NÚMEROS COMPLEJOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los números complejos:

a) $x^2-2x+2=0$ *(Soluc: $1\pm i$)*

b) $x^2+3=0$ *(Soluc: $\pm\sqrt{3}\,i$)*

c) $x^2-2x+4=0$ *(Soluc: $1\pm\sqrt{3}i$)*

d) $x^2+x+1=0$ *(Soluc: $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*

e) $x^3-6x^2+21x-26=0$ *(Soluc: 2, $2\pm 3i$)*

f) $x^3+1=0$ *(Soluc: -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*

g) $x^4-1=0$ *(Soluc: ± 1, $\pm i$)*

h) $x^4-3x^3-2x^2+10x-12=0$ *(Soluc: -2, 3, $1\pm i$)*

Forma binómica de un complejo:

2. Completar (obsérvese el primer ejemplo):

COMPLEJO z	**PARTE REAL Re(z)**	**PARTE IMAGINARIA Im(z)**	**OPUESTO −z**	**CONJUGADO**
z=2+3i	Re(z)=2	Im(z)=3	−z=−2−3i	
z=3-i				
z=1+i				
z=3				
z=−2i				
z=i				

3. Dados los complejos $z_1=2+3i$, $z_2=-1+4i$ y $z_3=2-5i$, hallar:

a) $z_1+z_2=$ *(Soluc: 1+7i)*

b) $z_1+z_3=$ *(Soluc: 4−2i)*

c) $z_1-z_2=$ *(Soluc: 3−i)*

d) $z_3-z_2=$ *(Soluc: 3−9i)*

e) $3z_2+2z_3=$ *(Soluc: 1+2i)*

f) $2z_1-3z_2=$ *(Soluc: 7−6i)*

g) $z_3-3z_1+4z_2=$ *(Soluc: −8+2i)*

h) $z_1+\overline{z_2}=$ *(Soluc: 1−i)*

i) $z_3-\overline{z_3}=$ *(Soluc: -10i)*

j) $2\overline{z_1}-z_1=$ *(Soluc: 2-9i)*

4. Calcular **x** e **y** para que (2+xi)+(y+3i)=7+4i *(Soluc: x=1, y=5)*

5. Calcular:

a) (2+5i) (3+4i)= *(Soluc: -14+23i)*

b) (1+3i) (1+i)= *(Soluc: −2+4i)*

c) (1+i) (−1−i)= *(Soluc: −2i)*

d) (2−5i) i= *(Soluc: 5+2i)*

e) (2+5i) (2−5i)= *(Soluc: 29)*

f) (1+i) (1−i)= *(Soluc: 2)*

g) (5+2i) (3−4i)= *(Soluc: 23−14i)*

h) $(3+5i)^2=$ *(Soluc: −16+30i)*

i) (1+3i) (1−3i)= *(Soluc: 10)*

j) (−2−5i) (−2+5i)= *(Soluc: 29)*

k) (2+3i) 3i= *(Soluc: −9+6i)*

l) (3i) (−3i)= *(Soluc: 9)*

m) $(2+3i)^2=$ *(Soluc: −5+12i)*

n) $(6-3i)^2=$ *(Soluc: 27−36i)*

o) (2+3i) (1−i)= *(Soluc: 5+i)*

p) (1−3i) 2i= *(Soluc: 6+2i)*

q) (1+i) (2−3i)= *(Soluc: 5−i)*

r) (5+i) (5−i)= *(Soluc: 26)*

s) (4+3i) (4+2i)−(2+i) (3−4i)= *(Soluc: 25i)*

6. ¿Cómo es siempre el producto de dos complejos conjugados? Razonar la respuesta. *(Soluc: $\in IR^+$)*

7. Dados los complejos del ejercicio 2, hallar:

a) $z_1 \cdot z_2=$ *(Soluc: −14+5i)*
b) $z_1 \cdot z_3=$ *(Soluc: 19−4i)*
c) $z_3-z_2=$ *(Soluc: 3−9i)*
d) $z_1\,(z_3+z_2)=$ *(Soluc: 5+i)*
e) $z_1-z_2 \cdot z_3=$ *(Soluc: −16−10i)*
f) $(z_1)^2=$ *(Soluc: −5+12i)*
g) $(z_1-z_3)^2=$ *(Soluc: −64)*
h) $z_1 \cdot \overline{z_1} =$ *(Soluc: 13)*
i) $z_1 - \overline{z} =$ *(Soluc: 6i)*
j) $z_2\,(2z_1-3z_3)=$ *(Soluc: −82−29i)*
k) $(3z_1+2z_2)^2=$ *(Soluc: −273+136i)*
l) $z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot z_3 =$ *(Soluc: 75−28i*
m) $z_1^{\,2} - \overline{z_1}^{\,2}=$

8. Dados los complejos 2−mi y 3−ni hallar **m** y **n** para que su producto sea 8+4i.
(Soluc: m_1=−2 y n_1=1; m_2=2/3 y n_2=−3)

9. Resolver la ecuación (a+i) (b−3i)=7−11i *(Soluc: a_1=4 y b_1=1; a_2=−1/3 y n_2=−12)*

10. Calcular:

a) $\frac{1+3i}{1+i}=$ $(Sol: 2+i)$

b) $\frac{2+5i}{3+4i}=$ $\left(Sol: \frac{26}{25}+\frac{7}{25}i\right)$

c) $\frac{1+i}{1-i}=$ $(Sol: i)$

d) $\frac{3+5i}{1-i}=$ $(Sol: -1+4i)$

e) $\frac{2-5i}{i}=$ $(Sol: -5-2i)$

f) $\frac{20+30i}{3+i}=$ $(Sol: 9+7i)$

g) $\frac{i}{3-2i}=$ $\left(Sol: -\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i\right)$

h) $\frac{1+i}{i}=$ $(Sol: 1-i)$

i) $\frac{1+2i}{2-i}=$ $(Sol: i)$

j) $\frac{1-i}{2+3i}=$ $\left(Sol: -\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i\right)$

k) $\frac{19-4i}{2-5i}+\frac{3+2i}{i}=$ $(Sol: 4)$

m) $\frac{(5-3i)(1+i)}{\overline{1-2i}}=$ $\left(Sol: \frac{12}{5}-\frac{14}{5}i\right)$

n) $\frac{(3+2i)^2+3-2i}{(5+i)^2}=$ $\left(Sol: \frac{73}{169}+\frac{40}{169}i\right)$

o) $\frac{(3-2i)(1+i)}{\overline{1+i}-2i}=$ $\left(Sol: \frac{1}{5}+\frac{8}{5}i\right)$

p) $\frac{\frac{1+i}{i}}{\frac{2+i}{1-i}}=$ $\left(Sol: -\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i\right)$

q) $\frac{3+2i}{i}-\frac{\overline{11+2i}}{3+4i}=$ $(Sol: 1-i)$

r) $\frac{10-10i}{i}+\frac{15-25i}{\overline{2+i}}=$ $(Sol: 1-17i)$

s) $\frac{1+ai}{a-i}=$ $(Sol: i)$

t) $\frac{-a+bi}{b+ai}=$ $(Sol: i)$

l) $\frac{2-i}{3+i}-\frac{1}{2i}=$ $\left(Sol: \frac{1}{2}\right)$

12. Calcular las siguientes **potencias sucesivas de i**:

a) $i^{12}=$ *(Soluc: 1)*
b) $i^{77}=$ *(Soluc: i)*
c) $i^{125}=$ *(Soluc: i)*
d) $i^{723}=$ *(Soluc: −i)*
e) $i^{2344}=$ *(Soluc: 1)*
f) $\frac{1}{i}=$ *(Soluc: −i)*
g) $\frac{1}{i^2}=$ *(Soluc: −1)*
h) $\frac{1}{i^3}=$ *(Soluc: i)*
j) $\frac{1}{i^5}=$ *(Soluc: −i)*
k) $i^{-6}=$ *(Soluc: −1)*
l) $i^{544}=$ *(Soluc: 1)*
m) $i^{6254}=$ *(Soluc: −1)*
n) $i^{-1}=$ *(Soluc: −i)*
o) $i^{-527}=$ *(Soluc: i)*
i) $i^{-4}=$ *(Soluc: 1)*

13. Calcular las siguientes **operaciones combinadas en forma binómica**:

a) $(2+i)^3=$ *(Soluc: 2+11i)*

b) $(1+i)^3=$ *(Soluc: –2+2i)*

c) $(2-3i)^3$ *(Soluc: –46–9i)*

d) i^{-131} *(Soluc: i)*

e) $\dfrac{i^7-1}{1+i}=$ *(Soluc: –1)*

f) $\dfrac{2i-1}{i^{45}}+\dfrac{4-3i}{\overline{1+2i}}=$ *(Soluc: 4+2i)*

g) $\dfrac{(3-2i)^2+(2-3i)^2}{i^{12}+i^{-6}}=$ *(Soluc: 12–12i)*

h) $\dfrac{(2+3i)(1-i)-(3+4i)^2}{2i^{14}-i^{-7}}$ $\left(Soluc: -\dfrac{1}{5}+\dfrac{58}{5}i\right)$

i) $\dfrac{(3-2i)(3+i)-(2i-3)^2}{i^{23}-i^{13}}$ $\left(Soluc: -\dfrac{9}{2}+3i\right)$

j) $\dfrac{1-(2+3i)^2(1-2i)}{2i^{77}-i^{726}}$ $\left(Soluc: -\dfrac{62}{5}+\dfrac{14}{5}i\right)$

k) $\dfrac{(2+3i)(3-2i)-(2-3i)^2}{17\,(1-i^{13})}=$ *(Soluc: i)*

l) $-2-5i-\dfrac{10-10i-5(1+i)}{8+2i-(5+3i)}$ *(Soluc: –5–i)*

m) $\dfrac{(2-3i)^2-(2+3i)(3-2i)}{3i^{17}-1}=$ $\left(Soluc: -\dfrac{17}{5}+\dfrac{34}{5}i\right)$

n) $\dfrac{(3+i)(3-2i)-(2i-3)^2}{2i^{20}-i^{13}}+\dfrac{4}{5i}$ $\left(Soluc: \dfrac{3}{5}+4i\right)$

o) $\dfrac{(2-3i)^2-(2+3i)(3-2i)}{3i^{17}-1}-\dfrac{4}{5i^{-25}}$ $\left(Soluc: -\dfrac{17}{5}+6i\right)$

14. ¿Cuánto ha de valer **m** para que el complejo z=(m–2i) (2+4i) sea un número real? ¿E imaginario puro? ¿De qué números se trata? *(Soluc: m=1 o m=–4; z=10 y z=–20i, respectivamente)*

15. Determinar **x** para que el producto z=(2–5i) (3+xi) sea:

a) Un número real. ¿Qué número resulta? *(Soluc: x=15/2; z=87/2)*

b) Un número imaginario puro. ¿Qué complejo z se obtiene? *(Soluc: x=–6/5; z=–87i/5)*

16. a) Hallar **x** con la condición de que $(x-2i)^2$ sea un número imaginario puro. *(Soluc: x=±2)*

b) Ídem con $(3x-2i)^2$ *(Soluc: x=±2/3)*

c) Ídem con $(2+xi)^2$ *(Soluc: x=±2)*

17. Hallar **x** e **y** de modo que $\dfrac{3-xi}{1+2i}=y+2i$ *(Soluc: x=–16; y=7)*

18. Hallar **x** para que el cociente $\dfrac{x+3i}{3+2i}$ sea un número imaginario puro. ¿De qué número imaginario se trata? *(Soluc: x=–2; i)*

19. Determinar **k** para que el cociente $z=\dfrac{-2+ki}{k-i}$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número resulta? $\left(Sol: k=\pm\sqrt{2};\ z=\pm\sqrt{2}\right)$

b) Un número imaginario puro. ¿Qué número es? $\left(Sol: k=0;\ z=-2i\right)$

20. Demostrar la siguiente igualdad, obtenida de manera fortuita por el insigne filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716):

$$\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}+\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}=\sqrt{6}$$

21. Hallar dos complejos de los que sabemos que su diferencia es un número real, su suma tiene la parte real igual a 1 y su producto es –7+i *(Soluc: 3+i y –2+i)*

22. Determinar los valores de **a** y **b** para que el complejo z=a+bi satisfaga la ecuación $z^2=\overline{z}$

$\left(Soluc: \ z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \ \ z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \ \ z_3=0, \ \ z_4=1\right)$

23. Comprobar que los números complejos 2±3i verifican la ecuación $x^2-4x+13=0$

24. Hallar una ecuación polinómica cuyas raíces sean:

a) 1±3i *(Soluc: $x^2-2x+10=0$)*

b) 5±2i *(Soluc: $x^2-10x+29=0$)*

c) 2+i y 3+5i *(Soluc: $x^2-(5+6i)x+1+13i=0$)*

d) ±i *(Soluc: $x^2+1=0$)*

Forma polar de un complejo:

26. Representar los siguientes complejos, sus opuestos y sus conjugados:

a) $z_1=3+4i$ **b)** $z_2=1-i$ **c)** $z_3=-3+i$ **d)** $z_4=-2-5i$ **e)** $z_5=7i$

f) $z_6=-7$ **g)** i **h)** $-\sqrt{2}\,i$

27. Pasar a forma polar los siguientes complejos (**se recomienda representarlos previamente, para así elegir correctamente su argumento**):

a) $4+4\sqrt{3}\,i=$ *(Soluc: 8_{60°)*

b) $3-3\sqrt{3}\,i=$ *(Soluc: 6_{300°)*

c) $-\sqrt{2}+i=$ $\left(Soluc: \sqrt{3}_{144^\circ\ 44'}\right)$

d) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i=$ *(Soluc: 2_{225°)*

e) $\sqrt{3}-i=$ *(Soluc: 2_{330°)*

f) 1+i $\left(Soluc: \sqrt{2}_{45^\circ}\right)$

g) 1−i $\left(Soluc: \sqrt{2}_{315^\circ}\right)$

h) −1−i $\left(Soluc: \sqrt{2}_{225^\circ}\right)$

i) i *(Soluc: 1_{90°)*

j) −i *(Soluc: 1_{270°)*

k) 3+4i *(Soluc: $5_{53^\circ\ 8'}$)*

l) 3−4i *(Soluc: 5_{306°)*

m) −3+4i *(Soluc: $5_{126^\circ\ 52'}$)*

n) −5+12i *(Soluc: $13_{112^\circ\ 37'}$)*

o) −8i *(Soluc: 8_{270°)*

p) 8 *(Soluc: 8_{0°)*

q) −8 *(Soluc: 8_{180°)*

r) 3+2i $\left(Soluc: \sqrt{13}_{33^\circ 41'}\right)$

s) −2−5i $\left(Soluc: \sqrt{29}_{248^\circ 12'}\right)$

28. a) Hallar **m** para que el número complejo m+3i tenga módulo 5. Justificar gráficamente la solución. *(Soluc: m=±4)*

b) Hallar **m** para que su argumento sea 60º *(Soluc: $m=\sqrt{3}$)*

29. Hallar un número complejo tal que |z|=3 e Im(z)=-2. Justificar gráficamente la solución. $\left(Soluc: \ z_1=\sqrt{5}-2i, \ \ z_2=-\sqrt{5}-2i\right)$

30. Hallar un número complejo del 2º cuadrante que tiene por módulo 2 y tal que Re(z)=−1. Expresarlo en forma polar. Justificar gráficamente la solución. $\left(Soluc: \ -1+\sqrt{3}\,i=2_{120^\circ}\right)$

31. Hallar un complejo de argumento 45º tal que sumado a 1+2i dé un complejo de módulo 5 *(Soluc: 2+2i)*

32. Encontrar un complejo tal que sumándolo con 1/2 dé otro complejo de módulo $\sqrt{3}$ y argumento 60º

$\left(Soluc: \frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{3}{2}i\right)$

33. Pasar a forma binómica:

a) $4_{30°}$ $\left(Soluc:\ 2\sqrt{3}+2i\right)$

b) $4_{90°}$

c) $2_{0°}$

d) 5_{π}

e) $2_{3\pi/2}$

f) $1_{90°}$

g) $1_{30°}$ $\left(Soluc:\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$

h) $2_{60°}$ $\left(Soluc:\ 1+\sqrt{3}\,i\right)$

i) $6_{225°}$ $\left(Soluc:\ -3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i\right)$

j) $4_{120°}$ $\left(Soluc:\ -2+2\sqrt{3}i\right)$

k) $2_{150°}$ $\left(Soluc:\ -\sqrt{3}+i\right)$

l) $3_{60°}$ $\left(Soluc:\ \frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$

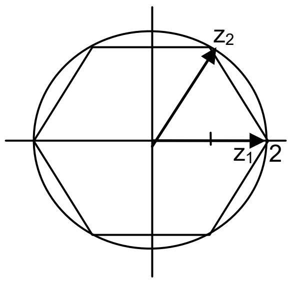
m) $3_{50°}$ *(Soluc: 1,929+2,298i)*

n) $2_{180°}$ *(Soluc: −2)*

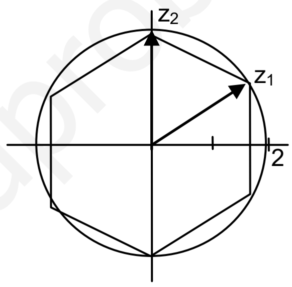
o) $1_{210°}$ $\left(Soluc:\ -\frac{\sqrt{\ }}{2}-\frac{i}{2}\right)$

34. Hallar los números complejos, en forma polar y binómica, que corresponden a los vértices de estos hexágonos:

a)



b)



(Soluc: a) $z_1=2_{0°}=2$; $z_4=-z_1$; $z_2=2_{60°}=1+\sqrt{3}i$; $z_6=\overline{z}_2$; $z_5=-z_2$; $z_3=-z_6$ *b)* $z_1=2_{30°}=\sqrt{3}+i$; $z_4=-z_1$; $z_6=\overline{z}_1$; $z_3=-z_6$; $z_2=2_{90°}=2i$; $z_5=-z_2$*)*

35. Determinar el valor de **a** para que el complejo z=(3−6i) (2−ai) sea:

a) Un número real. ¿De qué número se trata? *(Sol: a=−4; 30)*

b) Un número imaginario puro. ¿De qué número se trata? *(Sol: a=1; −15i)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1^er^ y 3^er^ cuadrantes. ¿De qué número se trata? *(Sol: a=6; −30−30i)*

36. Determinar el valor de **m** para que el complejo $z=\frac{2-mi}{8-6i}$ sea:

a) Un número real. ¿Qué número es? *(Soluc: m=3/2; 1/4)*

b) Imaginario puro. ¿Cuál en concreto? *(Soluc: m=−8/3; i/3)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 2º y 4º cuadrantes. *(Soluc: m=14; 1−i)*

37. Determinar el valor de **a** para que el complejo z=(2+3i) (−2+ai) sea:

a) Un número real. *(Soluc: a=3)*

b) Un número imaginario puro. *(Soluc: a=−4/3)*

c) Tal que su afijo esté en la bisectriz del 1^er^ y 3^er^ cuadrantes. *(Soluc: a=−10)*

38. a) Dado $z=2_{45°}$, hallar $\overline{z}$ en polar. *(Soluc: $2_{315°}$)*

b) Dado $z=1_{30°}$, hallar $-z$

c) Si $z=2_{30°}$, hallar su conjugado y su opuesto.

d) Hallar un número complejo y su opuesto sabiendo que su conjugado es $\overline{z}=3_{70°}$

39. Representar las siguientes regiones del plano complejo:

a) $Im(z)=-2$ *(Sol: recta horizontal)*
b) $Re(z)=Im(z)$ *(Sol: bisectriz del 1er cuadrante)*
c) $-1<Re(z)\le 3$ *(Sol: banda vertical)*
d) $Im(z)<2$ *(Sol: semiplano)*
e) $|z|=5$ *(Sol: circunferencia)*
f) $|z|<3$ *(Sol: región circular)*
g) $-1\le|z|<3$ *(Sol: anillo)*
h) $Arg(z)=30^\circ$ *(Sol: recta)*
i) $Re(z)=-3$ *(Sol: recta vertical)*
j) $|z|\ge 4$
k) $Arg(z)=90^\circ$

40. **<u>TEORÍA</u>:**

a) Demostrar que $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$

b) Si $z=r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha+180^\circ}$ y $r_{360^\circ-\alpha}$?

c) El producto de dos complejos imaginarios, ¿puede ser real? Poner un ejemplo.

d) ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?

e) ¿Qué condición debe cumplir un número complejo z para que $\bar{z}=\frac{1}{z}$ *(Soluc: Su módulo tiene que ser 1)*

Producto y cociente en forma polar:

41. **a)** Dados los números complejos 3_{30° y 5_{60°, comprobar que el producto en forma polar y en forma binómica dan el mismo complejo. *(Soluc: 15i)*

b) Ídem con 3i y 2–2i $\left(Soluc:\ 6+6i=6\sqrt{2}_{\ 45^\circ}\right)$

42. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

a) $3_{45^\circ}\cdot 2_{15^\circ}$ $\left(Soluc:\ 6_{60^\circ}=3+3\sqrt{3}\,i\right)$

b) $3_{150^\circ}\cdot 4_{45^\circ}$ $\left(Soluc:\ 12_{195^\circ}\cong -11{,}59-3{,}11i\right)$

c) $1_{33^\circ}\cdot 2_{16^\circ}\cdot 3_{41^\circ}$ $\left(Soluc:\ 6_{90^\circ}=6i\right)$

d) $3_{12^\circ}\cdot 4_{17^\circ}\cdot 2_{1^\circ}$ $\left(Soluc:\ 24_{30^\circ}=12\sqrt{3}+12i\right)$

e) $2_{106^\circ}:1_{61^\circ}$ $\left(Soluc:\ 2_{45^\circ}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)$

f) $9_{37^\circ}:3_{97^\circ}$ $\left(Soluc:\ 3_{300^\circ}=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$

g) $(2_{40^\circ})^3$ $\left(Soluc:\ 8_{120^\circ}\cong -4+4\sqrt{3}i\right)$

h) $1_{33^\circ}:2_{16^\circ}\cdot 3_{41^\circ}$ $\left(Soluc:\ \left(\frac{3}{2}\right)_{58^\circ}\cong 0{,}79+1{,}27i\right)$

i) $3_{12^\circ}:4_{17^\circ}:2_{1^\circ}$ $\left(Soluc:\ \left(\frac{3}{8}\right)_{354^\circ}\cong 0{,}37-0{,}04i\right)$

43. El complejo de argumento 80º y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50º. Escribir en forma binómica el otro complejo. $\left(Soluc:\ 2\sqrt{3}+2i\right)$

44. Efectuar las siguientes operaciones en forma polar y pasar el resultado a binómica:

a) $\frac{2_{15^\circ}\cdot 4_{135^\circ}}{8_{170^\circ}}=$ $\left(Soluc:\ 1_{340^\circ}\cong 0{,}94-0{,}34i\right)$

b) $\frac{2_{15^\circ}\cdot(1+i)}{2_{-15^\circ}\cdot(1-i)}=$ $\left(Soluc:\ 1_{120^\circ}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

c) $(1+\sqrt{3}\ i)(1+i)(\sqrt{3}-i)=$ $\left(Soluc:\ 4\sqrt{2}_{\ 75^\circ}\cong 1{,}46+5{,}46i\right)$

45. Hallar el valor de α para que el producto $3_{\pi/2}\cdot 1_\alpha$ sea:
a) Un número real positivo. *(Soluc: α=3π/2)*

b) Un número real negativo. *(Soluc: $\alpha=\pi/2$)*

46. Hallar el valor de α para que el cociente $5_{\pi} : 3_{\alpha}$ sea:

a) Un número real positivo. *(Soluc: $\alpha=\pi$)*

b) Un número real negativo. *(Soluc: $\alpha=0$)*

c) Un número imaginario puro con su parte imaginaria positiva. *(Soluc: $\alpha=\pi/2$)*

d) Un número imaginario puro con su parte imaginaria negativa. *(Soluc: $\alpha=3\pi/2$)*

e) " " " situado en la bisectriz del 2º cuadrante

47. Sin necesidad de efectuar el producto en binómica, hallar cuánto ha de valer **m** para que el complejo z=(m−2i) (2+4i) tenga módulo 10 *(Soluc: $m=\pm 1$)*

48. Sin necesidad de efectuar el cociente, determinar el valor de **a** para que el módulo del complejo $z=\frac{a+2i}{1-i}$ sea 2 *(Soluc: $a=\pm 2$)*

49. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es −8 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es la unidad. (Ayuda: utilizar la forma polar) *(Soluc: $z_1=4_{120^\circ}$ y $z_2=2_{60^\circ}$)*

50. Hallar dos números complejos sabiendo que su producto es 4 y el cociente de uno entre el cuadrado del otro es 2 $\left(\textit{Soluc: } z_1=\left(2\sqrt[3]{4}\right)_{0^\circ} \text{ y } z_2=\left(\sqrt[3]{2}\right)_{0^\circ}\right)$

51. Interpretar geométricamente el resultado de multiplicar el complejo $z=a+bi=r_{\alpha}$ por la unidad imaginaria i.
(Soluc: Se trata de una rotación de 90º en el plano complejo)

52. Calcular cos 75º y sen 75º mediante el producto $1_{30^\circ}\cdot 1_{45^\circ}$ $\left(\textit{Soluc: } \cos 75^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\ \operatorname{sen} 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

Potencias en forma polar:

53. Calcular, aplicando el método más apropiado (es decir, operando en polar o en binómica) en cada caso; dar el resultado en forma binómica:

a) $(1+i)^2$ *(Soluc: 2i)*

b) $(2-2i)^2$ *(Soluc: −8i)*

c) $(1+i)^3$ *(Soluc: −2+2i)*

d) $(2+3i)^3$ *(Soluc: −46+9i)*

e) $(1-i)^4$ *(Soluc: −4)*

f) $(-2+i)^5$ *(Soluc: 38+41i)*

g) $\frac{(1+i)^2}{4+i}$ $\left(\textit{Soluc: } \frac{2}{17}+\frac{8}{17}i\right)$

h) $\frac{2+i}{(1+i)^2}$ $\left(\textit{Soluc: } \frac{1}{2}-i\right)$

i) $(i^4+i^{-13})^3$ *(Soluc: −2−2i)*

j) $(1+i)^{20}$ *(Soluc: −1024)*

k) $(-2+2\sqrt{3}\,i)^6$ *(Soluc: 4096)*

l) $\frac{i^7-i^{-7}}{2i}$ *(Soluc: −1)*

m) $(4-4\sqrt{3}\,i)^3$ *(Soluc: −512)*

n) $(-2+2\sqrt{3}\,i)^4$ $\left(\textit{Soluc: } -128+128\sqrt{3}i\right)$

o) $(\sqrt{3}-i)^5$ $\left(\textit{Soluc: } -16\sqrt{3}-16i\right)$

p) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3i}{2}\right)^3$ *(Soluc: 27i)*

q) $(-1+i)^{30}$ *(Soluc: $2^{15}i$)*

r) $\frac{(-1+i)^2}{(1+i)^3}$ $\left(\textit{Soluc: } -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)$

s) $(2+2\sqrt{3}\,i)^4$ $\left(Soluc:\ -128-128\sqrt{3}i\right)$

t) $(4+4\sqrt{3}\,i)^4$ $\left(Soluc:\ -2048-2048\sqrt{3}i\right)$

u) $(2+2\sqrt{3}\,i)^2$ $\left(Soluc:\ -8+8\sqrt{3}i\right)$

v) $(1+i)^5$ *(Soluc: −4−4i)*

w) $(1+2i)^3$

x) $(2+i^5)^3$ *(Soluc: 2+5i)*

y) $(3+3i)^5$ *(Soluc: −972−972i)*

z) $\dfrac{(2\sqrt{3}-2i)^8}{(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i)^6}$ $\left(Soluc:\ \left|\frac{1}{4}\right)_{30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{8}\ \ \frac{1}{8}i\right)$

α) $\dfrac{(1-\sqrt{3}\,i)^3\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)}{(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i)^2}$ $\left(Soluc:\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

β) $\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)^2\,(-1-i)^4}{(-1+i)^3\,i}$ $\left(Soluc:\ 4\sqrt{2}_{135^\circ}=-4+4i\right)$

γ) $\dfrac{(\ 2\sqrt{3}-2\,i)^5}{(-4+4\sqrt{3}\,i)^3\ 2i}$ $\left(Soluc:\ 1_{240^\circ}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

δ) $\dfrac{(-2\sqrt{3}\ \ 2\,i)^4}{(-1+\sqrt{3}\,i)^3\,(2-2i)^2}=$ $\left(Soluc:\ 4_{210^\circ}=-2\sqrt{3}-2i\right)$

ε) $\dfrac{\left(2-2\sqrt{3}\,i\right)^3}{\left(-\sqrt{3}\ \ i\right)^4\cdot i}=$ $\left(Soluc:\ 2_{210^\circ}=-\sqrt{3}-i\right)$

ζ) $\left[\dfrac{\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)}{-6}\right]^3$ *(Soluc: −i)*

54. Dados los complejos $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=3i$ y $z_3=1+i$, calcular las siguientes expresiones, dando el resultado en binómica:

a) $\dfrac{z_1+z_2}{z_3}$ **b)** $z_1\cdot z_3$ **c)** $(z_1)^4$ **d)** $\overline{z_2}$ $\left(Sol:\ a)\ \frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i;\ b)(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-)i;\ c)-8+8\sqrt{3}i;\ d)-3i\right)$

55. Dado el complejo $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$, calcular $z^5\cdot\overline{z}$ *(Soluc: −64)*

56. **a)** Aplicando la fórmula de De Moivre[1], hallar sen 3α y cos 3α. Comprobar las expresiones obtenidas sustituyendo valores apropiados de α (p.ej. α=30º)

(Soluc: sen 3α=3sen α−4sen^{3}α; cos 3α=4cos^{3}α−3cos α)

b) Ídem para sen 4α y cos 4α

c) Ídem para las ya conocidas sen 2α y cos 2α

Raíces de un nº complejo:

57. Calcular las siguientes raíces (dando el resultado en binómica en aquellos apartados marcados con **(*)**), y representarlas en el plano complejo:

a) $\sqrt[4]{1+i}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[8]{2}_{11,25^\circ};\ \sqrt[8]{2}_{101,25^\circ};\ \sqrt[8]{2}_{191,25^\circ};\ \sqrt[8]{2}_{281,25^\circ}\right)$

b) $\sqrt[3]{1-i}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[6]{2}_{105^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{225^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{345^\circ}\right)$

(*) c) $\sqrt[4]{\dfrac{-4}{1-\sqrt{3}\,i}}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[4]{2}_{60^\circ};\ \sqrt[4]{2}_{150^\circ};\ \sqrt[4]{2}_{240^\circ};\ \sqrt[4]{2}_{330^\circ}\right)$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-1+3i}{2-i}}$ $\left(Soluc:\ \sqrt[6]{2}_{45^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{165^\circ};\ \sqrt[6]{2}_{285^\circ}\right)$

(*) e) $\sqrt[3]{-i}$ $\left(Soluc:\ i;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i\right)$

(*) f) $\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -0,97+0,26i;\ 0,26-0,97i\right)$

(*) g) $\sqrt{i}$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

h) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ $\left(Soluc: 0,89_{95º;}\ 0,89_{215º;}\ 0,89_{335º}\right)$

(*) i) $\sqrt[3]{8i}$ $\left(Soluc: 2i;\ \pm\sqrt{3}+i\right)$

(*) j) $\sqrt[4]{-1}$ $\left(Soluc: \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

(*) k) $\sqrt[3]{8}$ $\left(Soluc: 2;\ -1\pm\sqrt{3}\,i\right)$

(*) l) $\sqrt[4]{-2+2\sqrt{3}\,i}$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i;\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$

m) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,i}$ $\left(Soluc: 2_{100º;}\ 2_{220º;}\ 2_{340º}\right)$

(*) n) $\sqrt[3]{\frac{8+8i}{1-i}}$ $\left(Soluc: -2i;\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}+i\right)$

o) $\sqrt[4]{-2+2i}$ $\left(Soluc: \sqrt[8]{8}_{\,33,75º;}\ \sqrt[8]{8}_{\,123,75º;}\ \sqrt[8]{8}_{\,213,75º;}\ \sqrt[8]{8}_{\,303,75º}\right)$

(*) p) $\sqrt[4]{-16}$ $\left(Soluc: \pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i\right)$

q) $\sqrt[5]{-243}$ $\left(Soluc: 3_{30º;}\ 3_{108º;}\ 3_{180º};\ 3_{252º;}\ 3_{324º}\right)$

(*) r) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,i}$ $\left(Soluc: \sqrt{3}+i;\ -1+\sqrt{3}\,i;\ -\sqrt{3}-i;\ 1-\sqrt{3}\,i\right)$

(*) s) $\sqrt[3]{\frac{-1-i}{-1+i}}$

(*) t) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

(*) u) $\sqrt[3]{\frac{-8+8i}{1+i}}$

(*) v) $\sqrt[4]{\frac{-4}{1-\sqrt{3}\,i}}$

(*) w) $\sqrt[4]{\frac{-16i}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}}$

x) $\sqrt[3]{-1}$

y) $\sqrt{-36}$

z) $\sqrt[3]{-27}$

α) $\sqrt[6]{729i}$

β) $\sqrt[4]{16_{180º}}$

(*) γ) $\sqrt[4]{\frac{8\sqrt{3}+8i}{-\sqrt{3}+i}}$ $\left(Soluc: \frac{\sqrt[4]{8}}{2}+\frac{\sqrt[4]{72}}{2}i;\ -\frac{\sqrt[4]{72}}{2}+\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i;\ -\frac{\sqrt[4]{8}}{2}-\frac{\sqrt[4]{72}}{2}i;\ \frac{\sqrt[4]{72}}{2}-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}i\right)$

(*) δ) $\sqrt[3]{\frac{i^6+i^{-6}}{-2i}}$

58. <u>TEORÍA</u>:

a) El número 4+3i es la raíz cuarta de un cierto complejo z; hallar las otras tres raíces.

b) ¿Pueden ser 2+i, −2+i, −1−2i y 1−2i las raíces cuartas de un complejo? Justificar la respuesta.

c) ¿Pueden ser 2_{28°, 2_{100°, 2_{172°, 2_{244° y 2_{316° las raíces de un complejo? ¿De cuál?

d) El complejo 3_{40° es vértice de un pentágono regular. Hallar los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

e) Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es i+i. Hallar z y las otras raíces cúbicas.

59. a) Hallar las raíces cúbicas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$\left(Soluc: 1;\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

b) Hallar las raíces cuartas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$(Soluc: \pm 1;\ \pm i)$

c) Hallar las raíces quintas de la unidad en forma polar, y dibujarlas.

$(Soluc: 1_{0^\circ;} 1_{72^\circ;} 1_{144^\circ};\ 1_{216^\circ;} 1_{288^\circ})$

d) Hallar las raíces sextas de la unidad en forma binómica, y dibujarlas.

$\left(Soluc: \pm 1;\ \pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

60. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los complejos. Dibujar los afijos de las raíces:

a) $x^3+8=0$ *(Soluc: −2,* $1\pm\sqrt{3}i$*)*

b) $x^4-16=0$ *(Soluc: ±2, ±2i)*

c) $ix^4+16=0$

d) $x^4+1=0$ $\left(Soluc: \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$