

Ejercicios Números Complejos

1) Resolver en \mathbb{C} las siguientes ecuaciones:

- a) $x^2 + 100 = 0$ b) $x^2 - 4x + 13 = 0$
 c) $x^2 - 10x + 26 = 0$ d) $\frac{z-3}{2z-i} = 1-i$

2) Escribe los siguientes números en la forma más sencilla:

- a) $3i + 2i^3$ b) $5i^2 + 2i^4$ c) $i - 5i^3$
 d) $2i^5 + 7i^7$ e) $i + i^3 + i^5$ f) $4i + 5i^8 + 6i^3 + 2i^4$
 g) i^{57} h) $i^2 + i^{12} + i^8$ i) $i + i^2 + i^3 + i^4$

3) Realiza los siguientes productos en forma binómica:

- a) $(1 + 5i) \cdot (1 + 2i)$ b) $(2 - 3i)^2$
 c) $(-4 - i) \cdot (-4 + i)$ d) $(4 - 5i) \cdot (3 - 2i)$
 e) $(3 - i) \cdot \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i\right)$ f) $\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}i\right) \cdot (4 + 2i)$

4) Escribe en forma binómica el resultado de los siguientes cocientes:

- a) $\frac{8 + 4i}{1 + i}$ b) $\frac{2 + 2i}{4 - 2i}$ c) $\frac{5 - 15i}{3 - i}$
 d) $\frac{8 + 6i}{2i}$ e) $\frac{5 - 2i}{5 + 2i}$ f) $\frac{8 + 2i}{1 + 3i}$
 g) $\frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i}{3 - 4i}$ h) $\frac{\frac{1}{7} + i}{\frac{5}{i}}$ i) $\frac{1 + i}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$

5) Halla los valores de b para que $|3 + bi| = 7$.

6) Halla una ecuación de 2º grado con coeficientes reales sabiendo que una de sus raíces es $z = -2 + \sqrt{5}i$.

7) Determina el valor de m para que el número complejo

$$z = \frac{2 - mi}{8 - 6i}$$

sea:

- a) Un número real.
 b) Imaginario puro.
 c) Tal que sus afijo esté situado sobre la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes.

8) Calcular x e y de modo que $\frac{x + yi}{2 - i} = 3 + 2ix$

9) Dados los complejos $z_1 = 2 - ai$ y $z_2 = 3 - bi$, halla a y b para que $z_1 \cdot z_2 = 8 + 4i$.

10) Halla una ecuación de 2º grado con coeficientes reales sabiendo que una de las soluciones es $z_1 = 4 + 4\sqrt{3}i$.

Halla además $z_1^2 - z_2^2$ siendo z_2 la otra solución.

11) Dados los números complejos: $z_1 = k + 2i$,

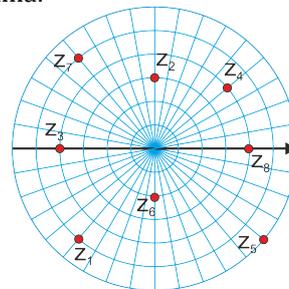
$z_2 = 1 - ki$ se pide:

a) Si k va tomando todos los valores posibles, ¿qué figura formarán todos los afijos del número complejo z_2 ?

b) Calcular k para que $z_1 \cdot z_2$ sea real.

c) Para $k = 1$, halla $\frac{z_1}{z_2}$.

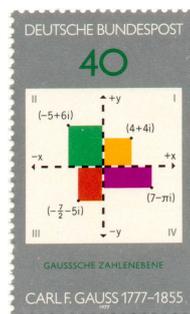
12) Escribe en forma polar los números complejos del siguiente diagrama:



13) Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

- a) $-3i$ b) $-1 - i$ c) $4 - 4\sqrt{3}i$
 d) $\frac{1}{3} + \frac{8}{3}i$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ $-3 - 3\sqrt{3}i$

14) La figura muestra el sello de la antigua República Federal Alemana, conmemorativo del segundo centenario del nacimiento de **Carl Friedrich Gauss**, matemático, astrónomo y físico alemán, considerado el matemático más grande desde la antigüedad.



Con la ayuda de una calculadora científica, expresa en forma polar los números complejos que aparecen en el sello. $(4+4i)$; $(-5+6i)$; $(-7/2-5i)$; $(7-\pi i)$

15) Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:

- 5_{180° 2_{135° 4_{315° 3_{270°
 $2_{5\pi/6}$ $8_{11\pi/6}$ $\sqrt{3}_{5\pi/3}$ 10_π
 $-4(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$ $\sqrt{3}(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$

16) Hallar la forma polar del número complejo $z = 1 + \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x$.

17) Escribir en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

- a) $z = 2$ b) $z = -3$ c) $z = -2i$
 d) $z = -1 - \sqrt{3}i$ e) $2\sqrt{3} - 2i$

18) Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma polar:

$$a) z = \frac{1+i}{1+\sqrt{3}i} \quad b) u = \frac{2i-2}{1-i\sqrt{3}} \quad c) v = \frac{(2-3i)-(3-2i)}{(3+2i)-(2+i)}$$

19) Demuestra que $\sqrt{1+\sqrt{-3}} - \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{2}i$.

20) Sea $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

a) Comprueba que $|z| = 1$ y que $z^2 = \bar{z}$.

b) Deduce que $z^3 = 1$.

c) Calcula z^{3002} .

21) Si en una ecuación de segundo grado de coeficientes

reales, una de sus raíces es $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

a) Determinar la otra raíz.

b) Escribir dicha ecuación y hallar el módulo y el argumento de cada una de las raíces.

22) Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $2_{\pi/4}$ y $2_{5\pi/3}$.

23) Determinar r_α en los siguientes casos:

a) $2_{\pi/4} \cdot r_\alpha = 6_{\pi/2}$ b) $\frac{r_\alpha}{4_\pi} = 3_{\pi/4}$ c) $(r_\alpha)^4 = 16_\pi$

24) El número complejo de argumento 80° y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50° . Escribir en forma binómica el otro complejo.

25) Dado el número complejo $z = 2_{60^\circ}$, expresa su opuesto y su conjugado en forma binómica.

26) Hallar las raíces de la ecuación $x^2 - 2x + 4 = 0$ y expresarlas en forma polar.

27) Impedancia es la resistencia al flujo de corriente en un circuito eléctrico medida en ohmios. La impedancia, Z , en un circuito se obtiene usando la fórmula $Z = V/I$ donde V es el voltaje (medido en voltios) e I es la intensidad de corriente (medida en amperios).

a) Hallar la impedancia cuando $V = 1,8 - 0,4i$ voltios e $I = -0,3i$ amperios.

b) Hallar la intensidad de corriente que fluye cuando $V = 1,6 - 0,3i$ voltios y $Z = 1,5 + 8i$ ohmios.

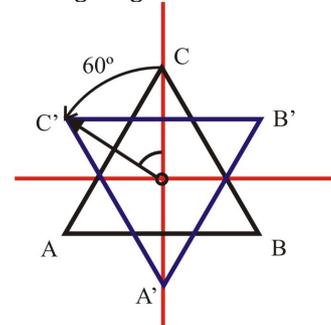
28) Hallar el producto $z_1 \cdot z_2$ y el cociente z_1/z_2 expresando el resultado en forma polar:

a) $z_1 = 1_\pi$ b) $z_1 = \cos 45^\circ + isen 45^\circ$
 $z_2 = 1_{\pi/3}$ $z_2 = \cos 135^\circ + isen 135^\circ$
c) $z_1 = 3_{\pi/6}$ d) $z_1 = \sqrt{2}(\cos 75^\circ + isen 75^\circ)$
 $z_2 = 5_{4\pi/3}$ $z_2 = 3\sqrt{2}(\cos 60^\circ + isen 60^\circ)$
e) $z_1 = \left(\frac{4}{5}\right)_{25^\circ}$ f) $z_1 = 7\left(\cos \frac{9\pi}{8} + isen \frac{9\pi}{8}\right)$

$$z_2 = \left(\frac{1}{5}\right)_{155^\circ} \quad z_2 = 2\left(\cos \frac{\pi}{8} + isen \frac{\pi}{8}\right)$$

29) El triángulo ABC de baricentro en el origen de coordenadas gira 60° alrededor del mismo hasta la posición A'B'C' tal como se muestra en la figura.

Si las coordenadas de los vértices son $A(-2\sqrt{3}, -2)$, $B(2\sqrt{3}, -2)$ y $C(0, 4)$, determina las coordenadas de los vértices del triángulo girado.



30) Efectuar las siguientes potencias:

a) $(1+i)^{20}$ b) $(1-\sqrt{3}i)^5$
c) $(2\sqrt{3}+2i)^5$ d) $(1-i)^8$
e) $(\sqrt{3}-i)^{-10}$ f) $(2+2i)^8$
g) $(-1-i)^7$ h) $(3+\sqrt{3}i)^4$
i) $(2\sqrt{3}+2i)^{-5}$ j) $(1-i)^{-8}$
k) $(\sqrt{3}(\cos 10^\circ + isen 10^\circ))^6$ l) $(1+\sqrt{5}i)^8$

31) Calcula $\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{14}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}}$

32) Siendo n y m dos números enteros positivo, calcula:

a) $(1-i)^n \cdot (1+i)^m$ b) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^m}$

33) Demostrar que:

a) $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$ es una raíz novena de -1 .
b) $2^{-1/4}(1-i)$ es una raíz cuarta de -2 .

34) Los afijos de los números complejos z_1, z_2 y z_3 están situados en los vértices de un triángulo equilátero cuyo centro es el origen de coordenadas. Sabiendo que $z_1 = 2i$, calcular z_2 y z_3 expresando el resultado en forma polar y binómica.

35) Se considera el número complejo $z = 1 + 3i$, se efectúa un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud 30° . Hallar el complejo z' transformado por z en el citado giro.

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{3n} + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^{3n}$$

36) Dados los números complejos $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y

$w = 2_{45^\circ}$, calcular:

a) $z \cdot w$ b) $z^3 \cdot \bar{w}$ c) $z \cdot w^4$

37) Hallar las raíces que se indican y representarlas en el plano complejo:

- a) Raíces cuadradas de $4\sqrt{3} + 4i$
- b) Raíces cúbicas de $4\sqrt{3} + 4i$
- c) Raíces cuartas de $-81i$
- d) Raíces quintas de 32 .
- e) Raíces sextas de 1 .
- f) Raíces cúbicas de $1 + i$
- g) Raíces cúbicas de i .
- h) Raíces quintas de $-i$
- i) Raíces cuartas de -1 .
- j) Raíces quintas de $-16 - 16\sqrt{3}i$

38) Sean z_1, z_2 y z_3 las tres raíces cúbicas de la unidad, demuestra que se verifica la siguiente igualdad:

$$(z_1 - z_2 + z_3) \cdot (z_1 + z_2 - z_3) = 4$$

39) Dados los números complejos $z_1 = \sqrt{3} + i$ y $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

- a) Efectuar de dos formas distintas la división $z_1 : z_2$
- b) Calcular y representar los afijos de $\sqrt[3]{\frac{z_1}{z_2}}$

40) Resolver las siguientes ecuaciones:

- a) $z^4 + 1 = -15$
- b) $(1 + i)z^3 - 2i = 0$
- c) $z^4 = 8 + 8\sqrt{3}i$
- d) $z^5 + 81z = 0$
- e) $z^2 - 2z + 2 = 0$
- f) $z^5 - z = 0$
- g) $z^3 + zi = 0$
- h) $z^2 - 1 - \sqrt{3}i = 0$
- i) $x^5 + \sqrt{3} + i = 0$
- j) $x^7 - \pi^{14}i = 0$
- k) $x^3 - 8x^2 + 21x - 20 = 0$
- l) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

41) Comprueba que $\sqrt{2}i$ y $2 - i$ son soluciones de la ecuación $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 10 = 0$ y encuentra las otras soluciones.

42) Hallar y representar los afijos de:

- a) $z = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3} + i}{1 + \sqrt{3}i}}$
- b) $z = \sqrt{\frac{i^5 - i^8}{\sqrt{2}i}}$
- c) $z = \sqrt[6]{(-1 - i) \cdot (1 + i)^3}$

43) Demuestra que para cualquier número natural n se verifica:

44) Demuestra que el número complejo $z = \cos a - i \operatorname{sen} a$ verifica:

a) $\frac{1}{z} = \cos a + i \operatorname{sen} a$

b) $\frac{1}{\bar{z}} = \cos a + \operatorname{sen} a$

c) Halla las raíces quintas de z .

45) Con ayuda del cociente de los números complejos

$z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = 1 + i$, calcula los valores exactos de

$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}$ y $\cos \frac{5\pi}{12}$.

46) Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Determinar b para que el módulo del cociente $\frac{b + 4i}{1 + i}$ sea $\sqrt{26}$.

b) La suma de dos números complejos conjugados es 24 y la suma de sus módulos es 26 . ¿De qué números complejos se trata?

c) La suma de dos números complejos es $5 - 3i$. El cociente de ambos es imaginario puro y la parte real del numerador es 4 . Halla dichos números.

47) Utilizando la fórmula de Moivre

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$$

Obtener $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$ en función de las razones del ángulo α . De igual forma hallar las expresiones de $\operatorname{sen} 3\alpha$ y $\cos 3\alpha$.

48) Calcula y representa las ocho primeras potencias del complejo $z = 1 + i$. Representa sus afijos en el plano complejo y comprueba que se encuentran sobre una superficie curva espiral.

49) Un cuadrado tiene sus vértices por encima del eje real. Si dos vértices consecutivos del cuadrado son $2 + i$ y $5 + 3i$, hallar los otros dos vértices-

50) Hallar las coordenadas de los vértices, el perímetro y el área de un triángulo cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[3]{-64}$.

51) Halla dos complejos conjugados tales que el triángulo que forman sus afijos con el origen sea equilátero y su área valga $2\sqrt{3}$.