Números complejos

1. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

a) 2 + 3i b) –1 + i c) –2 –2i d) 4 – 3i

[Sol] a) – 2 – 3i, 2 – 3i; b) 1 – i, – 1 – i; c) 2 + 2i, - 2 + 2i; d) – 4 + 3i, 4 + 3i.

2. Completa la tabla:

z	–z	$\bar{z}$	1/z
2 – 3i			
	–1 + 4i		
		3 – 3i	
			i

[Sol] 1ª fila, -2+3i, 2+3i, $\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$; 2ª fila, 1-4i, 1+4i, $\frac{1}{17}+\frac{4}{17}i$; 3ª fila, 3+3i, -3-3i, $\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i$; 4ª fila, -i, i, i.

3. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(-\frac{5}{3}-i\right)+\left(1+\frac{3}{2}i\right)$ b) $\left(-\frac{1}{4}-6i\right)-\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}i\right)$ c) $(2-i)\cdot\left(\frac{5}{2}+3i\right)$

d) $(3-i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)$ e) $(-2i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)$ f) (3 – 2i)·(3 + 2i)

[Sol] a) $-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i$; b) $1-\frac{15}{2}i$; c) $8+\frac{7}{2}i$; d) $\frac{9}{2}+\frac{7}{2}i$; e) 3 – 2i ; f) 13

4. Calcula: a) $i^{10}+i^{141}+i^{15}$ b) $(3-2i)^2$ c) $\left(1+\frac{3}{2}i\right)^2$ d) $(-1+2i)^6$

[Sol] a) –1; b) 5 – 12i; c) $-\frac{5}{4}+3i$; d) 117 – 44i.

5. Dados $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -3 + i$ y $z_3 = 5i$, calcula:

a) $z_1+z_2+z_3$ b) $z_1+2z_2-z_3$ c) $z_1(z_2+z_3)+z_3$

d) $\frac{z_2-z_1}{z_3}$ e) $(z_1+2z_3)(z_2-z_1)$

[Sol] a) 4i ; b) –3 – 5i ; c) 3 + 29i ; d) $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$; e) –42 – 39i .

6. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$ b) $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^5$ c) $\frac{2}{3-i}$ d) $\frac{1+i}{1-i}$

[Sol] a)1; b) $-512\sqrt{3}-512i$; c) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$; d) i .

7. (PAU) a) ¿Qué relación existe entre el conjugado del opuesto de un número complejo, $z = a + bi$, y el opuesto del conjugado del mismo número? Razone la respuesta.

b) Calcule los números *x* e *y* de modo que $\frac{3-xi}{1+2i} = y + 2i$.

[Sol] a) son iguales; b) x = -16, y = 7.

8. Calcula en cada caso el valor que ha de tener k para que el resultado de la operación correspondiente sea un número imaginario puro:

a) $(2-3i)(1+ki)$ b) $\left(k+\sqrt{2}i\right)^2$ c) $\dfrac{k-2i}{8+2i}$

[Sol] a) $k=-\frac{2}{3}$; b) $k=\pm\sqrt{2}$; c) $k=\frac{1}{2}$.

9. Calcula en cada caso el valor que ha de tener *k* para que el resultado de la operación correspondiente sea un número real:

a) $(3+ki)(6-3i)$ b) $\dfrac{k-2i}{5-6i}$ c) $\dfrac{1+i}{k+2i}$

[Sol] a) $k=\frac{3}{2}$; b) $k=\frac{5}{3}$; c) $k=2$.

10. Expresa en forma binómica:

a) $2(\cos 135^\circ + i \text{ sen } 135^\circ)\cdot 3(\cos 45^\circ + i \text{ sen } 45^\circ)$ b) $[2(\cos 30^\circ + i \text{ sen } 30^\circ)]^5$

c) $\dfrac{4(\cos 240^\circ + i\,sen\ 240^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 30^\circ + i\,sen\ 30^\circ)}$ d) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\,sen\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,sen\frac{\pi}{3}\right)$

[Sol] a) -6; b) $-16\sqrt{3}+16i$; c) $-4\sqrt{3}-4i$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$

11. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma binómica:

a) $2_{210^\circ}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)_{60^\circ}$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)_{150^\circ} : 3_{30^\circ}$ c) $\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{3}}\cdot 2_{\frac{4\pi}{3}}$

[Sol] a) $-\frac{1}{2}i$; b) $-\frac{1}{18}+\frac{\sqrt{3}}{18}i$; c) $\sqrt{2}-\sqrt{6}i$

12. Si $z = 4_{60^\circ}$ y $z' = 2_{45^\circ}$ calcula:

a) $z + z'$ b) $z \cdot z'$ c) $\dfrac{z}{z'}$ d) $z^2 \cdot z'$ e) $z^2 \cdot \overline{z'}$ f) $(-z) \cdot z'$

[Sol] a) $(2+\sqrt{2})+(2\sqrt{3}+\sqrt{2})i$; b) 8_{105° ; c) 2_{15°; d) 32_{165°; e) 32_{75}; f) 8_{285°

13. Encuentra la ecuación que tiene por raíces:

a) $2 - i$ y $2 + i$ b) $2, -3, i$ y $-i$

[Sol] a) $z^2 - 4z + 5 = 0$; b) $z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6 = 0$.

14. Halla las soluciones, reales o complejas, de las ecuaciones:

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$ b) $z^4 - 256 = 0$ c) $z^4 + \left(1-\sqrt{3}i\right) = 0$.

[Sol] a) $1 + 2i$, $1 - 2i$; b) $4, -4, 4i, -4i$; c) $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{30^\circ}$, $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{120^\circ}$, $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{210^\circ}$, $\left(\sqrt[4]{2}\right)_{300^\circ}$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $z^5 - 1 = 0$ b) $z^3 + 8 = 0$

[Sol] a) 1_{0°; 1_{72°; 1_{144°; 1_{216° y 1_{288°; b) 2_{60°; 2_{180° y 2_{300° ;