el tercer cuadrante, es decir $180^\circ < A < 270^\circ$.

Despejamos el coseno de la ecuación fundamental de la trigonometría $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$:

$\text{cos} \alpha = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$ en al estar en el 3^{er} cuadrante hemos tomado el valor negativo de la raíz ya que en ese cuadrante el coseno es negativo. El resto de las razones son:

$$\begin{cases} \text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4} \\ \text{sec} \alpha = \frac{1}{\text{cos} \alpha} = \frac{1}{-4/5} = -\frac{5}{4} \\ \text{cosec} \alpha = \frac{1}{\text{sen} \alpha} = \frac{1}{-3/5} = -\frac{5}{3} \\ \text{cotg} \alpha = \frac{1}{\text{tg} \alpha} = \frac{\text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha} = \frac{4}{3} \end{cases}$$



ⓁⓁ Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\frac{1 + \text{tg}^2 \alpha}{1 + \text{cotg}^2 \alpha} \stackrel{(1)}{=} \frac{1 + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha}}{1 + \frac{\text{cos}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha}} \stackrel{(2)}{=} \frac{\frac{\text{cos}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha}}{\frac{\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha}} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\text{cos}^2 \alpha} \cdot \frac{\text{sen}^2 \alpha}{1} = \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \text{tg}^2 \alpha$

- (1) Sustituyendo $\text{tg} \alpha = \text{sen} \alpha / \text{cos} \alpha$ y $\text{cotg} \alpha = \text{cos} \alpha / \text{sen} \alpha$.
- (2) Al sumar las fracciones del numerador y denominador.
- (3) Según la ecuación fundamental de la trigonometría $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$.

b) $\frac{\text{cos}^2 \alpha}{1 + \text{sen} \alpha} \stackrel{(1)}{=} \frac{1 - \text{sen}^2 \alpha}{1 + \text{sen} \alpha} \stackrel{(2)}{=} \frac{(1 + \text{sen} \alpha) \cdot (1 - \text{sen} \alpha)}{1 + \text{sen} \alpha} \stackrel{(3)}{=} 1 - \text{sen} \alpha$

- (1) Sustituyendo $\text{cos}^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$ despejado de la ecuación $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$.
- (2) Aplicamos el producto notable $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$, una diferencia de cuadrados es suma por diferencia.
- (3) Simplificamos el factor común al numerador y denominador $(1 + \text{sen} \alpha)$.

c) $\frac{\text{cos}^2 \alpha (1 + \text{tg}^2 \alpha)}{\text{cotg} \alpha} = \frac{\text{cos}^2 \alpha \left(1 + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha}\right)}{\frac{\text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha}} = \frac{\text{cos}^2 \alpha \left(\frac{\text{cos}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha}\right)}{\frac{\text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha}} = \frac{\text{cos}^2 \alpha \left(\frac{1}{\text{cos}^2 \alpha}\right)}{\frac{\text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha}} = \frac{1}{\frac{\text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha}} = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} = \text{tg} \alpha$

d) $\text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha \cdot (\text{tg} \alpha + \text{cotg} \alpha) = \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha \cdot \left(\frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha} + \frac{\text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha}\right) = \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha \cdot \left(\frac{\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha}{\text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha}\right) = 1$.

e) $\text{sen}^3 \alpha + \text{sen} \alpha \cdot \text{cos}^2 \alpha = \text{sen} \alpha (\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha) = \text{sen} \alpha$.

f) $\text{cos}^3 \alpha + \text{sen}^3 \alpha + \text{cos}^2 \alpha \cdot \text{sen} \alpha + \text{cos} \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha \stackrel{(1)}{=} \text{cos} \alpha (\text{cos}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha) + \text{sen} \alpha (\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha) \stackrel{(2)}{=} \text{sen} \alpha + \text{cos} \alpha$.

- (1) Extrayendo factor común al $\text{cos} \alpha$ en el primero y cuarto términos y al $\text{sen} \alpha$ en el 2º y 3º.

(2) Ya que las expresiones entre paréntesis son la ecuación fundamental de la trigonometría, $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$.

$$g) \frac{\text{sen}^2 \alpha}{1 + \text{cos} \alpha} \stackrel{(1)}{=} \frac{1 - \text{cos}^2 \alpha}{1 + \text{cos} \alpha} \stackrel{(2)}{=} \frac{(1 + \text{cos} \alpha) \cdot (1 - \text{cos} \alpha)}{1 + \text{cos} \alpha} \stackrel{(3)}{=} 1 - \text{cos} \alpha$$

(1) Sustituyendo $\text{sen}^2 \alpha = 1 - \text{cos}^2 \alpha$ despejado de la ecuación $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$.

(2) Aplicamos el producto notable $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$, una diferencia de cuadrados es suma por diferencia.

(3) Simplificamos el factor común al numerador y denominador $(1 + \text{cos} \alpha)$.

$$h) \frac{\sec \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{\text{cos} \alpha}}{1 + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha}} = \frac{\frac{1}{\text{cos} \alpha}}{\frac{\text{cos}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha}} = \frac{\frac{1}{\text{cos} \alpha}}{\frac{1}{\text{cos}^2 \alpha}} = \frac{\text{cos}^2 \alpha}{\text{cos} \alpha} = \text{cos} \alpha.$$

$$i) \text{tg}^2 \alpha - \text{tg}^2 \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha = \text{tg}^2 \alpha (1 - \text{sen}^2 \alpha) = \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} \cdot \text{cos}^2 \alpha = \text{sen}^2 \alpha.$$

$$j) \text{sen}^4 \alpha - \text{cos}^4 \alpha = (\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha) \cdot (\text{sen}^2 \alpha - \text{cos}^2 \alpha) = \text{sen}^2 \alpha - \text{cos}^2 \alpha = -\text{cos} 2\alpha = 1 - 2\text{cos}^2 \alpha.$$



12 Determina, sin hacer uso de la calculadora, las siguiente razones trigonométricas:

$$a) \text{sen} 120^\circ = \text{sen}(180^\circ - 60^\circ) = \text{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b) \text{sen} 1215^\circ = \text{sen}(3 \cdot 360^\circ + 135) = \text{sen}(135^\circ) = \text{sen}(180^\circ - 45^\circ) = \text{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$c) \text{cos} 210^\circ = \text{cos}(180^\circ + 30^\circ) = -\text{cos} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

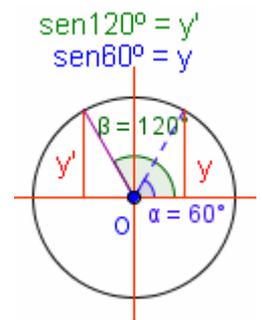
$$d) \text{tg}(-60^\circ) = \text{tg}(360^\circ - 60^\circ) = -\text{tg} 60^\circ = -\frac{\text{sen} 60^\circ}{\text{cos} 60^\circ} = -\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3}.$$

$$e) \text{tg} 300^\circ = \text{tg}(360^\circ - 60^\circ) = -\text{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$f) \sec \frac{23\pi}{6} = \sec \frac{23 \cdot 180^\circ}{6} = \sec 690^\circ = \sec(360^\circ + 330^\circ) = \sec 330^\circ = \sec(360^\circ - 30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{1}{\text{cos} 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$g) \text{cotg} 225^\circ = \text{cotg}(180^\circ + 45^\circ) = \text{cotg} 45^\circ = \frac{\text{cos} 45^\circ}{\text{sen} 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1.$$

$$h) \text{cosec} \frac{29\pi}{4} = \text{cosec} \frac{29 \cdot 180^\circ}{4} = \text{cosec} 1305^\circ = \text{cosec}(3 \cdot 360^\circ + 225^\circ) = \text{cosec} 225^\circ = \text{cosec}(180^\circ + 45^\circ) = -\text{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



13 Sabiendo que $\text{sen} \alpha = 0,6$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\text{sen}(180^\circ - \alpha)$ | c) $\text{cos}(180^\circ + \alpha)$ | e) $\text{cos}(90^\circ - \alpha)$ |
| b) $\text{tg}(90^\circ + \alpha)$ | d) $\text{sen}(270^\circ + \alpha)$ | f) $\text{cotg}(360^\circ - \alpha)$ |

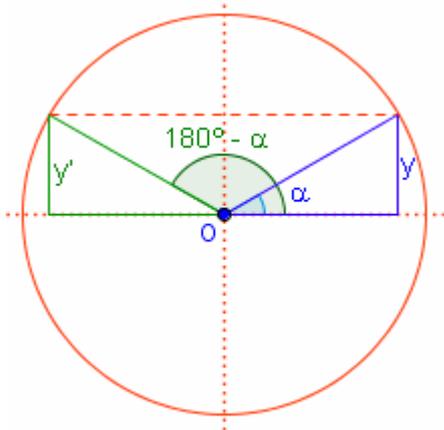


Hallamos primero el coseno y la tangente de α :

Despejamos el coseno de la ecuación fundamental de la trigonometría $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ y luego hallamos la tangente:

$$\text{cos } \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - (0,6)^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8 \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$$

a) $\text{sen}(180^\circ - \alpha)$



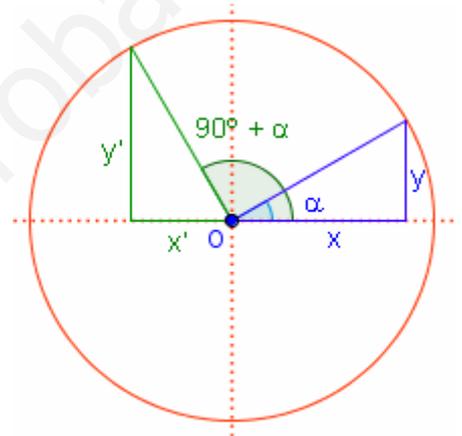
Como vemos en el dibujo adjunto $\text{sen } \alpha = y$, $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = y'$, además como los triángulos azul y verde son iguales $y = y'$ luego:

$$\text{sen}(180^\circ - \alpha) = y' = y = \text{sen } \alpha = 0,6.$$

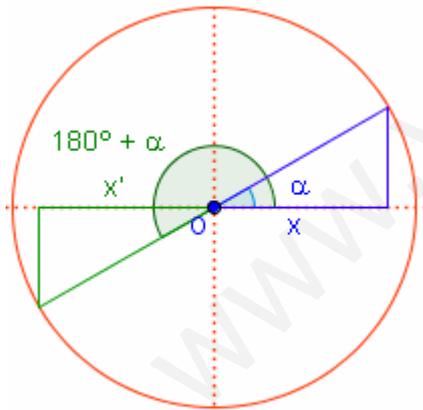
b) $\text{tg}(90^\circ + \alpha)$

$$\text{tg}(90^\circ + \alpha) = \frac{\text{sen}(90^\circ + \alpha)}{\text{cos}(90^\circ + \alpha)} = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = \frac{\text{cos } \alpha}{-\text{sen } \alpha} = -\text{cot } \alpha = -\frac{4}{3}$$

ya que ahora $x = y'$ (x hacia la derecha e y hacia arriba) pero $x' = -y$ y pues x' es negativo.



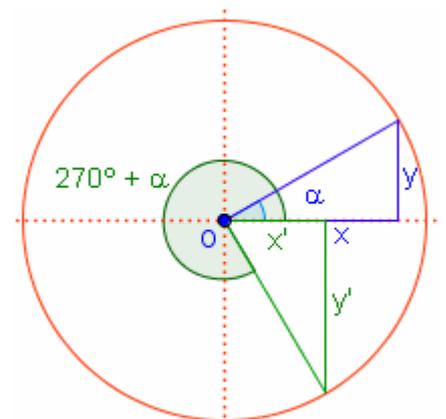
c) $\text{cos}(180^\circ + \alpha)$



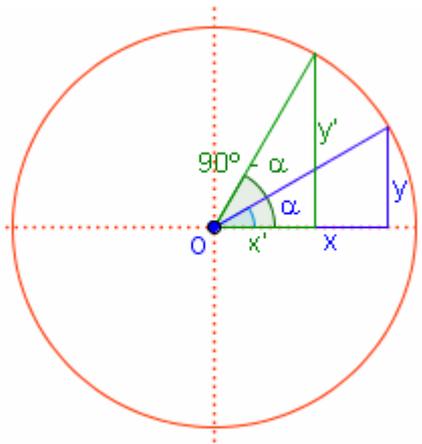
$\text{cos}(180^\circ + \alpha) = x' = -x = -\text{cos } \alpha = -0,8$, como puede verse en el dibujo de la izquierda, el $\text{cos}(180^\circ + \alpha)$ es la longitud de x' que es opuesto a x ya que los triángulos azul y verde son iguales (son rectángulos y los ángulos opuestos por el vértice son iguales α , y la hipotenusa el el radio de la circunferencia goniométrica ($R = 1$) y x es el valor del $\text{cos } \alpha$.

d) $\text{sen}(270^\circ + \alpha)$

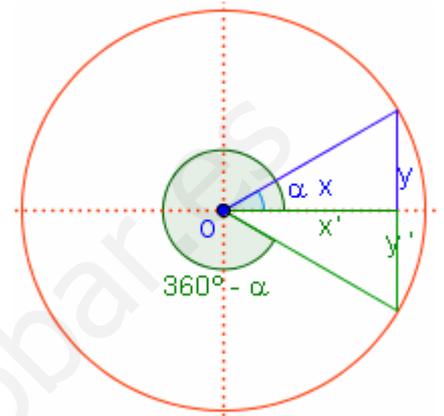
$\text{sen}(270^\circ + \alpha) = y' = -x = -\text{cos } \alpha$, ya que el seno siempre se representa en vertical (y') y, como puede verse en el dibujo de la derecha el cateto grande en triángulo azul es x y en el verde es y' , de la misma longitud pero de signo opuesto.



e) $\text{cos}(90^\circ - \alpha)$



$$\cos(90^\circ - \alpha) = x' = y = \operatorname{sen} \alpha.$$



f) $\cotg(360^\circ - \alpha)$

$$\cotg(360^\circ - \alpha) = \frac{\cos(360^\circ - \alpha)}{\operatorname{sen}(360^\circ - \alpha)} = \frac{x'}{y'} = \frac{x}{-y} = \frac{\cos \alpha}{-\operatorname{sen} \alpha} = -\cotg \alpha$$



①④ Demuestra, de forma razonada, si son o no ciertas las siguientes igualdades:

Para demostrar la veracidad o falsedad de estas igualdades podemos partir de uno de los miembros y realizar transformaciones matemáticas hasta obtener el otro miembro de la igualdad o operar con los dos miembros hasta obtener expresiones que sean inequívocamente iguales o distintas.

a) $\frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{\cotg a + \cotg b} \stackrel{(1)}{=} \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{\frac{1}{\operatorname{tga}} + \frac{1}{\operatorname{tgb}}} \stackrel{(2)}{=} \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{\frac{\operatorname{tgb} + \operatorname{tga}}{\operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{1} = \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}$, luego es cierta.

- (1) Sustituimos las cotangentes como inversas de las tangentes respectivas.
- (2) Sumamos las fracciones del denominador.
- (3) Simplificamos el factor $(\operatorname{tga} + \operatorname{tgb})$ en el cociente.

b) $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x \stackrel{(1)}{=} (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \cdot (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) \stackrel{(2)}{=} \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$, luego es verdadera.

- (1) Ya que una diferencia de cuadrados es suma por diferencia $(a^4 - b^4) = (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2)$.
- (2) La ecuación fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

c) $\frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (1 - \operatorname{sen} \alpha) \cdot (1 + \operatorname{sen} \alpha) = \cos^2 \alpha \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, igualdad evidente.

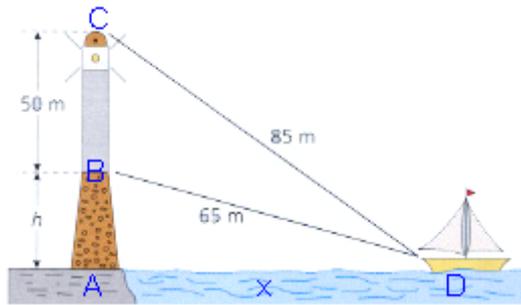
- (1) Multiplicando en cruz, quitando denominadores.
- (2) De nuevo el producto notable suma por diferencia que es diferencia de cuadrados.

d) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \stackrel{(1)}{=} \operatorname{tg}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \stackrel{(2)}{=} \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x \stackrel{(3)}{=} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x \stackrel{(4)}{=} \operatorname{sen}^2 x$, es cierta.

- (1) Extraemos factor común a $\operatorname{tg}^2 x$.
- (2) Sustituimos $1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$, de acuerdo con la ecuación fundamental.
- (3) Sustituimos la tangente por su cociente entre el seno y el coseno.
- (4) Simplificamos $\cos^2 x$ del numerador y denominador.



15 En la figura aparece dibujado un faro de 50 m de altura situado sobre un promontorio. Las respectivas distancias desde los extremos superior e inferior del faro a un barco son de 85 y 65 m. Halla la altura del promontorio.



Aplicamos el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos BAD y CAD:

$$\begin{cases} \triangle BAD \Rightarrow \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow 65^2 = h^2 + x^2 \\ \triangle CAD \Rightarrow \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow 85^2 = (50+h)^2 + x^2 \end{cases}$$

Si, ahora resolvemos el sistema anterior, por cualquier método obtenemos las incógnitas x y h. Vamos a resolverlo por reducción cambiando de signo la primera y sumando:

$$\begin{cases} -4225 = -h^2 - x^2 \\ 7225 = (50+h)^2 + x^2 \end{cases} \text{ con lo que tenemos una ecuación en h que resolvemos: } 3\,000 = 2\,500 + 100h + 3000 = (50+h)^2 - h^2$$

$$h^2 - h^2 \Leftrightarrow 3\,000 - 2\,500 = 100h \Leftrightarrow 500 = 100h \Leftrightarrow h = 500/100 = 5 \text{ m, mide el promontorio.}$$

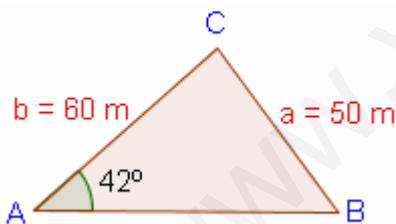


16 Resuelve cada uno de los siguientes triángulos:



No son triángulos rectángulos luego ahora hemos de utilizar los **teoremas del seno y del coseno**.

a)



Primero utilizamos el **teorema del seno** para hallar el ángulo \hat{B} :

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \Leftrightarrow \text{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \cdot \text{sen}\hat{A} = \frac{60\text{m}}{50\text{m}} \cdot \text{sen}42^\circ = 0,803, \text{ luego } \hat{B} = \text{arc sen } 0,803 = 53^\circ 24' 48''.$$

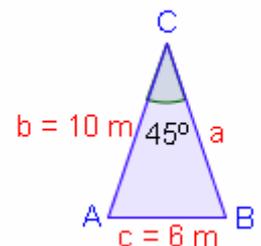
Ahora podemos hallar el ángulo que queda por diferencia hasta los 180° que suman los tres ángulos de cualquier triángulo, $\hat{C} = (180^\circ - \hat{A} - \hat{B}) = 180^\circ - (42^\circ + 53^\circ 24' 48'') = 84^\circ 35' 12''$.

Para hallar el lado c utilizamos de nuevo el **teorema del seno**:

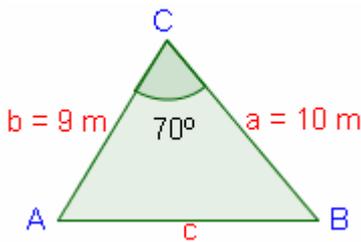
$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \Leftrightarrow c = \frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{A}} \cdot a = \frac{\text{sen}(84^\circ 35' 12'')}{\text{sen}42^\circ} \cdot 50\text{m} = 74,4 \text{ m.}$$

b) Aplicamos el **teorema del seno** para hallar el ángulo \hat{B} :

$\frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \Leftrightarrow \text{sen}\hat{B} = \frac{b}{c} \cdot \text{sen}\hat{C} = \frac{10\text{m}}{6\text{m}} \cdot \text{sen}45^\circ = 1,178$, como el seno del ángulo obtenido es mayor que la unidad (lo que no es posible) deducimos que no puede existir un triángulo con los datos que se proponen, es un triángulo de imposible construcción.



c)



Usamos el **teorema del coseno** para hallar el lado c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}} = \sqrt{10^2 + 9^2 - 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cos 70^\circ} = \sqrt{119,44} = 10,93 \text{ m.}$$

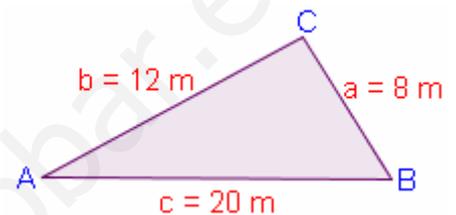
Y, ahora, el del **seno** para hallar el ángulo \hat{B} :

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Leftrightarrow \sin \hat{B} = \frac{b}{c} \cdot \sin \hat{C} = \frac{9 \text{ m}}{10,93 \text{ m}} \cdot \sin 70^\circ = 0,7738, \text{ luego } \hat{B} = \text{arc sen } 0,7738 = 50^\circ 41' 35''.$$

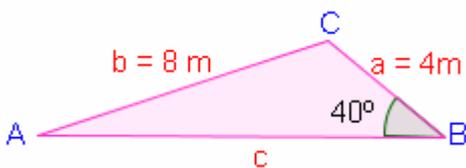
0,7738 = 50° 41' 35".

Por último hallamos el ángulo A por diferencia hasta 180°: $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{C} + \hat{B}) = 180^\circ - (70^\circ + 50^\circ 41' 35'') = 59^\circ 18' 25''$.

d) No hace falta hacer ninguna operación para darse cuenta que es otro triángulo imposible ya que el lado mayor (c = 20 m) no mide más que la suma de los otros dos sino igual (12 + 8 = 20), el dibujo sería un segmento, de 20 m, encima de otro de igual longitud y no como se dibuja.



e)



Teorema del seno:

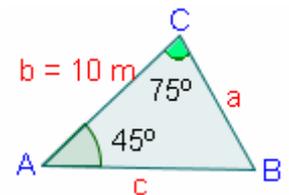
$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{\sin \hat{A}} \Leftrightarrow \sin \hat{A} = \frac{a}{b} \cdot \sin \hat{B} = \frac{4 \text{ m}}{8 \text{ m}} \cdot \sin 40^\circ = 0,3124, \text{ luego el ángulo } \hat{A} = \text{arc sen } 0,3124 = 18^\circ 44' 50'' \text{ y } \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (18^\circ 44' 50'' + 40^\circ) = 121^\circ 15' 10''.$$

Para hallar la longitud del lado utilizamos de nuevo el teorema del seno:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Leftrightarrow c = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} \cdot b = \frac{\sin(121^\circ 15' 10'')}{\sin 40^\circ} \cdot 8 \text{ m} = 10,64 \text{ m.}$$

f) $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$

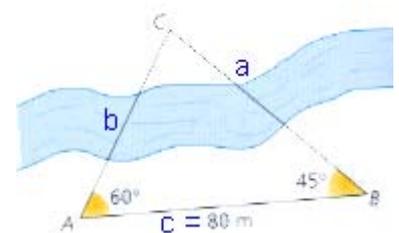
Ahora usando el teorema del seno hallamos la longitud los dos lados a y c que nos quedan:



$$\begin{cases} \frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Leftrightarrow c = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} \cdot b = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot 10 \text{ m} = 10,15 \text{ m.} \\ \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Leftrightarrow a = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} \cdot b = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot 10 \text{ m} = 8,16 \text{ m.} \end{cases}$$



17 Desde dos puntos A y B situados en la misma orilla de un río y distantes entre sí 80 m, se observa un punto C, situado en la orilla opuesta, bajo ángulos de 60° y 45°, respectivamente. Calcula las distancias desde los puntos A y B hasta el punto C.



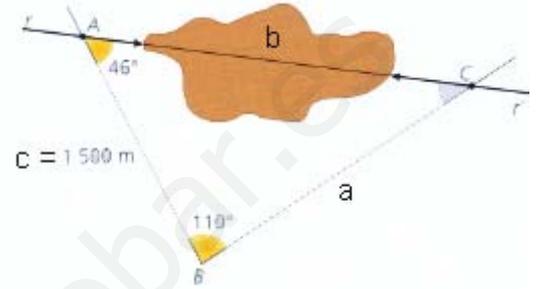
Hallamos primero el ángulo \hat{C} por diferencia hasta 180°:
 $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$

Y ahora usamos el teorema del seno para hallar la longitud de los lados a y b que nos quedan:

$$\begin{cases} \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \Leftrightarrow b = \frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{C}} \cdot c = \frac{\text{sen}45^\circ}{\text{sen}75^\circ} \cdot 80\text{m} = 58,56 \text{ m.} \\ \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \Leftrightarrow a = \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{C}} \cdot c = \frac{\text{sen}60^\circ}{\text{sen}75^\circ} \cdot 80\text{m} = 71,73 \text{ m.} \end{cases}$$



18 La figura muestra la forma de construir un túnel que atraviesa una montaña perforando simultáneamente por ambas caras de la montaña. Fijamos la dirección de perforación ofrecida por r, por lo que el problema consiste en encontrar la dirección de perforación dada por r'. En la práctica, se procede de la forma siguiente: fijamos un punto A en la recta r. Elegimos un ángulo A, por ejemplo 46°, y medimos una distancia AB de 1 500 m, por ejemplo. En B tomamos un ángulo, por ejemplo, de 110°. Con estos datos podemos determinar el ángulo C y la distancia BC. A partir de ambos datos queda determinada la dirección r' de perforación. Calcula estos datos.



Hallamos primero el ángulo \hat{C} por diferencia hasta 180°:

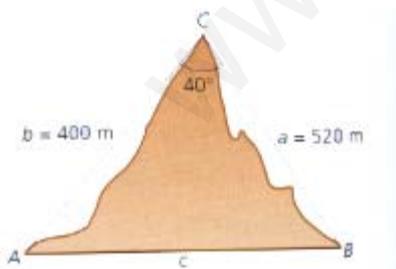
$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (46^\circ + 110^\circ) = 24^\circ$$

Y ahora usamos el **teorema del seno** para hallar la longitud de los lados a y b que nos quedan:

$$\begin{cases} \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \Leftrightarrow b = \frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{C}} \cdot c = \frac{\text{sen}110^\circ}{\text{sen}24^\circ} \cdot 1500\text{m} = 3465,5 \text{ m.} \\ \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \Leftrightarrow a = \frac{\text{sen}\hat{A}}{\text{sen}\hat{C}} \cdot c = \frac{\text{sen}46^\circ}{\text{sen}24^\circ} \cdot 1500\text{m} = 2652,9 \text{ m.} \end{cases}$$



19 La figura muestra el corte transversal de una montaña en la que se quiere construir un túnel. La cima o punto C, visible desde A y B, se encuentra a 400 m de A y 520 m de B, y el ángulo C mide 40°. Calcula la longitud del túnel AB.

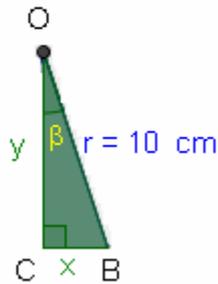
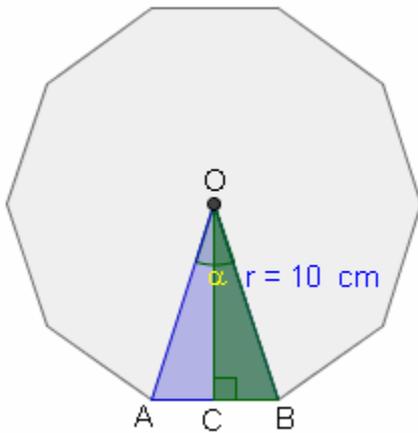


Ahora hemos de utilizar el teorema del coseno pues conocemos dos lados y el ángulo comprendido:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C} \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C}} = \sqrt{520^2 + 400^2 - 2 \cdot 520 \cdot 400 \cdot \cos 40^\circ} = 334,3 \text{ m es la altura de la montaña.}$$



21 Halla el área de un decágono regular circunscrito a una circunferencia de 10 cm de radio.



Llamamos a la apotema $OC = y$ y a la mitad del lado $CB = x$. Como es un decágono regular cada uno de los diez triángulos tendrá un ángulo central $\alpha = 360^\circ/10 = 36^\circ$ y por tanto $\beta = \alpha/2 = 18^\circ$.

En el triángulo OCB hallamos x e y :

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\beta = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cdot \operatorname{sen}\beta = 10\text{cm} \cdot \operatorname{sen}18^\circ = 3,09\text{ cm} \\ \operatorname{cos}\beta = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \cdot \operatorname{cos}\beta = 10\text{cm} \cdot \operatorname{cos}18^\circ = 9,51\text{ cm} \end{cases}$$

El perímetro $= p = 10L = 10 \cdot AB = 20 \cdot CB = 20x = 20 \cdot 3,09\text{cm} = 61,8\text{ cm}$

Luego el área del polígono es:

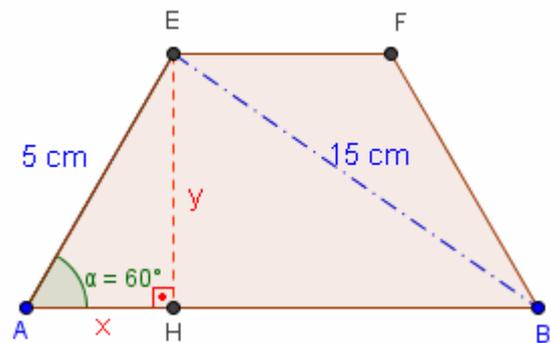
$$A = \frac{p \cdot a_p}{2} = \frac{p \cdot y}{2} = \frac{61,8\text{cm} \cdot 9,51\text{cm}}{2} = 293,86\text{ cm}^2$$



21 En un trapecio isósceles conocemos la diagonal, que mide 15 cm; el lado oblicuo, que mide 5 cm; y el ángulo que este forma con la base mayor, que es de 60° . Halla el área del trapecio.



Como el área de un trapecio es la semisuma de las bases por la altura necesitamos hallar las longitudes de las bases, la mayor $B = AB$ y la menor $b = EF$, y la altura $y = EH$.



En el triángulo rectángulo AHE hallamos x e y :

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{AE} \Leftrightarrow y = \overline{AE} \cdot \operatorname{sen}\alpha = 5\text{ cm} \cdot \operatorname{sen}60^\circ = 4,33\text{ cm} \\ \operatorname{cos}\alpha = \frac{x}{AE} \Leftrightarrow x = \overline{AE} \cdot \operatorname{cos}\alpha = 5\text{ cm} \cdot \operatorname{cos}60^\circ = 2,5\text{ cm} \end{cases}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo EHB , tenemos:

$$\overline{EB}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{HB}^2 \Leftrightarrow \overline{HB} = \sqrt{\overline{EB}^2 - \overline{EH}^2} = \sqrt{15^2 - 4,33^2} = 14,36\text{ cm}$$

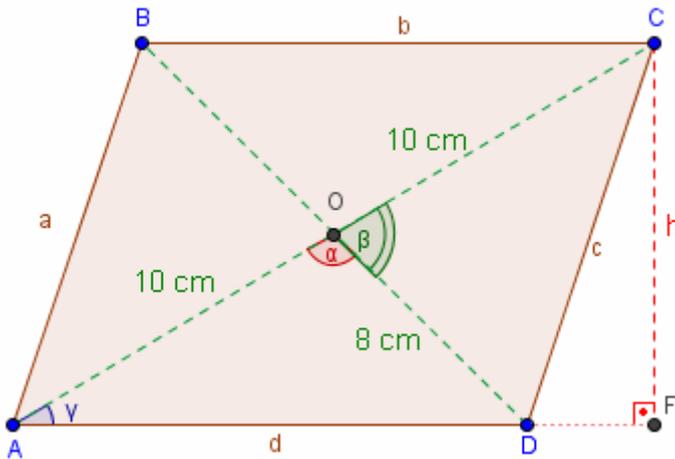
Base mayor $= B = AB = AH + HB = x + HB = 2,5 + 14,36 = 16,86\text{ cm}$

Base menor $= b = EF = AB - 2AH = HB - x = 14,36 - 2,5 = 11,86\text{ cm}$

Luego el área pedida: $A = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{B+b}{2} \cdot y = \frac{16,86\text{cm} + 11,86\text{cm}}{2} \cdot 4,33\text{cm} = 62,18\text{ cm}^2$



②② Las diagonales de un paralelogramo miden 20 y 16 cm, respectivamente, y uno de los ángulos que forman al cortarse mide 120°. Halla el área y el perímetro del mismo.



$$AO = OC = AC/2 = 20 \text{ cm}/2 = 10 \text{ cm}$$

$$DO = OB = BD/2 = 16 \text{ cm}/2 = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Si } \alpha = 120^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Hallemos primero las longitudes de los lados, para después calcular su perímetro.

En el triángulo AOD podemos hallar la longitud del lado AD = d aplicando el **teorema del coseno**:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{DO}^2 - 2 \cdot \overline{AO} \cdot \overline{DO} \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow d = \sqrt{10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ} = 15,62 \text{ cm}$$

De manera análoga podemos hallar la longitud del lado DC = c en el triángulo DOC:

$$\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 - 2 \cdot \overline{CO} \cdot \overline{DO} \cdot \cos \beta \Leftrightarrow c = \sqrt{10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ} = 9,17 \text{ cm}$$

Luego el **perímetro** $p = 2d + 2c = 2 \cdot 15,62 \text{ cm} + 2 \cdot 9,17 \text{ cm} = 49,58 \text{ cm}$.

Para hallar el área necesitamos hallar primero la longitud de la altura $h = CF$, para lo cual en el triángulo rectángulo ACF, como conocemos la hipotenusa $AC = 20 \text{ cm}$, para hallar la longitud h sólo hemos de saber el seno del ángulo γ , que calculamos mediante el **teorema del seno** aplicado al triángulo AOD:

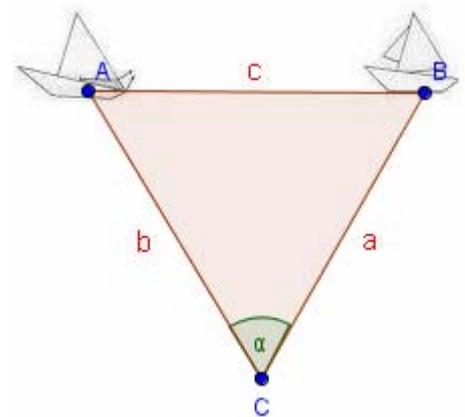
$$\frac{\overline{AD}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{OD}}{\sin \gamma} \Leftrightarrow \sin \gamma = \frac{\overline{OD}}{\overline{AD}} \cdot \sin \alpha = \frac{8 \text{ cm}}{15,62 \text{ cm}} \cdot \sin 120^\circ = 0,4435469$$

$$\text{Ahora en el triángulo ACF: } \sin \gamma = \frac{h}{AC} \Leftrightarrow h = AC \cdot \sin \gamma = 20 \text{ cm} \cdot 0,4435469 \cong 8,87 \text{ cm}$$

Por último, **área** = $A = d \cdot h = 15,62 \text{ cm} \cdot 8,87 \text{ cm} = 138,55 \text{ cm}^2$.



②③ Dos barcos salen de un puerto, y desde un mismo punto, según dos rectas que forman entre sí un ángulo de 60°. Calcula la distancia que los separará al cabo de dos horas de navegación suponiendo que mantienen velocidades constantes de 50 y 65 km/h, respectivamente.



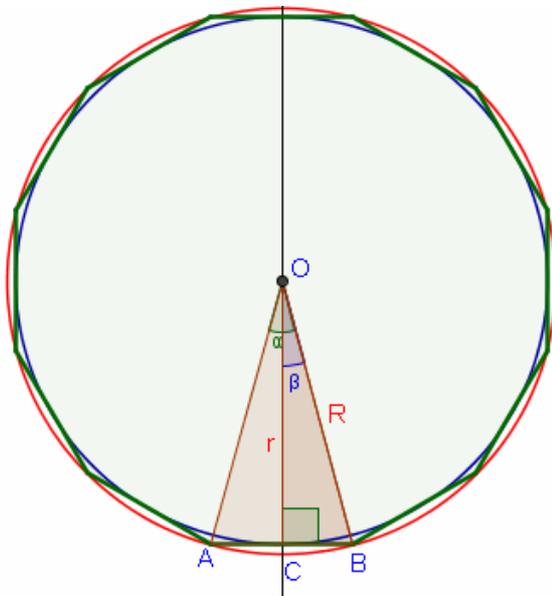
Sabemos que $\alpha = 60^\circ$, que al cabo de 2 hr el barco A estará a $b = 50 \text{ km/hr} \cdot 2 \text{ hr} = 100 \text{ km}$ del puerto y el barco B estará a una distancia $a = 65 \text{ km/hr} \cdot 2 \text{ hr} = 130 \text{ km}$ del puerto.

El problema se reduce, pues a hallar la distancia c a que se encuentran separados los barcos A y B al cabo de dos horas, lo que hacemos aplicando el teorema del coseno al triángulo ABC:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha} = \sqrt{130^2 + 100^2 - 2 \cdot 130 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ} \cong 117,9 \text{ km}$ separan a los dos barcos al cabo de 2 horas.



24) Calcula los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un dodecágono de 6 dm de lado.



Los segmentos $OA = OB = R$ son el radio de la circunferencia circunscrita (dibujada en color rojo) y $OC = r$ el radio de la circunferencia inscrita (en color azul). El segmento AB (lado del dodecágono) mide 6 dm y, por tanto, $AC = CB = 3 \text{ dm}$.

El ángulo $A\hat{O}B = \alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, luego el ángulo

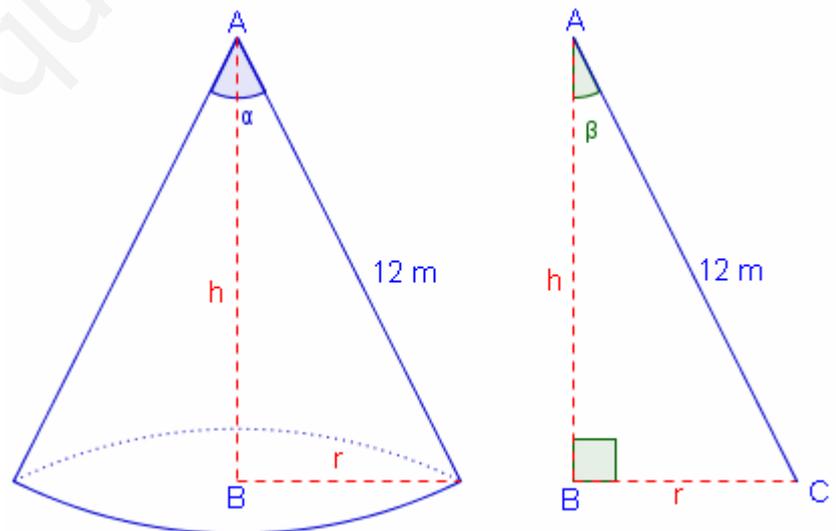
$$\beta = \frac{\alpha}{2} = 15^\circ.$$

Para calcular las longitudes de los radios pedidos nos fijamos en el triángulo rectángulo OCB :

$$\begin{cases} \text{sen} \beta = \frac{CB}{OB} \Leftrightarrow \text{sen} 15^\circ = \frac{3 \text{ dm}}{R} \Leftrightarrow R = \frac{3 \text{ dm}}{\text{sen} 15^\circ} = 11,59 \text{ dm} \\ \text{tg} \beta = \frac{CB}{OC} \Leftrightarrow \text{tg} 15^\circ = \frac{3 \text{ dm}}{r} \Leftrightarrow r = \frac{3 \text{ dm}}{\text{tg} 15^\circ} = 11,2 \text{ dm} \end{cases}$$



25) El ángulo en el vértice de un cono de revolución mide 60° y la generatriz 12 m. Halla el volumen del cono.

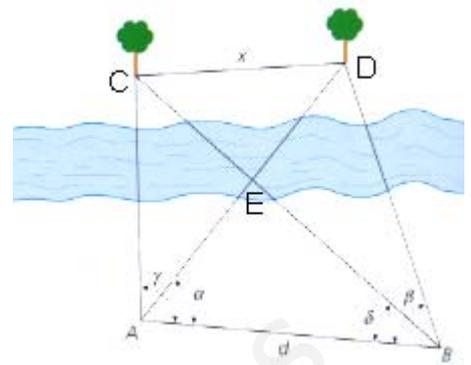


$$\begin{cases} \text{sen} \beta = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow \text{sen} 30^\circ = \frac{r}{12 \text{ m}} \Leftrightarrow r = 12 \text{ m} \cdot \text{sen} 30^\circ = 6 \text{ m} \\ \text{cos} \beta = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \text{cos} 30^\circ = \frac{h}{12 \text{ m}} \Leftrightarrow h = 12 \text{ m} \cdot \text{cos} 30^\circ = 10,39 \text{ m} \end{cases}$$

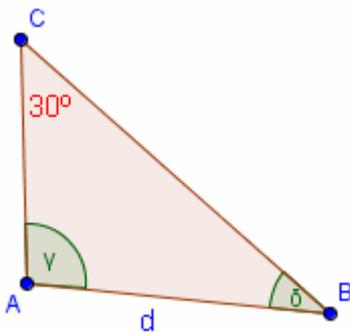
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi (6 \text{ m})^2 \cdot 10,39 \text{ m} = 391,69 \text{ m}^3.$$



②⑥ En la vida real se presentan muchas situaciones en las que se necesita conocer la distancia entre dos puntos inaccesibles. Este problema fue resuelto ya en el año 1615 por el sabio holandés Snellius. En la figura tenemos dos árboles a los que no podemos acceder, porque nos lo impide el río. Desde dos puntos A y B medimos los ángulos α , β , γ y δ , y la distancia d entre ambos puntos. Calcula la distancia x sabiendo que $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 110^\circ$, $\delta = 40^\circ$ y $d = 120$ m.



Para calcular $x = CD$ vamos a usar el triángulo ACD , en donde necesitamos conocer las longitudes de los lados AC y AD y el ángulo $\theta = \gamma - \alpha = 110^\circ - 50^\circ = 60^\circ$.

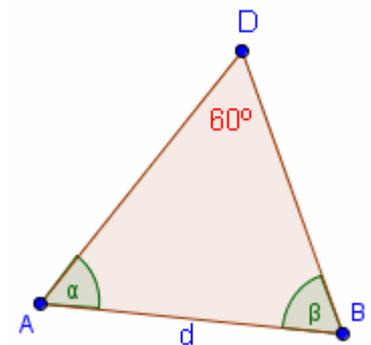


Para calcularla longitud del lado AC partimos del triángulo ACB , primero calculamos el ángulo $\hat{C} = 180^\circ - (\gamma + \delta) = 180^\circ - (110^\circ + 40^\circ) = 30^\circ$ aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen} \delta} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen} \hat{C}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\text{sen} 40^\circ} = \frac{d}{\text{sen} 30^\circ} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{\text{sen} 40^\circ}{\text{sen} 30^\circ} d = \frac{\text{sen} 40^\circ}{\text{sen} 30^\circ} \cdot 120 \text{ m} = 154,27 \text{ m.}$$

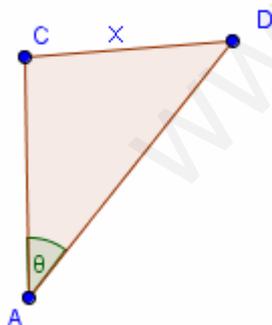
Ahora en el triángulo ADB calculamos la longitud del lado AD , sabiendo que $\hat{D} = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$ y aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen} \hat{D}} = \frac{\overline{AD}}{\text{sen} \beta} \Leftrightarrow \frac{d}{\text{sen} 60^\circ} = \frac{\overline{AD}}{\text{sen} 70^\circ} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{\text{sen} 70^\circ}{\text{sen} 60^\circ} d = \frac{\text{sen} 70^\circ}{\text{sen} 60^\circ} \cdot 120 \text{ m} = 130,21 \text{ m.}$$



Por último aplicando el teorema del coseno al triángulo ACD , calculamos $x = CD$:

$$x = \overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \theta} = \sqrt{154,27^2 + 130,21^2 - 2 \cdot 154,27 \cdot 130,21 \cdot \cos 60^\circ} = 146,91 \text{ m.}$$



ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

① Sabiendo que $\operatorname{sen} a = -12/13$ y $\operatorname{tg} b = 24/7$, y que $270^\circ < a < 360^\circ$ y $180^\circ < b < 270^\circ$, calcula:

- a) $\operatorname{sen}(a + b)$ b) $\operatorname{cos}(a + b)$ c) $\operatorname{tg}(a + b)$.



Hallamos el resto de razones trigonométricas de los ángulos que se nos dan:

Partiendo de $\operatorname{sen} a = -12/13$, a en el cuarto cuadrante:

$$\begin{cases} \operatorname{cos} a = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a} = \sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13} \\ \operatorname{tga} = \frac{\operatorname{sena}}{\operatorname{cosa}} = \frac{-12/13}{5/13} = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

Partiendo de la $\operatorname{tg} b = 24/7$ y b en el tercer cuadrante:

$$1 + \operatorname{tg}^2 b = \operatorname{sec}^2 b \Leftrightarrow \operatorname{sec} b = -\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 b} = -\sqrt{1 + \left(\frac{24}{7}\right)^2} = -\sqrt{1 + \frac{576}{49}} = -\sqrt{\frac{625}{49}} = -\frac{25}{7} \Rightarrow \operatorname{cos} b = \frac{1}{\operatorname{sec} b} = \frac{1}{-25/7} = -\frac{7}{25}$$

$$\operatorname{Como} \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{cos} b} \Rightarrow \operatorname{sen} b = \operatorname{cos} b \cdot \operatorname{tg} b = -\frac{7}{25} \cdot \frac{24}{7} = -\frac{24}{25}$$

Ahora podemos hallar los valores de las razones de ángulos de adición que se nos piden.

$$\text{a) } \operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sena} \cdot \operatorname{cos} b + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{cosa} = -\frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) + \left(-\frac{24}{25}\right) \cdot \frac{5}{13} = \frac{84}{325} - \frac{120}{325} = -\frac{36}{325}$$

$$\text{b) } \operatorname{cos}(a + b) = \operatorname{cosa} \cdot \operatorname{cos} b - \operatorname{sena} \cdot \operatorname{sen} b = \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) - \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \left(-\frac{24}{25}\right) = -\frac{35}{325} - \frac{288}{325} = -\frac{323}{325}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg}(a + b) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(a + b)}{\operatorname{cos}(a + b)} = \frac{-36/325}{-323/325} = \frac{36}{323} \\ \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}} = \frac{-\frac{12}{5} + \frac{24}{7}}{1 - \left(-\frac{12}{5}\right) \cdot \frac{24}{7}} = \frac{36/35}{323/35} = \frac{36}{323} \end{cases} \text{ usando las dos posibilidades.}$$



② Partiendo de las razones trigonométricas de 30° , 45° y 60° , calcula:

- a) $\operatorname{sen} 90^\circ$ b) $\operatorname{cos} 90^\circ$ c) $\operatorname{sen} 120^\circ$ d) $\operatorname{cos} 120^\circ$ e) $\operatorname{tg} 120^\circ$ f) $\operatorname{sen} 105^\circ$ g) $\operatorname{cos} 105^\circ$ h) $\operatorname{tg} 105^\circ$



$$\text{a) } \operatorname{sen}90^\circ = \begin{cases} \operatorname{sen}(30^\circ+60^\circ) = \operatorname{sen}30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \cdot \operatorname{sen}60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ \operatorname{sen}(2 \cdot 45^\circ) = 2 \operatorname{sen}45^\circ \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \operatorname{cos}90^\circ = \begin{cases} \operatorname{cos}(30^\circ+60^\circ) = \operatorname{cos}30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \operatorname{sen}30^\circ \cdot \operatorname{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \\ \operatorname{cos}(2 \cdot 45^\circ) = \operatorname{cos}^2 45^\circ - \operatorname{sen}^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \operatorname{sen}120^\circ = \operatorname{sen}(2 \cdot 60^\circ) = 2 \operatorname{sen}60^\circ \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d) } \operatorname{cos}120^\circ = \operatorname{cos}(2 \cdot 60^\circ) = \operatorname{cos}^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \operatorname{tg}120^\circ = \frac{\operatorname{sen}120^\circ}{\operatorname{cos}120^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$$

$$\text{f) } \operatorname{sen}105^\circ = \operatorname{sen}(60^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen}60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \operatorname{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{g) } \operatorname{cos}105^\circ = \operatorname{cos}(60^\circ + 45^\circ) = \operatorname{cos}60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \operatorname{sen}60^\circ \cdot \operatorname{sen}45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\text{h) } \operatorname{tg}105^\circ = \frac{\operatorname{sen}105^\circ}{\operatorname{cos}105^\circ} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4}{(\sqrt{2} - \sqrt{6})/4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{2} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6})} = \frac{(\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{-4} = -\frac{8 + 2 \cdot 2\sqrt{3}}{4} = -\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$



3 Sabiendo que el seno de un ángulo es $\operatorname{sen} a = 3/5$ y $\pi/2 < a < \pi$, halla las razones trigonométricas de $a - 30^\circ$.



Calculamos primero la razones trigonométricas del ángulo a que faltan:

$$\begin{cases} \operatorname{cosa} = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} \\ \operatorname{tga} = \frac{\operatorname{sena}}{\operatorname{cosa}} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}(a - 30^\circ) = \operatorname{sena} \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{cosa} \cdot \operatorname{sen}30^\circ = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{10} + \frac{4}{10} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$$

$$\operatorname{cos}(a - 30^\circ) = \operatorname{cosa} \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sena} \cdot \operatorname{sen}30^\circ = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{4\sqrt{3}}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$$

$$\operatorname{tg}(a - 30^\circ) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(a - 30^\circ)}{\operatorname{cos}(a - 30^\circ)} = \frac{(4 + 3\sqrt{3})/10}{(3 - 4\sqrt{3})/10} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{3 - 4\sqrt{3}} = \frac{(4 + 3\sqrt{3}) \cdot (3 + 4\sqrt{3})}{(3 - 4\sqrt{3}) \cdot (3 + 4\sqrt{3})} = \frac{12 + 16\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 36}{9 - 48} = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{-39} \\ = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tg}30^\circ}{1 + \operatorname{tga}\operatorname{tg}30^\circ} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{-(9 + 4\sqrt{3})/12}{(12 - 3\sqrt{3})/12} = \frac{-(9 + 4\sqrt{3})}{12 - 3\sqrt{3}} = -\frac{(9 + 4\sqrt{3}) \cdot (12 + 3\sqrt{3})}{(12 - 3\sqrt{3}) \cdot (12 + 3\sqrt{3})} = -\frac{144 + 75\sqrt{3}}{117} = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{-39} \end{cases}$$



4 Justifica las siguientes igualdades:

- a) $\operatorname{sen}(180^\circ + a) = -\operatorname{sen} a$ c) $\operatorname{sen}(270^\circ + a) = -\operatorname{cos} a$ e) $\operatorname{cos}(90^\circ + a) = -\operatorname{sen} a$
- b) $\operatorname{tg}(\pi/2 + a) = -\operatorname{cotg} a$ d) $\operatorname{tg}(\pi + 2a) = \operatorname{tg} 2a$ f) $\operatorname{tg}(270^\circ + a) = -\operatorname{cotg} a$



a) $\operatorname{sen}(180^\circ + a) = \operatorname{sen}180^\circ \cdot \operatorname{cosa} + \operatorname{cos}180^\circ \cdot \operatorname{sena} = 0 \cdot \operatorname{cosa} + (-1) \cdot \operatorname{sena} = -\operatorname{sena}.$

b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} + \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tga}} = \frac{\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} + \operatorname{tga}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}}{\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tga}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}} = \frac{1 + \frac{\operatorname{tga}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}} - \operatorname{tga}} = \frac{1 + \frac{\operatorname{tga}}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \operatorname{tga}} = \frac{1}{-\operatorname{tga}} = -\operatorname{cotg} a, \text{ ya que } \frac{K}{\infty} = 0.$

c) $\operatorname{sen}(270^\circ + a) = \operatorname{sen}270^\circ \cdot \operatorname{cosa} + \operatorname{cos}270^\circ \cdot \operatorname{sena} = (-1) \cdot \operatorname{cosa} + 0 \cdot \operatorname{sena} = -\operatorname{cosa}.$

d) $\operatorname{tg}(\pi + 2a) = \frac{\operatorname{tg}\pi + \operatorname{tg}2a}{1 - \operatorname{tg}\pi \operatorname{tg}2a} = \frac{0 + \operatorname{tg}2a}{1 - 0 \cdot \operatorname{tg}2a} = \frac{\operatorname{tg}2a}{1} = \operatorname{tg}2a.$

e) $\operatorname{cos}(90^\circ + a) = \operatorname{cos}90^\circ \cdot \operatorname{cosa} - \operatorname{sen}90^\circ \cdot \operatorname{sena} = 0 \cdot \operatorname{cosa} - 1 \cdot \operatorname{sena} = -\operatorname{sena}.$

f) $\operatorname{tg}(270^\circ + a) = \frac{\operatorname{tg}270^\circ + \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}270^\circ \operatorname{tga}} = \frac{\frac{\operatorname{tg}270^\circ + \operatorname{tga}}{\operatorname{tg}270^\circ}}{\frac{1 - \operatorname{tg}270^\circ \operatorname{tga}}{\operatorname{tg}270^\circ}} = \frac{1 + \frac{\operatorname{tga}}{\operatorname{tg}270^\circ}}{\frac{1}{\operatorname{tg}270^\circ} - \operatorname{tga}} = \frac{1 + \frac{\operatorname{tga}}{-\infty}}{\frac{1}{-\infty} - \operatorname{tga}} = \frac{1}{-\operatorname{tga}} = -\operatorname{cotg} a.$



5 Calcula el valor de la siguiente expresión: $\operatorname{sena} \cdot \operatorname{sen}(b - c) - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(a - c) + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen}(a - b)$



$\operatorname{sena} \operatorname{sen}(b - c) - \operatorname{sen} b \operatorname{sen}(a - c) + \operatorname{sen} c \operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sena} \cdot (\operatorname{sen}b \cdot \operatorname{cos}c - \operatorname{cos}b \cdot \operatorname{sen}c) - \operatorname{sen}b(\operatorname{sena} \cdot \operatorname{cos}c - \operatorname{cosa} \cdot \operatorname{sen}c) + \operatorname{sen}c(\operatorname{sena} \cdot \operatorname{cos}b - \operatorname{cosa} \cdot \operatorname{sen}b) = \operatorname{sena} \cdot \operatorname{sen}b \cdot \operatorname{cos}c^{(1)} - \operatorname{sena} \cdot \operatorname{cos}b \cdot \operatorname{sen}c^{(2)} - \operatorname{sena} \cdot \operatorname{sen}b \cdot \operatorname{cos}c^{(1)} + \operatorname{sen}b \cdot \operatorname{cosa} \cdot \operatorname{sen}c^{(3)} + \operatorname{sen}c \cdot \operatorname{sena} \cdot \operatorname{cos}b^{(2)} - \operatorname{sen}c \cdot \operatorname{cosa} \cdot \operatorname{sen}b^{(3)} = 0$ ya que las expresiones con subíndices iguales son opuestas.



6 Demuestra que $\cos(a + b) \cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$.



$$\begin{aligned} \cos(a + b) \cos(a - b) &= (\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)(\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b) = (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2 \\ &= \cos^2 a \cdot \cos^2 b - \sin^2 a \cdot \sin^2 b \stackrel{(1)}{=} \cos^2 a(1 - \sin^2 b) - (1 - \cos^2 a) \cdot \sin^2 b = \cos^2 a - \cos^2 a \cdot \sin^2 b - \sin^2 b + \cos^2 a \cdot \sin^2 b = \cos^2 a - \sin^2 b. \end{aligned}$$

(1) en donde hemos sustituido $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$ y $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ para llegar a la primera igualdad.

Si la sustitución la hacemos $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ y $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b$, tenemos:

$$\begin{aligned} \cos(a + b) \cos(a - b) &= (\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)(\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b) = (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2 \\ &= \cos^2 a \cdot \cos^2 b - \sin^2 a \cdot \sin^2 b = (1 - \sin^2 a) \cos^2 b - \sin^2 a(1 - \cos^2 b) = \cos^2 b - \sin^2 a \cdot \cos^2 b - \sin^2 a + \sin^2 a \cdot \cos^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a \end{aligned}$$



7 Demuestra que $\sin(a + b) \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$.



$$\begin{aligned} \sin(a + b) \sin(a - b) &= (\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b)(\sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b) = (\sin a \cdot \cos b)^2 - (\cos a \cdot \sin b)^2 \\ &= \sin^2 a \cdot \cos^2 b - \cos^2 a \cdot \sin^2 b, \text{ a partir de aquí, como en el ejercicio anterior, tenemos dos caminos:} \end{aligned}$$

$$(1) \sin^2 a \cdot \cos^2 b - \cos^2 a \cdot \sin^2 b = \sin^2 a \cdot (1 - \sin^2 b) - (1 - \sin^2 a) \cdot \sin^2 b = \sin^2 a - \sin^2 a \cdot \sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a \cdot \sin^2 b = \sin^2 a - \sin^2 b, \text{ que demuestra la primera igualdad.}$$

$$(2) \sin^2 a \cdot \cos^2 b - \cos^2 a \cdot \sin^2 b = (1 - \cos^2 a) \cdot \cos^2 b - \cos^2 a \cdot (1 - \cos^2 b) = \cos^2 b - \cos^2 a \cdot \cos^2 b - \cos^2 a + \cos^2 a \cdot \cos^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a \text{ que demuestra la segunda igualdad.}$$



8 Halla las expresiones que se piden usando los teoremas de adición:

- a) $\cos 3a$ en función de $\cos a$
- b) $\sin 4a$ en función de $\sin a$



a) $\cos 3a = \cos(2a + a) = \cos 2a \cdot \cos a - \sin 2a \cdot \sin a = (\cos^2 a - \sin^2 a) \cdot \cos a - (2 \sin a \cdot \cos a) \cdot \sin a = \cos^3 a - \sin^2 a \cdot \cos a - 2 \sin^2 a \cdot \cos a = \cos^3 a - 3 \sin^2 a \cdot \cos a = \cos^3 a - 3(1 - \cos^2 a) \cdot \cos a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$

b) $\sin(4a) = \sin(2 \cdot 2a) = 2 \sin 2a \cdot \cos 2a = 2(2 \sin a \cdot \cos a)(\cos^2 a - \sin^2 a) = 4 \sin a \cdot \cos^3 a - 4 \sin^3 a \cdot \cos a = 4 \sin a \cdot \cos a (\cos^2 a - \sin^2 a) = 4 \sin a \cdot \cos a (1 - \sin^2 a - \sin^2 a) = 4 \sin a \cdot \cos a (1 - 2 \sin^2 a) = 4 \sin a \sqrt{1 - \sin^2 a} (1 - 2 \sin^2 a).$



⑨ Sabiendo que $\operatorname{tg} a = \sqrt{24}$, y que a es un ángulo cuyo seno y coseno son negativos, calcula las razones trigonométricas del ángulo $2a$.



Hallamos primero las razones trigonométricas de las razones que faltan:

$$1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a \Leftrightarrow \sec a = -\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a} = -\sqrt{1 + \sqrt{24}^2} = -5 \Rightarrow \cos a = \frac{1}{\sec a} = -\frac{1}{5}$$

Como $\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \Rightarrow \operatorname{sen} a = \cos a \cdot \operatorname{tga} = -\frac{1}{5} \cdot \sqrt{24} = -\frac{\sqrt{24}}{5}$.

Ahora las razones trigonométricas del ángulo doble:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a = 2 \left(-\frac{\sqrt{24}}{5} \right) \left(-\frac{1}{5} \right) = \frac{2\sqrt{24}}{25} \\ \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \left(-\frac{1}{5} \right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{24}}{5} \right)^2 = \frac{1}{25} - \frac{24}{25} = -\frac{23}{25} \\ \operatorname{tg} 2a = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} 2a}{\cos 2a} = \frac{2\sqrt{24}/25}{-23/25} = -\frac{2\sqrt{24}}{23} \\ \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{2 \cdot \sqrt{24}}{1 - (\sqrt{24})^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{24}}{1 - 24} = -\frac{2\sqrt{24}}{23} \end{cases} \end{array} \right.$$



⑩ Sabiendo que $\operatorname{tg} 2a = \sqrt{3}$, halla $\operatorname{tg} a$



$\operatorname{tg} 2a = \sqrt{3} = \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \Leftrightarrow \sqrt{3}(1 - \operatorname{tg}^2 a) = 2 \operatorname{tga} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 a - 2 \operatorname{tga} + \sqrt{3} = 0$ ecuación de segundo grado en tga que resolvemos:

$$\operatorname{tga} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-\sqrt{3})\sqrt{3}}}{-2\sqrt{3}} = \frac{2 \pm 4}{-2\sqrt{3}} = \begin{cases} -\frac{6}{3\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



⑪ Simplifica las expresiones:



a) $\frac{\operatorname{sen} 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a}{1 + \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a} = \frac{2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a}{\cos^2 a + \cos^2 a} = \frac{2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a}{2 \cos^2 a} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \operatorname{tga}$.

$$b) \frac{\operatorname{sen} 2a}{\operatorname{sen} a} \cdot \frac{1 + \cos 2a}{\cos a} = \frac{\cos a \operatorname{sen} 2a}{\operatorname{sen} a (1 + \cos 2a)} = \frac{\cos a \cdot 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a}{\operatorname{sen} a (1 + \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a)} = \frac{2 \cos^2 a}{1 + \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a} = \frac{2 \cos^2 a}{2 \cos^2 a} = 1.$$



12 Demuestra que $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x$.



Partimos del segundo miembro con intención de obtener el primero:

$$\operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{2}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{2}{\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1 - 1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x, \text{ Q.E.D.}$$



13 Comprueba que: $\frac{\operatorname{tga}}{\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tga}} = \cos 2a$



$$\frac{\operatorname{tga}}{\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tga}} = \frac{\frac{\operatorname{tga}}{\operatorname{tga}}}{\frac{\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tga}}{\operatorname{tga}}} = \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} 2a}{\operatorname{tga}} - 1} = \frac{1}{\frac{\frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tga}} - 1} = \frac{1}{\frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 a} - 1} = \frac{1}{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a}}{\frac{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a}} = \frac{\frac{\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a}}{\frac{1}{\cos^2 a}} =$$

$$= \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \cos 2a, \text{ Q.E.D.}$$



14 Calcula las razones trigonométricas de $22^\circ 30'$ y las de 75° . En ambos casos, utiliza las expresiones del ángulo mitad.



$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} 22^\circ 30' &= \operatorname{sen} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ \cos 22^\circ 30' &= \cos \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \operatorname{tg} 22^\circ 30' &= \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} 75^\circ &= \operatorname{sen} \frac{150^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ \operatorname{cos} 75^\circ &= \operatorname{cos} \frac{150^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ \operatorname{tg} 75^\circ &= \operatorname{tg} \frac{150^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 150^\circ}{1 + \cos 150^\circ}} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{7 + 4\sqrt{3}}{1}} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \end{aligned} \right.$$



15) Sabiendo que $\operatorname{cotg} a = -2$ y a es el mayor ángulo negativo que verifica esta igualdad, calcula las razones trigonométricas del ángulo mitad.



Estamos en el segundo cuadrante ya que dice que es ángulo negativo mayor que verifica que la cotangente es negativa. Necesitamos el $\operatorname{cosec} a$:

$$1 + \operatorname{cotg}^2 a = \operatorname{cosec}^2 a \Leftrightarrow \operatorname{cosec} a = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 a} = \sqrt{1 + (-2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \operatorname{sena} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{cotg} a = \frac{\operatorname{cosa}}{\operatorname{sena}} \Leftrightarrow \operatorname{cosa} = \operatorname{sena} \cdot \operatorname{cotg} a = \frac{\sqrt{5}}{5} (-2) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Calculamos las razones, directas, del ángulo mitad

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cosa}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{10}} \\ \operatorname{cos} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cosa}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{10}} \\ \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cosa}}{1 + \operatorname{cosa}}} = \sqrt{\frac{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{10}}{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{10}}} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(5 + 2\sqrt{5})^2}{(5 - 2\sqrt{5})(5 + 2\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{45 - 4\sqrt{5}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{45 - 4\sqrt{5}} \end{aligned} \right.$$



16) Expresa, en función de una razón trigonométrica del ángulo mitad:

$$a) \frac{1 - \operatorname{cosa}}{\operatorname{sena}} = \frac{1 - \operatorname{cosa}}{\sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 a}} = \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}}{\sqrt{(1 - \operatorname{cosa})(1 + \operatorname{cosa})}} = \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}}{\sqrt{2\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \cdot 2\operatorname{cos}^2 \frac{a}{2}}} = \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}}{2\operatorname{sen} \frac{a}{2} \operatorname{cos} \frac{a}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a}{2}}{\operatorname{cos} \frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

b)

$$\frac{\frac{\operatorname{sen} 2a}{1+\cos 2a} \cdot \frac{\operatorname{cosa}}{1+\operatorname{cosa}}}{\frac{2\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cosa}}{2\cos^2 a} \cdot \frac{\operatorname{cosa}}{1+\operatorname{cosa}}} = \frac{\operatorname{sen} a}{1+\operatorname{cosa}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{1+\operatorname{cosa}} = \frac{\sqrt{(1+\operatorname{cosa})(1-\operatorname{cosa})}}{1+\operatorname{cosa}} = \sqrt{\frac{(1+\operatorname{cosa})(1-\operatorname{cosa})}{(1+\operatorname{cosa})^2}} = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cosa}}{1+\operatorname{cosa}}} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$



17 Sabiendo que $\cos x/2 = -2/3$ y que x es un ángulo del tercer cuadrante, halla $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.



$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{2}{3} = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{4}{9} = \frac{1+\cos x}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{9}$$

$$\operatorname{sen} x = -\sqrt{1-\cos^2 x} = -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{9}\right)^2} = -\sqrt{\frac{80}{81}} = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$



18 Simplifica las expresiones siguientes:

$$a) \frac{\operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 20^\circ}{\cos 40^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{40^\circ-20^\circ}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{40^\circ-20^\circ}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\cos 30^\circ \cdot \cos 10^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$b) \frac{\operatorname{sen} 195^\circ - \operatorname{sen} 75^\circ}{\operatorname{sen} 195^\circ + \operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{2\cos\left(\frac{195^\circ+75^\circ}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{195^\circ-75^\circ}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{195^\circ+75^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{195^\circ-75^\circ}{2}\right)} = \frac{\cos 135^\circ \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 135^\circ \cdot \cos 60^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 135^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$c) \frac{\cos 60^\circ - \cos 40^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{sen} 40^\circ} = \frac{-2\operatorname{sen}\left(\frac{60^\circ+40^\circ}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{60^\circ-40^\circ}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{60^\circ+40^\circ}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{60^\circ-40^\circ}{2}\right)} = -\frac{\operatorname{sen} 50^\circ \cdot \operatorname{sen} 10^\circ}{\cos 50^\circ \cdot \operatorname{sen} 10^\circ} = -\frac{\operatorname{sen} 50^\circ}{\cos 50^\circ} = -\operatorname{tg} 50^\circ.$$



19 Demuestra que $\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)} = \operatorname{tgy}$



$$\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)} = \frac{-2\operatorname{sen}\frac{(x-y)+(x+y)}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{(x-y)-(x+y)}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{(x-y)+(x+y)}{2} \cdot \cos\frac{(x-y)-(x+y)}{2}} = -\frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(-y)}{\operatorname{sen} x \cdot \cos(-y)} = -\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \operatorname{tgy} \text{ Q.E.}$$

D.



20 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$$a) \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow 2x = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k = \frac{\pi}{12} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{24} + \pi k \\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow 2x = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k = \frac{5\pi}{12} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{5\pi}{24} + \pi k \end{cases}$$

ya que el ángulo cuyo seno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mide $60^\circ = \pi/3$ rad en el primer cuadrante y $120^\circ = 2\pi/3$ rad en el segundo.

$$b) \quad \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow 3x = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k = \frac{11\pi}{12} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{11\pi}{24} + \pi k \\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow 3x = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k = \frac{19\pi}{12} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{19\pi}{24} + \pi k \end{cases}$$

ya que el ángulo cuyo coseno es $-1/2$ mide $120^\circ = 2\pi/3$ rad en el 2º cuadrante y $240^\circ = 4\pi/3$ rad en el tercero.

$$c) \quad \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \begin{cases} \frac{2\pi}{3} + \pi k \Rightarrow 2x = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \pi k = \frac{\pi}{3} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k \\ \frac{5\pi}{3} + \pi k \Rightarrow 2x = \left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \pi k = \frac{4\pi}{3} + \pi k \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k \end{cases}$$

ya que el ángulo cuya tangente es $-\sqrt{3}$ mide $120^\circ = 2\pi/3$ rad en el 2º cuadrante y $300^\circ = 5\pi/3$ rad en el 4º.

$$d) \quad \cos\left(\frac{1}{2}(x + \pi)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(x + \pi)\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow \frac{1}{2}x = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi k = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow x = -\frac{4\pi}{3} + 4\pi k = \frac{2\pi}{3} + 4\pi k \\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \Rightarrow \frac{1}{2}x = \left(\frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi k = \frac{8\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{16\pi}{3} + 4\pi k = \frac{4\pi}{3} + 4\pi k \end{cases}$$

ya que el ángulo cuyo coseno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mide $30^\circ = \pi/6$ rad en el primer cuadrante y $330^\circ = 11\pi/6$ rad en el 4º.

$$e) \quad \sin 3x - \sin 30^\circ = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = \sin 30^\circ \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = 10^\circ + k \cdot 120^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = 50^\circ + k \cdot 120^\circ \end{cases}$$

$$f) \quad \operatorname{cotg}\left(\frac{x + 45^\circ}{2}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\frac{x + 45^\circ}{2}\right) = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 180^\circ \Rightarrow x + 45^\circ = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow x = 15^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 210^\circ + k \cdot 180^\circ \Rightarrow x + 45^\circ = 420^\circ + k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow x = 375^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

ya que el ángulo cuya cotangente es $\sqrt{3}$ mide 30° en el primer cuadrante y 210° en el 3º. Como la primera solución incluye la segunda, tomamos la primera.



20 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin 2x = 2 \cos x$

b) $\sin x + \sin 3x = \cos x$

c) $\sin 4x = \sin 2x$

d) $\cos 2x - \cos 6x = \sin 5x + \sin 3x$

e) $\sin 2x - \cos x = 6 \operatorname{sena} x$

f) $2 \sin x = \operatorname{tg} x$



a) $\text{sen}2x = 2\text{cos}x \Leftrightarrow 2\text{sen}x \cdot \text{cos}x - 2\text{cos}x = 0 \Leftrightarrow 2\text{cos}x(\text{sen}x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{cos}x = 0 \Rightarrow x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \\ \text{sen}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x = 1 \end{cases}$, la solución de la segunda $x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$ ya está incluida en la primera.

b) $\text{sen}x + \text{sen}3x = \text{cos}x \Leftrightarrow 2\text{sen} \frac{x+3x}{2} \cdot \text{cos} \frac{x-3x}{2} = \text{cos}x \Leftrightarrow 2\text{sen}2x \cdot \text{cos}(-x) = \text{cos}x \Leftrightarrow 2\text{sen}2x \cdot \text{cos}x - \text{cos}x = 0$;
 $\text{cos}x(2\text{sen}2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{cos}x = 0 \Rightarrow x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \\ 2\text{sen}2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = 15^\circ + k \cdot 180^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = 75^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases} \end{cases}$

c) $\text{sen}4x = \text{sen}2x \Leftrightarrow 2\text{sen}2x \cdot \text{cos}2x = \text{sen}2x \Leftrightarrow 2\text{sen}2x \cdot \text{cos}2x - \text{sen}2x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}2x(2\text{cos}2x - 1) = 0$, e igualando cada factor a cero:

$$\begin{cases} \text{sen}2x = 0 \Rightarrow 2x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ \Leftrightarrow x = 0^\circ + k \cdot 90^\circ \\ 2\text{cos}2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{cos}2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 120^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 180^\circ \\ 60^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases} \end{cases}$$

d) $\text{cos}2x - \text{cos}6x = \text{sen}5x + \text{sen}3x \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -2\text{sen} \frac{2x+6x}{2} \cdot \text{sen} \frac{2x-6x}{2} = 2\text{sen} \frac{5x+3x}{2} \cdot \text{cos} \frac{5x-3x}{2} \Leftrightarrow -\text{sen}4x \cdot \text{sen}(-2x) = \text{sen}4x \cdot \text{cos}x \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \text{sen}4x \cdot \text{sen}2x - \text{sen}4x \cdot \text{cos}x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}4x(\text{sen}2x - \text{cos}x) = 0$, ahora igualamos cada factor a cero:

$$\begin{cases} \text{sen}4x = 0 \Rightarrow 4x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ \Leftrightarrow x = 0^\circ + k \cdot 90^\circ \\ \text{sen}2x - \text{cos}x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}x \cdot \text{cos}x - \text{cos}x = 0 \Leftrightarrow \text{cos}x(2\text{sen}x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{cos}x = 0 \Rightarrow x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \\ 2\text{sen}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

(1) Aplicamos las fórmulas de adición para convertir sumas (o diferencias) en productos.

(2) $\text{sen}(-2x) = -\text{sen}2x$ y pasamos al primer miembro todo.

e) $\text{sen}2x \cdot \text{cos}x = 6\text{sen}^3x \Leftrightarrow 2\text{sen}x \cdot \text{cos}x - 6\text{sen}^3x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}x(\text{cos}x - 3\text{sen}^2x) = 0$, ahora ya podemos igualar cada factor a cero:

$$2\text{sen}x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ + k \cdot 180^\circ.$$

$\text{cos}x - 3\text{sen}^2x = 0 \Leftrightarrow \text{cos}x - 3(1 - \text{cos}^2x) = 0 \Leftrightarrow 3\text{cos}^2x + \text{cos}x - 3 = 0 \Rightarrow \text{cos}x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+36}}{6} = \begin{cases} 0,847127 \\ -1,18046 \end{cases}$, la segunda solución no es válida ya que el coseno no puede ser menor que -1 y para que $\text{cos}x = 0,847127$; $x = 32^\circ 5' 58'' + k \cdot 360^\circ$ ó $x = 327^\circ 54' 2'' + k \cdot 360^\circ$.

f) $2\text{sen}x = \text{tg}x \quad 2\text{sen}x - \text{tg}x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen}x - \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x} = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x \left(2 - \frac{1}{\text{cos}x} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ + 180^\circ k \\ 2 - \frac{1}{\text{cos}x} = 0 \Leftrightarrow \text{cos}x = \frac{1}{2} \Rightarrow \end{cases}$

la segunda ecuación tiene por soluciones $x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$ ó $x = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$.



②② Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen}x = 1 + 2\text{cos}^2x$

d) $6\text{cos}^2x + 6\text{sen}^2x = 5 + \text{sen}x$

b) $\text{sec}x + \text{tg}x = 0$

e) $\text{tg}2x \text{tg}x = 1$

c) $6\text{cos}2(x/2) + \text{cos}x = 1$

f) $\text{cos}^2x = 3\text{sen}^2x$



a) $\text{sen} x = 1 + 2\cos^2 x \Leftrightarrow \text{sen} x = 1 + 2(1 - \text{sen}^2 x) \Leftrightarrow \text{sen} x = 1 + 2 - 2\text{sen}^2 x \Leftrightarrow 2\text{sen}^2 x + \text{sen} x - 3 = 0$, ecuación de segundo grado en $\text{sen} x$ que resolvemos:

$$\text{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{cases}, \text{ la segunda no es válida ya que el seno no puede ser menor que } -1 \text{ y}$$

de la primera obtenemos $x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$.

b) $\text{sec} x + \text{tg} x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} + \frac{\text{sen} x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x}(1 + \text{sen} x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos x} = 0 \Rightarrow \text{No válida} \\ 1 + \text{sen} x = 0 \Leftrightarrow \text{sen} x = -1 \Leftrightarrow x = 270^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$

c) $6 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1 \Leftrightarrow 6 \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) + \cos x = 1 \Leftrightarrow 3 + 3 \cos x + \cos x = 1 \Leftrightarrow 4 \cos x = -2 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

cuyas soluciones son $x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$ ó $x = 240^\circ + k \cdot 360^\circ$.

d) $6 \cos^2 x + 6 \text{sen}^2 x = 5 + \text{sen} x \Leftrightarrow 6(1 - \text{sen}^2 x) + 6 \text{sen}^2 x = 5 + \text{sen} x \Leftrightarrow 6 - 6 \text{sen}^2 x + 6 \text{sen}^2 x = 5 + \text{sen} x \Leftrightarrow \text{sen} x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$.

e) $\text{tg} 2x \cdot \text{tg} x = 1 \Leftrightarrow \frac{2 \text{tg} x}{1 - \text{tg}^2 x} \cdot \text{tg} x = 1 \Leftrightarrow 2 \text{tg}^2 x = 1 - \text{tg}^2 x \Leftrightarrow 3 \text{tg}^2 x = 1 \Leftrightarrow \text{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, de tener en cuenta los dos

signos tenemos: $\begin{cases} \text{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150^\circ + k \cdot 180^\circ \\ \text{tg} x = +\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases}$.

f) $\cos^2 x = 3 \text{sen}^2 x \Leftrightarrow \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{tg}^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ cuyas soluciones ya hemos hallado en el

ejercicio anterior: $\begin{cases} \text{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150^\circ + k \cdot 180^\circ \\ \text{tg} x = +\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases}$.



②③ Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2$

b) $\text{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$

c) $\text{sen} x + \cos x = 5/2$



En estas ecuaciones hay que aplicar los teoremas de adición.

a) $\text{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \text{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \text{sen} x \cdot \cos 60^\circ + \cos x \cdot \text{sen} 60^\circ = 1 \Leftrightarrow \text{sen}(x + 60^\circ) = 1 \Rightarrow x + 60^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$.

b) $\text{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen} x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 1 \Leftrightarrow \text{sen} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}(x + 45^\circ) = 1 \Rightarrow x + 45^\circ = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$.

c) $\text{sen}x + \cos x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \text{sen}x + \sqrt{1 - \text{sen}^2x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1 - \text{sen}^2x} = (5 - 2\text{sen}x) \Leftrightarrow (2\sqrt{1 - \text{sen}^2x})^2 = (5 - 2\text{sen}x)^2 \Leftrightarrow$
 $4(1 - \text{sen}^2x) = 25 - 20\text{sen}x + 4\text{sen}^2x \Leftrightarrow 8\text{sen}^2x - 20\text{sen}x + 21 = 0$, ecuación de 2º grado en $\text{sen}x$ que resolvemos:

$\text{sen}x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 672}}{16}$ que no tiene soluciones reales.



24 Resuelve los siguientes sistemas:

a)
$$\left. \begin{array}{l} x + \text{sen}^2y = 2 \\ x + \text{cos}^2y = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{reducción}} \left. \begin{array}{l} -x - \text{sen}^2y = -2 \\ x + \text{cos}^2y = 1 \\ \hline \text{cos}^2y - \text{sen}^2y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{cos}^2y - \text{sen}^2y = -1 \Leftrightarrow \text{cos}2y = -1 \Rightarrow 2y = 180^\circ + k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow$$

$y = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$, sustituyendo en la primera $x + \text{sen}^2(90^\circ + k \cdot 360^\circ) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

b)
$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}x \cdot \text{cos}y = \frac{3}{4} \\ \text{cos}x \cdot \text{sen}y = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sumando} \\ \text{restando} \end{array} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{sen}x \cdot \text{cos}y + \text{cos}x \cdot \text{sen}y = 1 \\ \text{sen}x \cdot \text{cos}y - \text{cos}x \cdot \text{sen}y = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{sen}(x+y) = 1 \\ \text{sen}(x-y) = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x+y = 90^\circ \\ x-y = \begin{cases} 30^\circ \\ 150^\circ \end{cases} \end{array} \right\} \text{luego tenemos}$$

dos sistemas posibles (considerando sólo una vuelta a la circunferencia):

$$\left. \begin{array}{l} x+y = 90^\circ \\ x-y = 30^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sumando}} 2x = 120^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ \Rightarrow y = 30^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} x+y = 90^\circ \\ x-y = 150^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{sumando}} 2x = 240^\circ \Leftrightarrow x = 120^\circ \Rightarrow y = 330^\circ$$

c) $\left. \begin{array}{l} \text{cos}x + \text{cos}y = 1 \\ \text{cos}(x+y) = 1 \end{array} \right\}$ de la segunda se deduce que $x + y = 0^\circ$, luego $y = -x$ que sustituida en la primera nos da: $\text{cos}x + \text{cos}(-x) = 1 \Leftrightarrow \text{cos}x + \text{cos}x = 1 \Leftrightarrow 2\text{cos}x = 1 \Leftrightarrow \text{cos}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$ ó $x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$, la y , por tanto, es $y = -x = -60^\circ = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$ ó $y = -120^\circ = 240^\circ + k \cdot 360^\circ$

d) $\left. \begin{array}{l} x+y = \frac{\pi}{2} \\ \text{sen}x + \text{sen}y = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{array} \right\}$ de la primera se deduce $y = \pi/2 - x$ que sustituido en la segunda arroja $\text{sen}x +$

$\text{sen}(\pi/2 - x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$ que convertimos en producto mediante la fórmula de adición:

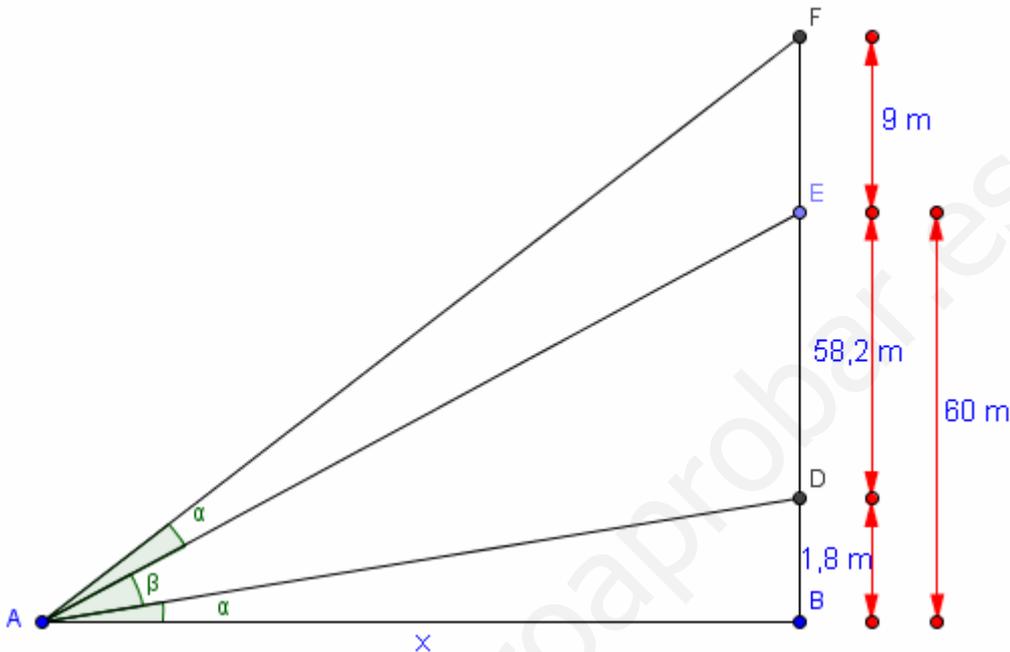
$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\text{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \text{cos} \frac{A-B}{2} \Rightarrow \text{sen}x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\text{sen} \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cdot \text{cos} \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \text{sen} \frac{\pi}{4} \cdot \text{cos}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \text{cos}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} \Leftrightarrow \text{cos}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \begin{cases} 30^\circ = \frac{\pi}{6} \\ 330^\circ = \frac{11\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} \\ \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{25\pi}{12} = \frac{\pi}{12} \end{cases} \text{luego los valores}$$

de y son: $\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12} \\ y = \frac{\pi}{2} - \frac{25\pi}{12} = -\frac{19\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \end{array} \right.$, da valores cambiados: para $x = 5\pi/12$, $y = \pi/12$ y viceversa.



25 En una de las orillas de un río hay un pedestal de 60 m de altura sobre el que se apoya una estatua de 9 m de alzada. Halla la anchura x del río, sabiendo que desde un punto A, situado en la orilla opuesta al pedestal, se ve la estatua bajo el mismo ángulo que se vería a un hombre de 1,80 m situado delante del pedestal.



$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1,8}{x} \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{60}{x} \\ \operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{69}{x} \end{cases}$$

resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tenemos $x = 32,17$ m.



26 Sabiendo que $\operatorname{tg}(A/2) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ y que A es un ángulo cuyo seno es menor que su coseno, halla $\cos 3A - \cos A$.



En el ejercicio 1 hallamos $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$, en función del $\cos A$.

A partir de la tangente del ángulo mitad hallamos el valor de $\cos A$:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \left(\pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \right)^2 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 - 2\cos A = 3 + 3\cos A \Leftrightarrow 5\cos A = -1$$

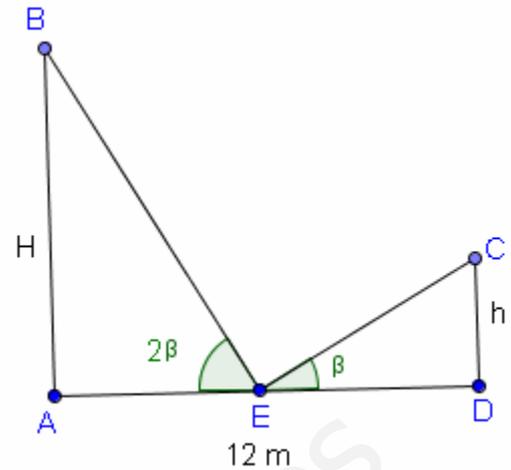
$\Leftrightarrow \cos A = -\frac{1}{5}$, ahora podemos hallar el valor de la expresión pedida:

$$\cos 3A - \cos A = 4\cos^3 A - 3\cos A - \cos A = 4\cos^3 A - 4\cos A = 4 \left(\left(-\frac{1}{5} \right)^3 + \frac{1}{5} \right) = 4 \left(-\frac{1}{125} + \frac{1}{5} \right) = \frac{96}{125}$$



27 Una calle mide 12 m de ancha. Desde el punto medio de la misma se observan los aleros de sendos edificios de alturas H y h bajo ángulos 2β y β , respectivamente.

En el caso de que los ángulos sean de 60° y 30° , calcula H y h. Encuentra la relación general que liga a las alturas H y h, y comprueba que las alturas calculadas anteriormente verifican la relación general.



$$AE = ED = x = 6 \text{ m}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}30^\circ = \frac{h}{6\text{m}} \Leftrightarrow h = 6\text{m}\cdot\operatorname{tg}30^\circ \cong 3,46\text{m} \\ \operatorname{tg}2\beta = \operatorname{tg}60^\circ = \frac{H}{6\text{m}} \Leftrightarrow H = 6\text{m}\cdot\operatorname{tg}60^\circ \cong 10,39\text{m} \end{cases}$$

En general:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\beta = \frac{h}{6} \\ \operatorname{tg}2\beta = \frac{H}{6} = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{2\cdot\frac{h}{6}}{1-\left(\frac{h}{6}\right)^2} = \frac{12h}{36-h^2} \Rightarrow \frac{H}{6} = \frac{12h}{36-h^2} \Leftrightarrow H = \frac{72h}{36-h^2} = \frac{2h}{1-\left(\frac{h}{6}\right)^2} \end{cases}$$

Comprobemos la relación anterior:

$$H = \frac{72h}{36-h^2} = \frac{72\cdot 6\cdot\operatorname{tg}30^\circ}{36-(6\operatorname{tg}30^\circ)^2} \cong 10,39$$



28 Siendo A, B, C los ángulos de un triángulo, demuestra que:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$$

Nota: ayúdate del desarrollo de $\operatorname{tg}(A + B + C)$, y recuerda que $A + B + C = 180^\circ$.



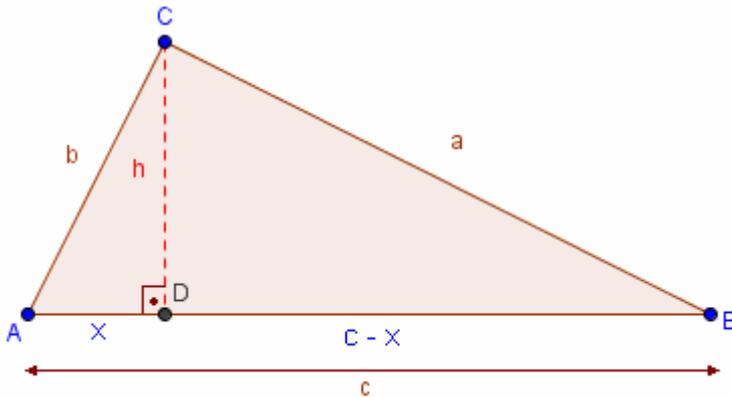
$$\begin{aligned} A + B + C = 180^\circ &\Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C \Leftrightarrow \operatorname{tg}(A+B) = \operatorname{tg}(180^\circ-C) \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B}{1 - \operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B} = -\operatorname{tg}C \Leftrightarrow \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B = -\operatorname{tg}C(1 \\ &- \operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B) \Leftrightarrow \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B = -\operatorname{tg}C + \operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C \Leftrightarrow \operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C \text{ Q.E.D.} \end{aligned}$$



②⑨ En los manuales de agrimensura aparece la siguiente fórmula para calcular el área de un triángulo, siempre que se conozcan los elementos que en ella aparecen:

$$S = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B}$$

Ayudándote de la altura correspondiente al vertice C, demuestra la fórmula anterior.



En el triángulo rectángulo ADC tenemos:

$$\operatorname{tg}A = \frac{h}{x}$$

En el triángulo rectángulo CDB tenemos:

$$\operatorname{tg}B = \frac{h}{c-x}$$

Si despejamos h del sistema formado por las dos expresiones anteriores:

$$\operatorname{tg}A = \frac{h}{x} \Leftrightarrow x = \frac{h}{\operatorname{tg}A}$$

$$\operatorname{tg}B = \frac{h}{c-x} \Leftrightarrow c-x = \frac{h}{\operatorname{tg}B} \Leftrightarrow x = c - \frac{h}{\operatorname{tg}B}$$

$$\text{Igualando } x: \frac{h}{\operatorname{tg}A} = c - \frac{h}{\operatorname{tg}B} \Leftrightarrow \frac{h}{\operatorname{tg}A} + \frac{h}{\operatorname{tg}B} = c \Leftrightarrow h \left(\frac{1}{\operatorname{tg}A} + \frac{1}{\operatorname{tg}B} \right) = c \Rightarrow h = \frac{c}{\frac{1}{\operatorname{tg}A} + \frac{1}{\operatorname{tg}B}} = \frac{c}{\frac{\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B}} = c \cdot \frac{\operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}A}$$

El área del triángulo es $S = \frac{1}{2} c h = \frac{1}{2} c \cdot c \cdot \frac{\operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}A} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}B + \operatorname{tg}A}$ Q.E.D.

En donde hemos sustituido h por la expresión obtenida más arriba.

