NÚMEROS COMPLEJOS

I) Efectúa la siguiente operación y simplifica: $\dfrac{(1+3i)(1+2i)}{1+i}$

Solución

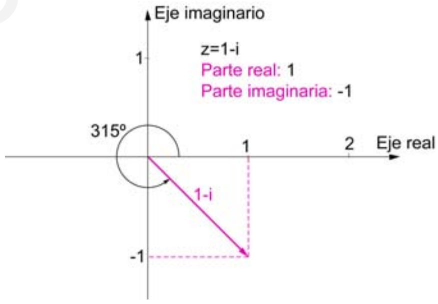
$$\frac{(1+3i)(1+2i)}{1+i}=\frac{1+2i+3i+6i^2}{1+i}=\frac{-5+5i}{1+i}=\left(\frac{-5+5i}{1+i}\right)\cdot\left(\frac{1-i}{1-i}\right)=$$

$$=\frac{-5+5i+5i-5i^2}{2}=\frac{10i}{2}=5i$$

II) Calcula: $\sqrt[3]{1-i}$

Solución

$$\sqrt[3]{1-i}\rightarrow\left\{\begin{array}{l} r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2} \\ \alpha=arctg\,\dfrac{-1}{1}=arctg(-1)=315^o \end{array}\right\}\rightarrow\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)_{315^o}}$$



$$\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)_{315^o}}\rightarrow\left\{\begin{array}{l} R=\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2} \\ \beta=\left\{\begin{array}{l} \beta_1=\dfrac{315^o+360^o\cdot 0}{3}=105^o \\ \beta_2=\dfrac{315^o+360^o\cdot 1}{3}=225^o \\ \beta_3=\dfrac{315^o+360^o\cdot 2}{3}=345^o \end{array}\right. \end{array}\right\}\rightarrow\sqrt[3]{1-i}=\left\{\begin{array}{l} z_1=\left(\sqrt[6]{2}\right)_{105^o} \\ z_2=\left(\sqrt[6]{2}\right)_{225^o} \\ z_3=\left(\sqrt[6]{2}\right)_{345^o} \end{array}\right.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

III) Escribe en forma polar:

a) $1+\sqrt{3}i$
b) $-1+\sqrt{3}i$
c) $1-\sqrt{3}i$
d) $-1-\sqrt{3}i$
e) $3\sqrt{3}+3i$
f) $-3\sqrt{3}-3i$
g) $2i$
h) -4
i) $-3i$

IV) Escribe en forma binómica:

a) 2_{60° d) 2_{180°

b) $1_{\frac{3\pi}{2}}$ e) 4_{750°

c) 5_{450° f) $6_{\frac{\pi}{3}}$

V) Hallar el módulo y el argumento de: a) $\dfrac{1+i}{1-i}$ b) $(1+i)2i$

VI) Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $2i\left(\dfrac{-i+2}{1+i}\right)$ b) $(-2i)^2\cdot\dfrac{1+3i}{4+4i}$

VII) Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $(3+i)(2+i)-(1-i)(2-2i)$ b) $(3-2i)+(1+2i)(6-2i)-(2-i)$

VIII) Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\dfrac{3_{45^\circ}2_{15^\circ}}{6_{30^\circ}}$ b) $\dfrac{2_{30^\circ}3_{60^\circ}}{3_{120^\circ}1_{300^\circ}}$ c) $\dfrac{2_{45^\circ}2_{15^\circ}}{4_{90^\circ}}$

IX) Halla: $\dfrac{i^{32}\cdot i^{17}}{i^2\cdot i^3}$

X) Halla las siguientes potencias: a) $(2-3i)^3$; b) $(3+i)^2$; c) i^{23}; d) $(2+2i)^4$; e) i^{27}; f) i^{48}; g) i^7; h) i^{33} ; i) i^{210}; j) i^{1121}

XI) Sabiendo que $z_1=3-2i$, que $z_2=4-3i$ y que $z_3=-3i$; calcula: a) $z_1+2z_2-z_3$;

b) $z_1\cdot(z_2+z_3)$; c) $2(z_1+z_2)-(z_3)^4$

XII) Calcula, expresando el resultado en forma polar: a) $(1+i)^6$; b) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$;

c) $(1-i)^4$

XIII) Calcula: a) $\sqrt{-i}$; b) $\sqrt[3]{1+i}$; c) $\sqrt{-16}$

XIV) Calcula: a) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1-\sqrt{3}i}}$; b) $\sqrt{-4}$; c) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{1-i}}$; d) $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{i}}$

XV) a) Opera la expresión $(1+3i)^2\cdot(3-4i)$ y b) calcula las raíces cúbicas del resultado.

XVI) Opera la expresión $\dfrac{(i^4-i^3)}{8i}$ y calcula las raíces cúbicas del resultado.

XVII) Si la raíz cúbica de un número es 2i, calcula las otras dos raíces y ese número.

XVIII) Calcular: $(-2 + 2i)^{64}$.

XIX) Calcular el conjugado del opuesto de: a) $(1 - 2i)^3$; b) $\dfrac{25}{3 + 4i}$; c) $\left(\dfrac{2 + i}{1 - 2i}\right)^2$

XX) Determina x para que el producto (3+2i)·(6+xi) sea:

a) un número real,
b) un número imaginario puro.

XXI) Determina los números reales x e y para que se cumpla: $\dfrac{x + 2i}{1 - i} + yi = 1$

XXII) Determina a para que el complejo $\dfrac{4 + ai}{1 - i}$ sea:

a) un número real,
b) un número imaginario puro.

XXIII) Resuelve las ecuaciones siguientes en el campo complejo. En todos los casos z es un número complejo: despéjalo y calcula su valor.

a) $(2 - 2i)\cdot z = 10 - 2i$

b) $\dfrac{z}{3 + i} = 2 - i$

c) $\dfrac{z}{3 + 4i} + \dfrac{2z + 5i}{1 - 2i} = 2 + 2i$

d) $\dfrac{z}{-z} + \dfrac{2z - 2i}{1 - i} = 3 - 2i$

XXIV) El cociente de dos números complejos es 1/2 y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcula sus módulos y sus argumentos.

XXV) El producto de dos números complejos es -27. Hallarlos sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro.

XXVI) El producto de dos números complejos es -2 y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es 1/2. Calcula sus módulos y sus argumentos.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

III)

a) 2_{60^o} d) 2_{240^o} g) 2_{90^o}

b) 2_{120^o} e) $\sqrt{6}_{\,30^o}$ h) 4_{180^o}

c) 2_{300^o} f) $\sqrt{6}\,210^o$ i) 3_{270^o}

IV)

a) $1+\sqrt{3}i$ d) -2

b) $-i$ e) $2\sqrt{3}+2i$

c) $5i$ f) $3+3\sqrt{3}i$

V) a) 1_{90^o} b) $\sqrt{8}_{\,135^o}$

VI) a) $3+i$ b) $-2-i$

VII) a) $5+9i$ b) $11+9i$

VIII) a) 1_{30^o} b) 2_{30^o} c) 1_{330^o}

IX) 1

X) a) -46-9i; b) 8+6i; c) –i; d) -64; e) –i; f) 1; g) –i; h) i; i)-1; j)i

XI) a) 11-5i; b) -26i; c) -67-10i

XII) a)8_{270^o}; b) 1_{240^o}; c) 4_{180^o}

XIII) a) $1_{135^o};1_{315^o}$; b) $\left(\sqrt[6]{2}\right)_{15^o};\left(\sqrt[6]{2}\right)_{135^o};\left(\sqrt[6]{2}\right)_{255^o}$; c) $4_{90^o};4_{270^o}$

XIV) a) $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)_{5^o};\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)_{125^o};\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)_{245^o}$; b) $2_{90^o};2_{270^o}$; c) $1_{30^o};1_{150^o};1_{270^o}$; d) $3_{30^o};3_{150^o};3_{270^o}$

XV) a) 50i b) $\left(\sqrt[3]{50}\right)_{30^o};\left(\sqrt[3]{50}\right)_{150^o};\left(\sqrt[3]{50}\right)_{270^o}$

XVI) $\left(\frac{1}{2}\right)_{105^o};\left(\frac{1}{2}\right)_{225^o};\left(\frac{1}{2}\right)_{345^o}$

XVII) $2_{210^o};2_{330^o}$. El número es -8i =8_{270^o}

XVIII) $\left(8^{32}\right)_{8640^o}=\left(8^{32}\right)$

XIX) a) $11+2i$; b) -3-4i c) 1

XX) a) x= -4, b) x=9

XXI) a) x= 4, y=3

XXII) a) a= -4, b) x=4

XXIII) a) 3+2i b) 7-i c) 4-3i d) 1-2i

XXIV) $\left(\frac{1}{2}\right)_{0^o};\left(\frac{1}{4}\right)_{0^o}$

XXV) 3_{60^o}, 9_{120^o}

XXVI) 1_{45^o}, 2_{135^o}. Otras soluciones: 1_{135^o}, 2_{45^o}, 1_{225^o}, 2_{315^o}, 1_{315^o}, 2_{225^o}