Tema 3: Geometría Analítica. Lugares geométricos.

"En la mayoría de las Ciencias, una generación destruye lo que otra ha construido y lo que una ha establecido otra lo deshace. Sólo en matemáticas, cada generación añade un piso nuevo a la antigua estructura."

Herman Hankel (1839-1873)

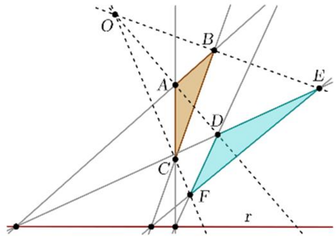
3.0.- Introducción

Las matemáticas se asemejan a un gran edificio con muchas estancias aparentemente diferentes que constituyen las diversas ramas de esta Ciencia. Así, existe una estancia dedicada a la geometría, otra dedicada a la Aritmética, al Algebra, a la Estadística,….

En determinadas ocasiones, surge la figura de un genial matemático que abre la vía de comunicación entre dos estancias que, hasta ese momento, se consideraban independientes, de tal manera que sus contenidos se relacionan y se enriquecen con nuevos resultados. Esto es lo que sucedió en el siglo XVII cuando Fermat y Descartes aplicaron métodos algebraicos al estudio de los problemas geométricos, dando inicio a la llamada geometría analítica.

La clave de la misma son los sistemas de referencia ortonormales, que permiten asignar coordenadas a los puntos del plano o del espacio.

La "invención" de la geometría analítica representa uno de los acontecimientos más importantes en la historia de la Ciencia matemática. El desarrollo del álgebra y la maduración de su cálculo simbólico durante los siglos XV y XVI propició que ambos autores pudiesen concebir la utilización de las herramientas algebraicas para el tratamiento de problemas geométricos, con lo que se abrió un nuevo mundo de posibilidades tanto para la geometría como para el Algebra.



Esta unidad de la "Geometría en el plano", examinaremos los conceptos básicos de la geometría analítica, comprobando que es posible trabajar con puntos, rectas y otros tipos de figuras planas empleando, exclusivamente, números reales y métodos algebraicos.

Los contenidos establecidos para la unidad van a propiciar un primer contacto con la otra de las herramientas propias de la geometría: los vectores en el plano, sus propiedades y sus operaciones, contenidos casi nuevos para los alumnos que llegan de la etapa obligatoria.
Hay magnitudes como la fuerza, el desplazamiento, la velocidad, la aceleración…… que no quedan completamente determinadas mediante valores numéricos; se necesita conocer, también, la dirección y el sentido con que se manifiestan.

Fue el matemático Francés Lagrange (1736-1813) quien a finales del siglo XVIII, "aritmetizó" las magnitudes vectoriales; idea que dio al lugar con el tiempo a la "teoría de vectores" de gran utilidad para la física y la tecnología.
Este primer acercamiento por parte de los alumnos a la geometría analítica del plano, conduce a la recta vista como un conjunto de puntos, cuyas coordenadas cartesianas verifican una relación matemática concreta, así como a los planteamientos de incidencia y paralelismo propios de la geometría afín; cuya continuación natural, en cuanto al punto de vista cartesiano, significará abordar otro tipo de situaciones geométricas: las relacionadas con problemas métricos.

3.1.- Vectores en el plano

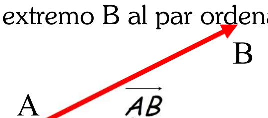
Existen magnitudes, como la temperatura, que quedan perfectamente determinadas completamente dando un valor, o un escalar. Decimos que son *magnitudes escalares*.

Sin embargo, existen otras muchas magnitudes físicas, como la fuerza, que para determinarlas completamente ha de indicarse su módulo, su sentido y su dirección. Estas magnitudes se llaman *magnitudes vectoriales*.

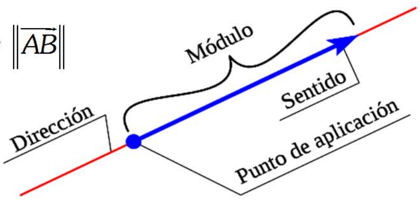
Las magnitudes vectoriales se representan mediante vectores: $\vec{F},\vec{V},\vec{a}$...

3.1.1.- Vectores fijos.

Dados dos puntos A y B del plano $\mathbb{R}^2$, se denomina vector fijo de origen A y extremo B al par ordenado (A,B). Se le representa por $\vec{AB}$.

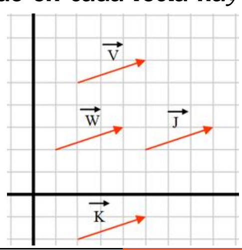


Así pues, todo vector fijo viene caracterizado por una longitud (módulo), una dirección y un sentido.



- ***Módulo:*** Es la distancia entre los puntos A y B, lo representaremos por $\left\|\vec{AB}\right\|$
- ***Dirección:*** Es la dirección de la recta que pasa por A y B y la de todas las rectas paralelas a ella.
- ***Sentido:*** Es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos de A a B. (Vemos que en cada recta hay dos sentidos, el que va de A a B y el que va de B a A.)

Decimos que dos vectores fijos son ***equipolentes*** si tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido.

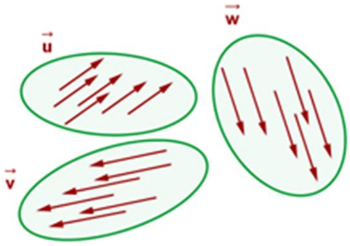


En la figura adjunta, los vectores $\vec{V},\vec{W},\vec{J}$ y $\vec{K}$ son todos equipolentes.

3.1.2.- Vectores libres.

Llamamos ***vector libre***, al conjunto de todos los vectores equipolentes entre sí. Cada **vector fijo** es un representante del **vector libre.**

Se denomina **dirección, módulo y sentido** de un ***vector libre***, a la dirección, el modulo y el sentido de uno cualquiera de sus representantes.



3.1.3.- Operaciones con Vectores libres.

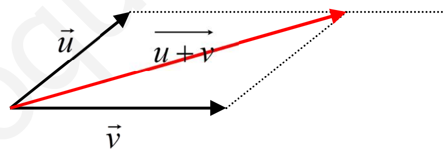
En el conjunto de vectores libres del plano, que designaremos con $\mathbb{R}^2$ se definen las dos operaciones siguientes:

3.1.3.1.- Suma de Vectores:

Llamamos suma de los vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y la representaremos por $\overrightarrow{u+v}$, al vector libre que se obtiene de dos formas:

a) Regla del Triángulo: Tomamos representantes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de forma que el origen del representante de $\vec{v}$, coincida con el extremo del representante de $\vec{u}$, de forma que el vector suma es aquel cuyo origen es el de $\vec{v}$ y cuyo extremo es el de $\vec{u}$.

b) Regla del Paralelogramo: Si tomamos representantes de forma que $\vec{v}$ y $\vec{u}$ tengan origen común, trazando líneas paralelas a ambos vectores desde sus extremos, la diagonal del paralelogramo será el vector suma.



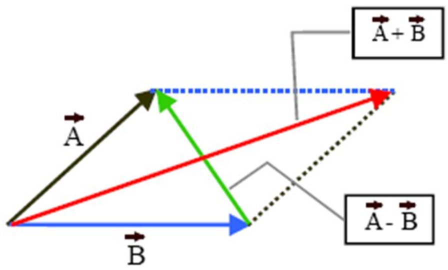
Propiedades de la suma de vectores:

- Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- Elemento neutro: es el vector nulo, que representaremos por $\vec{0}$

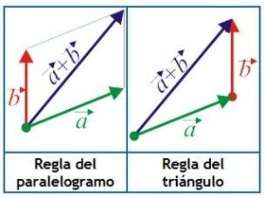
$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$$

- Elemento Opuesto: $(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
- Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

La existencia de un elemento opuesto para la suma de vectores, permite ***restar vectores***. Así, dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para obtener $\overrightarrow{u-v}$ basta con sustituir el vector $\vec{v}$, por el vector $-\vec{v}$ y sumárselo al $\vec{u}$ tal y como se indica en la figura de la derecha.

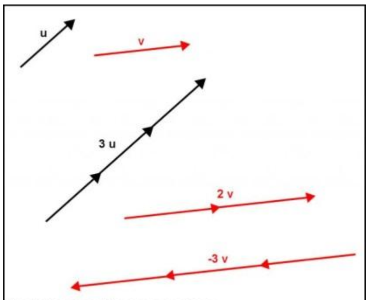


Suma y resta gráfica de vectores.



3.1.3.2.- Producto por un escalar:

El producto de un escalar K, distinto de cero, por un vector libre $\vec{u}$ es otro vector libre $\overrightarrow{ku}$ con:



Productos de vectores por escalares

- ***Dirección:*** La misma que $\vec{u}$
- ***Sentido:*** el mismo que $\vec{u}$ o su opuesto dependiendo del signo de k.
- ***Módulo:*** Proporcional al de $\vec{u}$. $\|k\cdot u\| = |k|\cdot\|u\|$

<u>***Propiedades*** del producto de un vector por un escalar</u>: $\begin{cases} \bullet\ k\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = k\cdot\vec{u}+k\cdot\vec{v} \\ \bullet (k_1+k_2)\vec{u} = k_1\cdot\vec{u}+k_2\cdot\vec{u} \\ \bullet\ (k_1\cdot k_2)\cdot\vec{u} = k_1\cdot(k_2\cdot\vec{u}) \\ \bullet\ 1\cdot\vec{u} = \vec{u} \end{cases}$

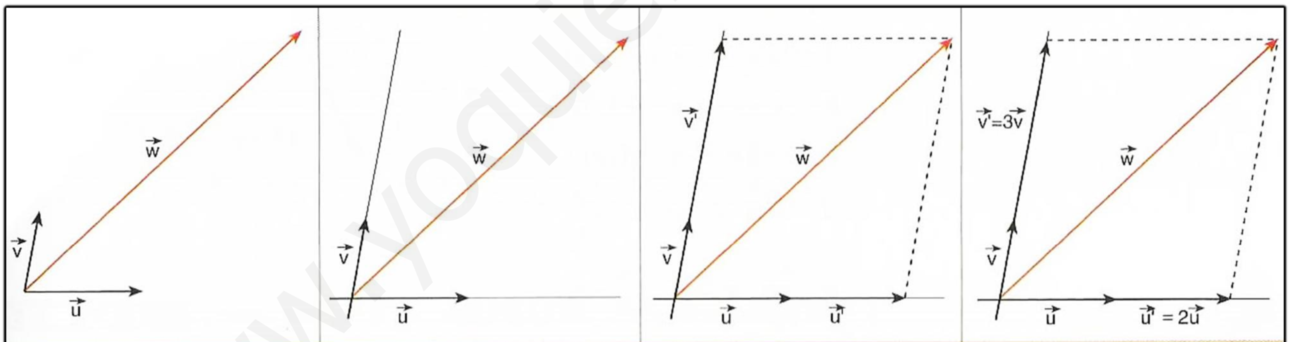
3.1.4.- Combinación lineal de Vectores libres.

Se dice que un vector libre cualquiera $\vec{u}$ es **combinación lineal** de otros dos $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, si existen los números reales k_1, k_2 tales que podamos escribir:

$$\boxed{\vec{u} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2}$$

Expresión de un vector como combinación lineal de otros dos:

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, con distinta dirección, cualquier otro vector del plano, $\vec{w}$, se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Para ello, procedemos como se indica a continuación.



Tomamos representantes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con el mismo origen.	Trazamos rectas que contengan a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.	Por el extremo de $\vec{w}$ trazamos rectas paralelas a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Éstas determinan los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$.	Expresamos $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. En este caso, $\vec{u}' = 2\vec{u}$ y $\vec{v}' = 3\vec{v}$ y, por tanto, $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

Se dice que el conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ...\}$ de un espacio vectorial V, es ***sistema de generadores de V***, si cualquier vector $\vec{u}$ de V se puede escribir como combinación lineal de los vectores, es decir:

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\cdot\vec{v}_3 + ...$$

3.1.5.- Bases de un espacio vectorial

En general, se dice que un conjunto ordenado B es base de un espacio vectorial V si se cumplen las siguientes condiciones:

- Todos los elementos de B pertenecen al espacio vectorial V.

- Los elementos de B son linealmente independientes.
- Todo elemento de V se puede escribir como combinación lineal de los elementos de la base B (es decir, B es un sistema generador de V)

3.1.5.1.- Dependencia e independencia lineal de vectores.

- Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_n\}$ se dice que son ***linealmente independientes (l.i.)*** (o que el sistema es libre), si dada la siguiente expresión:

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + ... + \alpha_n \cdot v_n = 0$$

Se verifica que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

- Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_n\}$ se dice que son ***linealmente dependientes (l.d.)*** (o que el sistema es ligado), si dada la siguiente expresión:

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + ... + \alpha_n \cdot v_n = 0$$

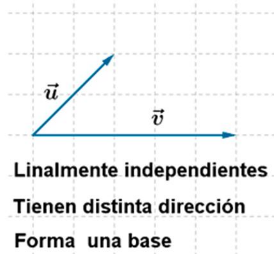
existe algún escalar no nulo. ($\exists \alpha_i \in \mathbb{R} \;/\; \alpha_i \neq 0$)

En $\mathbb{R}^2$ decimos que dos vectores son *linealmente dependientes* si tienen la misma dirección (paralelos) y dos vectores son *linealmente independientes* si tienen distinta dirección (No paralelos).

3.1.5.2.- Base.

Hemos visto que, dados dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de diferente dirección y cualquier otro vector, $\vec{w}$, podemos encontrar siempre dos números reales k_1 y k_2, de manera que:

$$\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$$



Diremos que el conjunto $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ constituye una base de V^2.

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, dos vectores no nulos y linealmente independientes (no paralelos) forman una base.

3.1.6.- Producto escalar

Se denomina producto escalar de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ al ***número*** que resulta de multiplicar el módulo de $\vec{A}$ por el módulo de $\vec{B}$ y por el coseno de ángulo que forman sus líneas de acción. Matemáticamente:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \mathrm{Cos}(\widehat{A, B})$$

Propiedades:

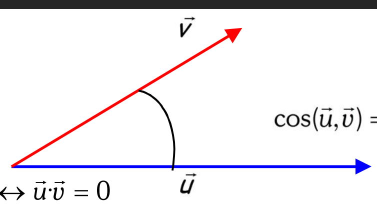
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$
- $(\lambda \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \leftrightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares (u ortogonales) o alguno de ellos es nulo.

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

3.1.6.1.- Aplicaciones del Producto escalar:

- Calculo del ángulo entre dos vectores:

$$Cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \rightarrow \alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$



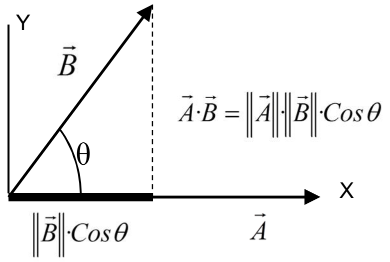
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

- Comprobar si dos vectores, no nulos, son ortogonales. $\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- Calcular la proyección de un vector sobre el otro.

En el dibujo de la derecha, $B{\cdot}\cos(\overset{\wedge}{A,B}) = B{\cdot}\cos\theta$ representa la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$, el producto escalar también puede definirse como el producto del módulo de uno cualquiera de los vectores por la proyección del otro sobre él.

$$\vec{A}{\cdot}\vec{B} = \left\|\vec{A}\right\|{\cdot}\left\|\vec{B}\right\|{\cdot}Cos\,\theta$$



Base ortogonal:

Un conjunto de vectores forman una ***base ortogonal***, cuando dichos forman una base y además son ortogonales dos a dos.

Base normada:

Un conjunto de vectores forman una ***base normada***, cuando dichos forman una base y además son unitarios.

- ✓ Un vector $\vec{u}$ se dice normado o unitario si $\left\|\vec{u}\right\| = 1$
- ✓ Dado un vector cualquiera no nulo $\vec{v}$, podemos obtener un vector unitario con la misma dirección y sentido que éste, simplemente dividiéndolo por su módulo: $\hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}$

Base ortonormal:

Un conjunto de vectores forman una ***base ortonormal***, cuando dichos vectores forman una base, son ortogonales dos a dos y además son unitarios.

La ***base ortonormal canónica*** de R^2 es la formada por los vectores $B\{(1,0),(0,1)\}$ ó $\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}$

Sea $B = \{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}$, una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ y (x_1,y_1) y (x_2,y_2) las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respecto de la base ortonormal B.

La forma analítica del producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es: $\boxed{\vec{u}{\cdot}\vec{v} = x_1{\cdot}x_2 + y_1{\cdot}y_2}$

Respecto de una base ortonormal, el módulo del vector $\vec{u}(x,y)$ es: $\boxed{\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2+y^2}}$

Y el ángulo formado se obtiene: $\boxed{\alpha = \arccos\dfrac{x_1{\cdot}x_2 + y_1{\cdot}y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}{\cdot}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}}$

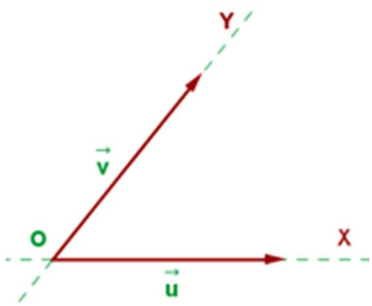
Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ serán perpendiculares (ortogonales) si y solo sí $\vec{u}{\cdot}\vec{v} = x_1{\cdot}x_2 + y_1{\cdot}y_2 = 0$

3.2.- Coordenadas de un punto del plano

Consideremos un punto fijo O del plano y una base $B = \{\vec{u},\vec{v}\}$ de V^2.

El conjunto formado por O y $B = \{\vec{u},\vec{v}\}$ constituye un ***sistema de referencia*** en el plano, pues permite determinar la posición de cualquier punto del plano. Lo denotaremos por $R = \{O;\vec{u},\vec{v}\}$.

En efecto, cualquier otro punto P del plano, determina con O un vector $\overrightarrow{OP}$. El vector libre $\overrightarrow{OP}$ que denotaremos por $\vec{p}$ se denomina ***vector de posición*** del punto P.



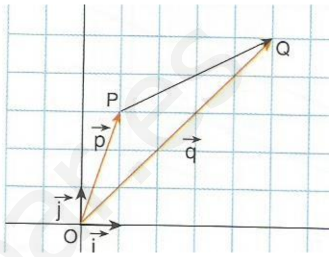
Sean (p_1,p_2) las componentes de $\vec{p}$ en la base B. Diremos que (p_1,p_2) son las ***coordenadas*** del punto P en el sistema de referencia $R=\{O,\vec{u},\vec{v}\}$ y escribiremos P=(p_1,p_2).

Las coordenadas de un punto P respecto al sistema de referencia $R=\{O,\vec{u},\vec{v}\}$ son las componentes del vector de posición de P en la base $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$.

3.2.1.- Componentes de un vector determinado por dos puntos.

Sea $R=\{O,\vec{u},\vec{v}\}$ un sistema de referencia. Veamos cómo determinar las componentes de un vector $\overrightarrow{PQ}$ en la base canónica $B=\{\vec{i},\vec{j}\}$ a partir de las coordenadas de P y Q.

Según la figura de la derecha:



$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}+\overrightarrow{PQ}=\vec{q} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}$$

Si P=(p_1,p_2) y Q=(q_1,q_2), se tiene:

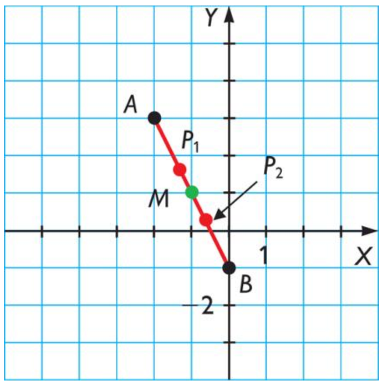
$$\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}=(q_1,q_2)-(p_1,p_2)=(q_1-p_1,q_2-p_2)$$

Por tanto:

$$\boxed{\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}=(q_1-p_1,q_2-p_2)}$$

3.2.2.- Punto medio de un segmento.

Consideremos el segmento de extremos A=(a_1,a_2) y B=(b_1,b_2).
Si M=(m_1,m_2) es su punto medio, se verifica:

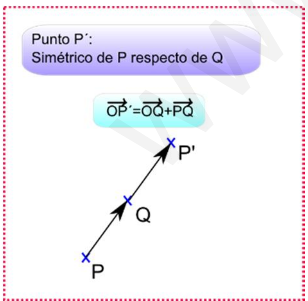


$$\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{AM}$$

Y por tanto, si sustituimos las componentes de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AM}$ obtenemos:

$$M=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

3.2.2.1.- Punto simétrico de un punto respecto de otro.



Una aplicación del punto medio de un segmento, es el cálculo del punto simétrico de un punto con respecto de otro.

Si **P'** es el **simétrico** de **Q** respecto de **P**, entonces **Q** es el **punto medio** del **segmento PP'**. Por lo que se verificará igualdad:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP'}$$

Ejemplo: Hallar el simétrico del punto P (7, 4) respecto de Q(3, −11).

Sea el punto simétrico P'(x,y), tenemos que:

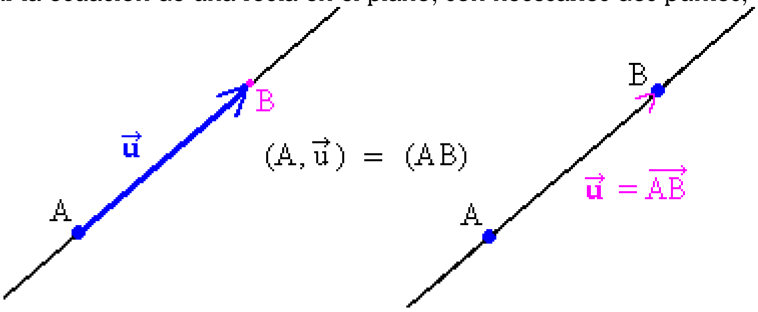
$$(-4,-15)=(x-3,y+11) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-3=-4 \\ y+11=-15 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-26 \end{cases}$$

Por tanto el simétrico de P, es el punto P' (-1,-26)

3.3.- Ecuaciones de la recta

3.3.1.- Definiciones

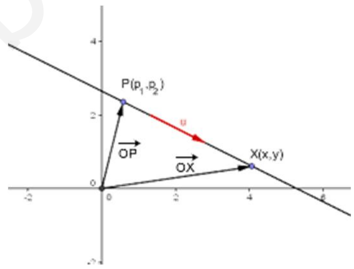
Para determinar la ecuación de una recta en el plano, son necesarios dos puntos, o un punto y un vector.



Aunque si son dan dos puntos, rápidamente podemos calcular el vector que los une y ya tenemos un punto y un vector.

3.3.1.1.- Ecuación Vectorial

Sea $R = \{O, \vec{s}, \vec{t}\}$ un sistema de referencia del plano, y sea ***r*** una recta determinada por un punto ***P*** (p_1,p_2) y un vector $\vec{r}$. Cualquier punto **X** (x,y) de la recta queda determinado de la siguiente manera:



$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{r}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro que, al variar, va generando los distintos puntos de la recta.

Esta expresión vectorial recibe el nombre de **ecuación vectorial** de la recta ***r***.

Escrita en componentes queda de la forma: $(x, y) = (p_x, p_y) + \lambda(r_x, r_y)$

3.3.1.2.- Ecuaciones Paramétricas

Si separamos en componentes la ecuación vectorial, tenemos: $\begin{cases} x = p_x + \lambda \cdot v_x \\ y = p_y + \lambda \cdot v_y \end{cases}$ que es la expresión de las ecuaciones paramétricas de una recta.

3.3.1.3.- Ecuación Continua

Si despejamos el parámetro λ de cada una de las ecuaciones paramétricas, tenemos:

$$\begin{cases} x = p_x + \lambda \cdot v_x \\ y = p_y + \lambda \cdot v_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{x - p_x}{v_x} \\ \lambda = \dfrac{y - p_y}{v_y} \end{cases}$$

Que por igualación, nos da: $\dfrac{x - p_x}{v_x} = \dfrac{y - p_y}{v_y}$

Expresión que se conoce como ***ecuación continua*** de una recta.

3.3.1.4.- Ecuación General

De la ecuación continua, y multiplicando en cruz, obtenemos: $v_y \cdot (x - p_x) = v_x \cdot (y - p_y)$

Operando y Agrupando todo a la izquierda: $x \cdot v_y - v_y \cdot p_x - y \cdot v_x + v_x \cdot p_y = 0$

Donde haciendo el cambio $\begin{cases} v_y = A \\ -v_x = B \\ v_x p_y - v_y p_x = C \end{cases}$, da lugar a:

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Que es conocida como ***ecuación general de la recta***, y donde el vector director viene dado por: $\vec{r} = (-B, A)$. También se le llama ecuación cartesiana o ecuación implícita de una recta.

3.3.1.5.- Ecuación Explícita

Si de la ecuación general, despejamos y, tenemos: $y = \frac{-Ax - C}{B} = \frac{-A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$

Si llamamos $m = \frac{-A}{B}$ y $n = \frac{-C}{B}$, tenemos: $\boxed{y = mx + n}$

Que es la ecuación explícita de una recta, y donde $m = \frac{-A}{B}$, es la pendiente de la recta y se corresponde con el cociente entre la componente y del vector director y la componente x. $m = \frac{v_y}{v_x}$

3.3.1.2.- Ecuación Segmentaria o Canónica

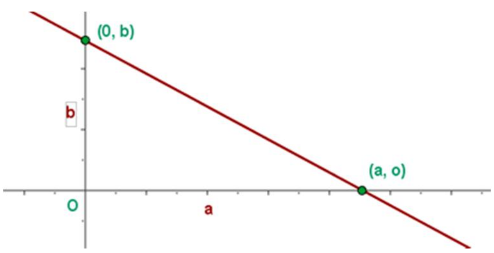
Si de la ecuación general, despejamos C, y dividimos todo por –C:

$$Ax + By + C = 0 \quad \rightarrow \quad Ax + BY = -C \quad \rightarrow \quad \frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$$

Y operando, llegamos a:

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1 \text{ si hacemos los cambios: } \begin{cases} a = \frac{-C}{A} \\ b = \frac{-C}{B} \end{cases} \text{, llegamos a: } \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Que es la ecuación segmentaria de una recta, y que corta el sistema de referencia en los segmentos a y b.



a es la **abscisa en el origen** de la recta.
b es la **ordenada en el origen** de la recta.

Los valores de **a** y de **b** se se pueden obtener de la ecuación general.

Si y = 0 resulta x = a.
Si x = 0 resulta y = b.

<u>Una recta carece de la forma canónica en los siguientes casos:</u>

- Recta paralela a OX, que tiene de ecuación y = n
- Recta paralela a OY, que tiene de ecuación x = k
- Recta que pasa por el origen, que tiene de ecuación y = mx.

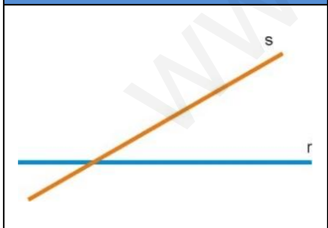
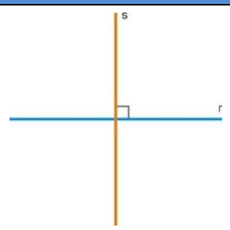
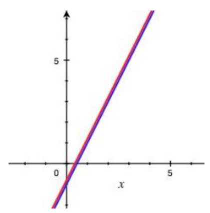
En resumen, tenemos:

GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL PLANO	Ecuación y Características de una RECTA						
DATOS	INCÓGNITAS						
Pasa por (x_0, y_0) y ...	Vector	Otro punto	Pendiente	Áng con OX	Ec. general	Ec. implícita	Gráfica
Vector **(a, b)**	**(a, b)**	$(x_1,y_1)=(x_0,y_0)+(a,b)$	$m=\frac{b}{a}$	$\alpha=\text{arc tg } m$	$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$ forma continua	Despejar y	v(a, b) $P(x_0, y_0)$
Otro punto (x_1, y_1)	$(a,b)=(x_1,y_1)-(x_0,y_0)$	(x_1, y_1)	$m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$				$Q(x_1, y_1)$ $P(x_0, y_0)$
Pendiente **m**	$(a,b)=(1,m)$	$(x_1,y_1)=(x_0,y_0)+(1,m)$	**m**	$\alpha=\text{arc tg } m$	Agrupar términos	$y-y_0=m(x-x_0)$	$P(x_0,y_0)$ α=arctg
Ángulo con OX **α**			**m = tg α**	**α**			$P(x_0,y_0)$ α
Ecuación general: $Ax+By+C=0$	$(a,b)=(-B,A)=(B,-A)$	x y * * * *	$m=-\frac{A}{B}$	$\alpha=\text{arc tg } m$	$Ax+By+C=0$	Despejar y	Q(*,*) P(*,*)
Ecuación implícita: $y=mx+n$	$(a,b)=(1,m)$	x y 0 n * *	**m**	$\alpha=\text{arc tg } m$	Agrupar términos	$y=mx+n$	Q(*,*) n
Gráfica: n, n'		(n', 0) (0, n)			$\frac{x}{n'}+\frac{y}{n}=1$ forma canónica		n n'

3.3.2.- Posiciones relativas de dos rectas

Sean las rectas ***r*** y ***s***, de las que conocemos un punto y un vector: $r:\begin{cases}\vec{r}=(r_x,r_y)\\ P(p_x,p_y)\end{cases}$ y $s:\begin{cases}\vec{s}=(s_x,s_y)\\ Q(q_x,q_y)\end{cases}$

Las posiciones relativas de dichas rectas pueden ser:

Secantes		**Paralelas**	
Si los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ no son paralelos: $\vec{r}\neq k\cdot\vec{s}$		Si los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son paralelos $\vec{r}=k\cdot\vec{s}$	
No perpendiculares	Perpendiculares	No Coincidentes	Coincidentes
			
$\vec{r}\neq k\cdot\vec{s}$ y $\vec{r}\cdot\vec{s}\neq 0$	$\vec{r}\neq k\cdot\vec{s}$ y $\vec{r}\cdot\vec{s}=0$	$\vec{r}=k\cdot\vec{s}$ y $Q\notin r$	$\vec{r}=k\cdot\vec{s}$ y $Q\in r$

Para ver cuál es la posición relativa de dos rectas, basta con resolver el sistema formado por sus ecuaciones generales.

- ✓ Si tiene ***solución única***, las rectas son ***secantes.*** **(S.C.D.)**
- ✓ Si ***no tiene solución***, son ***paralelas.*** **(S.I.)**
- ✓ Si existen ***infinitas soluciones***, son ***coincidentes.*** **(S.C.I.)**

Sin embargo, para determinar la posición relativa de dos rectas, no es necesario resolver el sistema por sus ecuaciones. Basta con observar los coeficientes de sus ecuaciones generales:

Ecuaciones	Condición	Posición relativa
$r: Ax+BY+C=0$ $s: A'x+B'y+C'=0$	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	**Secantes**
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	**Paralelas**
	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$	**Coincidentes**

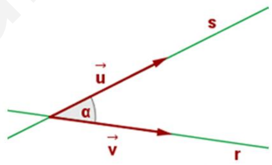
Ejemplo: *Determina la posición relativa de las rectas r: -x+y=-1 y s: 2x+3y+3=0.*

El vector director de cada una de ellas es: $\left.\begin{array}{l}\vec{r}=(-1,-1)\\ \vec{s}=(-3,2)\end{array}\right\}$ y como: $\vec{r} \neq k\cdot\vec{s}$ las rectas son secantes.

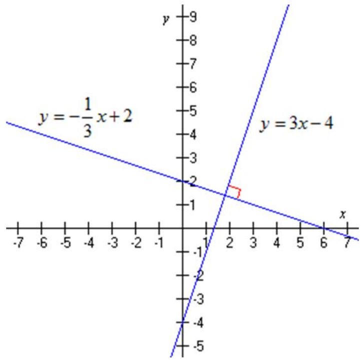
3.3.2.1.- Ángulo entre dos rectas

Dos rectas secantes r y s determinan cuatro ángulos iguales dos a dos por ser opuestos por el vértice. Al menor de ellos se le define como el ángulo entre las rectas.

Utilizando el producto escalar, podemos calcular dicho ángulo:

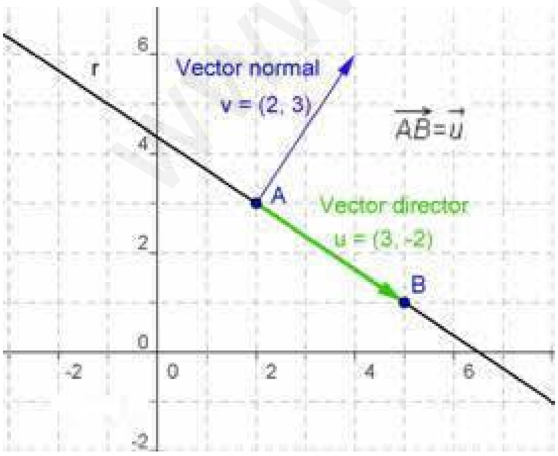


$$\alpha = \text{Arccos}\left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}\right|$$



Decimos que si el ángulo que forman dos rectas es de 90 grados, estas son perpendiculares.

Si la recta ***r,*** tiene por ecuación general ***r: Ax+By+C=0***, su vector director es (-B,A) y su pendiente será $m=\frac{-A}{B}$. Una recta perpendicular a ésta, ***s***, tendrá por ecuación: ***s: –Bx+Ay+K=0*** cuyo vector director es (A,B), y su pendiente será: $m_{\perp}=\frac{B}{A}$



Por tanto; las pendientes de dos rectas perpendiculares, son inversas y opuestas: $m_{\perp}=\frac{-1}{m}$

Con lo visto anteriormente, llamamos vector normal de una recta, al vector perpendicular a dicha recta, y que obtenemos directamente de la ecuación general. (Ver figura adjunta)

Si r: AX+BY+C=0, $\vec{r}=(-B,A)$ es el vector director de la recta, y $\vec{n}=(A,B)$ es el ***vector normal*** de la recta.

Otra forma de calcular el ángulo entre dos rectas, sería utilizando los vectores normales de ambas:

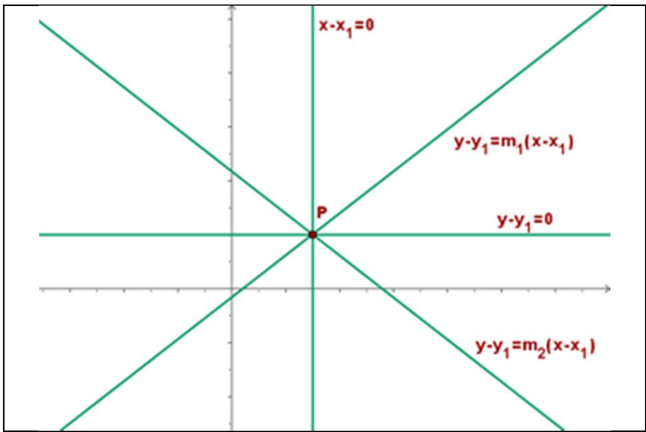
$$\alpha = \text{Arccos}\left|\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\cdot\|\vec{n}_2\|}\right|$$

Si por el contrario, lo que conocemos son las pendientes, m_1 y m_2, para calcular el ángulo podemos utilizar la fórmula:

$$\alpha = \text{Arc}\, tg \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right|$$

3.3.3.- Haces de Rectas

Para determinar una recta necesitamos un punto y un vector director. Con solo uno de estos, la recta no queda determinada: hay infinitas rectas que pasan por un punto e infinitas rectas con una misma dirección.



Haz de rectas Secantes

Haz de Rectas paralelas

En el primer caso diremos que se trata de un haz de rectas secantes, y en el segundo caso de un haz de rectas paralelas.

3.3.3.1.- Ecuación de un haz de rectas secantes

La expresión analítica del haz de rectas de centro P(x_0,y_0) es: $\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)=0}$

A partir de esta expresión y dando valores a los parámetros a y b, se obtienen las distintas del haz.

- Para a=0 y b=1, tenemos: $y=y_o$ (Paralela al eje X)
- Para a=1 y b=0, tenemos: $x=x_0$ (Paralelas el eje Y)

El haz de rectas de centro P(x_0,y_0) el punto por el que pasan todas las rectas del haz. La ecuación de una recta cualquiera que pase por el punto A, es:

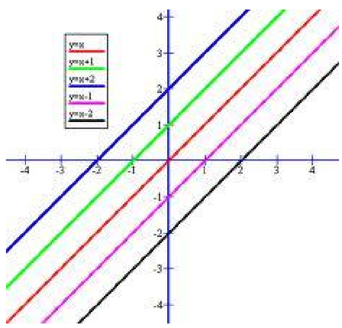
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Al variar el valor de m, obtenemos las diferentes rectas que pasan por el punto P.

3.3.3.2.- Ecuación de un haz de rectas paralelas

Hemos visto que Ax+By+C=0 es la ecuación general de una recta *r*, cualquier recta paralela, ha de tener los coeficientes de x e y proporcionales a A y B, respectivamente, y C distinto. Por tanto, la ecuación de un haz de rectas paralelas será:

$$\alpha Ax + \alpha Bx + C' = 0$$



Si dividimos todo por α , tenemos:

$$\boldsymbol{Ax+By+K=0}$$

Con $k \in \mathbb{R}$.

Al variar el valor de k, obtenemos las diferentes rectas paralelas a r.

***Ejemplo:* Dadas las rectas r: kx + 5y + 1 = 0 y s: 6x – 3y + 8 = 0. Determinar k de modo que:**

a) ***r y s sean paralelas.*** ***b) r y s sean perpendiculares***

Solución:

a) Si r y s son paralelas $\Rightarrow$ sus vectores directores $\vec{d} = (-5, k)$ y $\vec{d}' = (3, 6)$ también lo son $\Rightarrow$ son proporcionales:

$\frac{-5}{3} = \frac{k}{6} \Rightarrow$ k = –10

b) Si r y s son perpendiculares $\Rightarrow$ $\vec{d} = (-5, k)$ y $\vec{d}' = (3, 6)$ son perpendiculares $\Rightarrow$ $\vec{d} \cdot \vec{d}' = 0 \Rightarrow -15 + 6k = 0 \Rightarrow$ a = $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

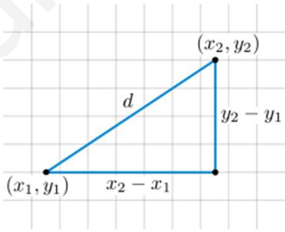
3.4.- Distancias

En matemáticas, la **distancia euclidiana** o **euclídea** es la distancia "ordinaria" (que se mediría con una regla) entre dos puntos de un espacio euclídeo, la cual se deduce a partir del teorema de Pitágoras.

3.4.1.- Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos A (x_1,y_1) y B (x_2,y_2) del plano es el módulo del vector fijo que determinan.

$$d(A,B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

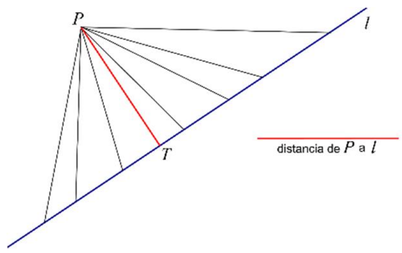


Analíticamente:

$$\boxed{d(A,B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

3.4.2.- Distancia entre un punto y una recta.

La distancia entre un punto P y una recta r, es la mínima de las distancias entre el punto P y cualquiera de los puntos de la recta r.



La distancia de un punto P a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazada desde el punto P.

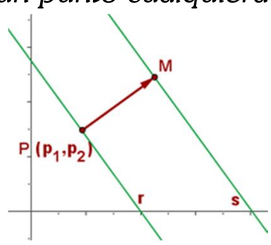
- ✓ Si $P \in r$, la distancia es cero: $d(P,r) = 0$
- ✓ Si $P \notin r$, la distancia de P a r es el módulo del vector $\overrightarrow{QP}$, siendo Q el punto de intersección de la recta r y la recta perpendicular a r que pasa por P.

Sea Ax+By+C=0, la ecuación de la recta r; y $P(p_1,p_2)$ el punto dado, la distancia de un punto a una recta viene dada por la expresión:

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

3.4.3.- Distancia entre dos rectas.

La distancia entre dos rectas r y s, es la mínima distancia entre un punto cualquiera de la recta r y un punto cualquiera de la recta s.



- Si las rectas son secantes o coincidentes, la distancia es nula: d(r,s)=0
- Si las rectas son paralelas, la distancia entre r y s, es la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra.

Sea r: Ax+By+C=0 y s: Ax+By+C'=0, con $C' \neq C$, y $P(p_1,p_2)$ un punto de la recta r.

En tal caso tendremos:

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|A\cdot p_1+B\cdot p_2+C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Pero como $Ap_1+Bp_2=-C$, por ser P un punto de la recta r, llegamos a: $\boxed{d(r,s)=\dfrac{|C'-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$

***Ejemplo:* Dados los puntos P(0, 4), Q(2, -5) y la recta r: -3x + y + 1 = 0, halla la distancia:**
b) Entre P y Q   b) De Q a r.

Solución:

a) $d(P,\,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|(2,-1)\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}\text{ u}$

b) $d(Q,\,r)=\dfrac{|-3\cdot 2-5+1|}{\sqrt{(-3)^2+1^2}}=\dfrac{|-6-5+1|}{\sqrt{9+1}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\dfrac{10\sqrt{10}}{10}=\sqrt{10}\text{ u}$

En resumen, todo lo visto de rectas hasta el momento lo podemos resumir en la siguiente tabla:

GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL PLANO — Vectores, distancias y ángulos

VECTORES		
Vector	módulo dirección sentido	$\begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}\end{cases}$ $\begin{cases} a=r\cos\alpha \\ b=r\operatorname{sen}\alpha\end{cases}$
Suma	$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$	$\left.\begin{matrix}\vec{u}\,(a,b)\\ \vec{v}\,(a',b')\end{matrix}\right\}\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=(a+a',b+b')$
Diferencia	$-\vec{v}$, $\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{u}$ se suma el opuesto	$\left.\begin{matrix}\vec{u}\,(a,b)\\ \vec{v}\,(a',b')\end{matrix}\right\}\Rightarrow \vec{u}-\vec{v}=(a-a',b-b')$
Producto por un número	$k\vec{u}$, $\vec{u}$	$\left.\begin{matrix}\vec{u}\,(a,b)\\ k\in\Re\end{matrix}\right\}\Rightarrow k\vec{u}=(ka,kb)$
Producto escalar	α $\vec{u}\cdot\vec{v}=\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert\cos\alpha$	$\left.\begin{matrix}\vec{u}\,(a,b)\\ \vec{v}\,(a',b')\end{matrix}\right\}\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=aa'+bb'\in\Re$

DISTANCIAS		
punto–punto	d, P, Q	$\left.\begin{matrix}P\,(x_1,y_1)\\ Q\,(x_2,y_2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow d(P,Q)=\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
Punto–recta	P, d, r	$\left.\begin{matrix}P\,(x_0,y_0)\\ r\equiv Ax+By+C=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow d(P,r)=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ÁNGULOS			
Rectas	Pendientes: m, m'	Vectores: $\vec{u}\,(a,b)$, $\vec{v}\,(a',b')$	Ecuaciones: $\begin{cases}Ax+By+C=0\\ A'x+B'y+C'=0\end{cases}$
paralelas	$m=m'$ pendientes iguales	$\vec{v}=k\cdot\vec{u}$ $(a',b')=k(a,b)$ vectores proporcionales	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$ coeficientes proporcionales
coincidentes	$m=m'$ pendientes iguales y un punto común	$(a',b')=k(a,b)$ vectores proporcionales y un punto común	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$ coeficientes proporcionales
perpendiculares	$m=-\frac{1}{m'}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ $a\cdot a'+b\cdot b'=0$ vectores perpendiculares	$A\cdot A'+B\cdot B'=0$
ángulo α	$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m-m'}{1+m\cdot m'}$	$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}$	$\cos\alpha=\frac{A\cdot A'+B\cdot B'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}}$
recta horizontal	$m=0$ $\alpha=0^\circ$	$(a,0)$	$y=n$
recta vertical	$m=\infty$ $\alpha=90^\circ$	$(0,b)$	$x=k$
diagonal	$m=1$ $\alpha=45^\circ$	$(1,1)$	$y=x+n$

***Ejemplo:* Dados el punto P(k, 1) y la recta r: 3x – 4y + 1 = 0, halla el valor de k para que la distancia del punto P a la recta r sea 3.**

Solución:

$$dist(P,\,r)=\frac{|3k-4+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3k-3|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|3k-3|}{\sqrt{25}}=\frac{|3k-3|}{5}=3 \quad \text{de donde: } \begin{cases}\dfrac{3k-3}{5}=3 \;\rightarrow\; 3k-3=15 \;\rightarrow\; 3k=18 \;\rightarrow\; k=6\\ \dfrac{3k-3}{5}=-3 \;\rightarrow\; 3k-3=-15 \;\rightarrow\; 3k=-12 \;\rightarrow\; k=-4\end{cases}$$

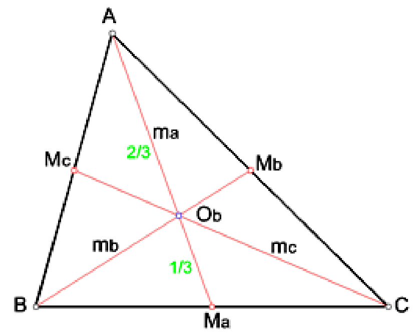
Y por tanto tenemos dos soluciones: $k_1=6$; $k_2=-4$

3.5.- Puntos Notables de un triángulo

A la hora de trabajar con triángulos es importante conocer:

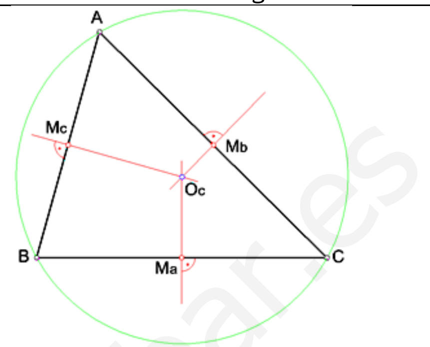
Baricentro

Punto de intersección de las tres medianas. Estas son las rectas que pasan por un vértice y el punto medio del lado opuesto.



Circuncentro

Punto de intersección de las tres mediatrices. Estas son las rectas perpendiculares a cada lado en su punto medio. El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

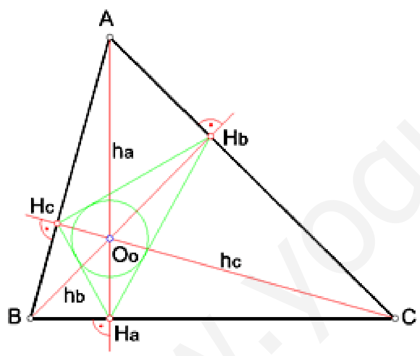


Si el triángulo tiene de vértices A(a_1,a_2), B(b_1,b_2) y C(c_1,c_2), las coordenadas del baricentro son:

$$G=\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

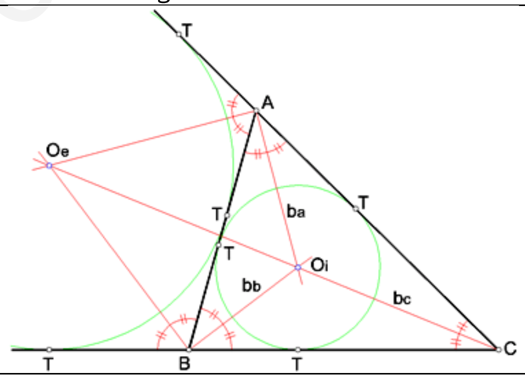
Ortocentro

Punto de intersección de las tres alturas. Estas son las rectas que pasan por un vértice y son perpendiculares al lado opuesto o su prolongación.



Incentro

Punto de intersección de las tres bisectrices. Estas son las rectas que dividen a cada ángulo en dos mitades iguales. El incentro es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



Así, por ejemplo, dado el triángulo de vértices A(1,-3); B(4,2) y C(-1,1) calculemos el baricentro, el ortoedro y el circuncentro:

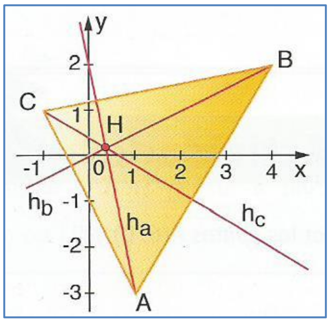
a) El ***baricentro*** viene dado por $G=\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)=\left(\frac{1+4-1}{3},\frac{-3+2+1}{3}\right)=\left(\frac{4}{3},0\right)$

b) Para calcular el ***Ortocentro***, comenzamos por determinar las rectas que contienen a sus lados:

Recta AB: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(3,5)\\ A(1,-3)\end{cases} \rightarrow \quad r_{AB}:\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{5} \quad \rightarrow \quad r_{AB}:5x-3y-14=0$

Recta AC: $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=(-2,4)\\ C(-1,1)\end{cases} \rightarrow \quad r_{AC}:4x+2y+k=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases}-4+2+k=0\\ k=2\end{cases} \quad \rightarrow \quad r_{AC}:4x+2y+2=0$

Recta BC: $\begin{cases}\overrightarrow{BC}=(-5,-1)\\ B(4,2)\end{cases} \rightarrow \quad r_{BC}:\frac{x-4}{-5}=\frac{y-2}{-1} \quad \rightarrow \quad r_{BC}:x-5y+6=0$



La altura correspondiente al vértice A, h_A, es la recta perpendicular a r_{BC}, luego será de la forma $5x+y+k=0$ y sustituyendo el punto A: $h_A: 5x+y-2=0$.

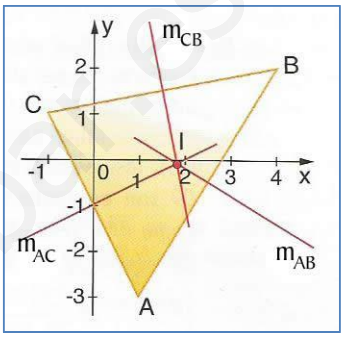
De forma análoga, obtenemos las alturas correspondientes a los vértices B y C:

$$h_B: x-2y=0 \qquad h_c: 3x+5y-2=0$$

Y finalmente el Ortocentro es la solución del sistema: $\begin{cases} 5x+y-2=0 \\ x-2y=0 \\ 3x+5y-2=0 \end{cases}$ que se corresponde con el punto: $H\left(\frac{4}{11},\frac{2}{11}\right)$

Como podemos ver, para calcular el Ortocentro no necesitamos calcular las tres alturas, simplemente con dos nos basta.

c) Para calcular el ***circuncentro***, determinamos antes los puntos medios de los lados AB, AC y BC. Estos, son respectivamente: $M_{AB}\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$ $\quad M_{AC}(0,-1)$ $\quad M_{BC}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$



La mediatriz correspondiente al lado AB, m_{AB}, es perpendicular a r_{AB}, luego será de la forma: $m_{AB}: 3x+5y+k=0$, si hacemos que pase por el punto $M_{AB}\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$, tenemos: $3\frac{5}{2}+5\frac{-1}{2}+k=0 \quad \rightarrow \quad k=-5$, por tanto:

$$m_{AB}: 3x+5y-5=0$$

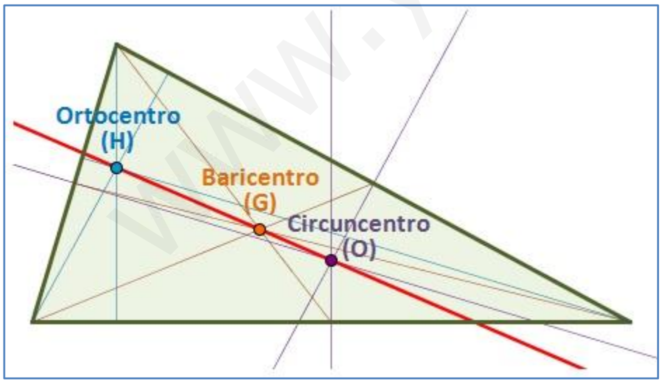
Análogamente, la mediatriz correspondiente al lado BC, m_{BC}, perpendicular a r_{BC}, es de la forma: $5x+y+t=0$, si la hacemos pasar por $M_{BC}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, tenemos: $5\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+t=0 \quad \rightarrow \quad t=-9$, por tanto: $m_{BC}: 5x+y-9=0$

Y de forma similar para la mediatriz del lado AC, tendremos: $m_{AC}: x-2y-2=0$

Así que resolviendo el sistema, nos dará el circuncentro: $\begin{cases} 3x+5y-5=0 \\ 5x+y-9=0 \\ x-2y-2=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \textit{Circuncentro}: O\left(\frac{21}{11},\frac{-1}{11}\right)$

Como en el caso anterior, para calcular el circuncentro, bastaría con calcular el punto de corte de dos de sus mediatrices.

3.5.1.- Recta de Euler



Llamamos ***recta de Euler***, a la recta que contiene a los tres puntos notables de un triángulo, es decir, a la recta que contiene al Baricentro, Ortocentro y circuncentro.

Continuando con el ejemplo anterior, la recta que une G y H, es la recta que pasa por G y tiene por vector director el vector $\overrightarrow{GH}=\left(\frac{-32}{33},\frac{2}{11}\right)$, luego es la recta:

$$\frac{x-\frac{4}{3}}{-\frac{32}{33}}=\frac{y}{\frac{2}{11}} \quad \rightarrow \quad r_{GH}: 3x+16y-4=0$$

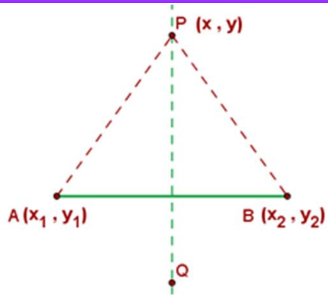
Y como podemos comprobar, el circuncentro O$\left(\frac{21}{11},\frac{-1}{11}\right)$ pertenece a esta recta, puesto que si lo sustituimos en ella, tenemos:

$$3\frac{21}{11}+16\frac{-1}{11}-4=\frac{60-16-44}{11}=0$$

3.6.- Lugares geométricos

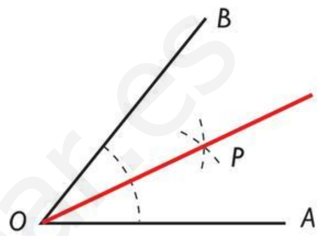
3.6.1.- Lugares geométricos. Definición

Se llama ***lugar geométrico*** a un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad.



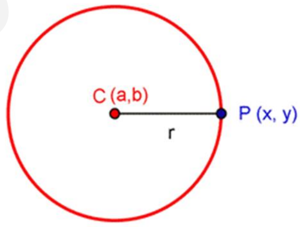
a) La **mediatriz de un segmento** AB es el lugar geométrico de los puntos, P, que equidistan de sus extremos:

$$\boxed{d(P,A)=d(P,B)}$$



b) La **bisectriz de un ángulo** de lados r_1, r_2, es el lugar geométrico de los puntos , P, que equidistan de r_1 y r_2:

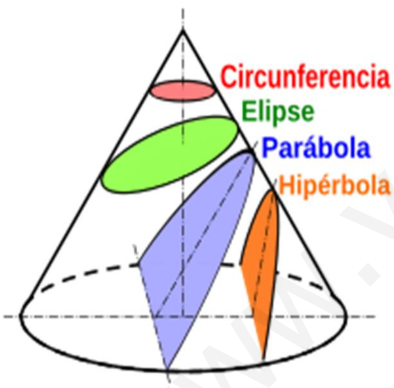
$$\boxed{d(P,r_1)=d(P,r_2)}$$



c) ***Circunferencia*** de centro C y radio r es el lugar geométrico de los puntos P, cuya distancia al centro C es r:

$$\boxed{d(P,C)=r}$$

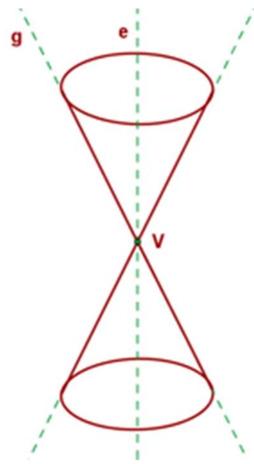
3.7.- Cónicas



Las curvas llamadas ***cónicas*** son circunferencias, elipses, hipérbolas y parábolas. Se llaman así porque se obtienen cortando mediante planos una superficie cónica.

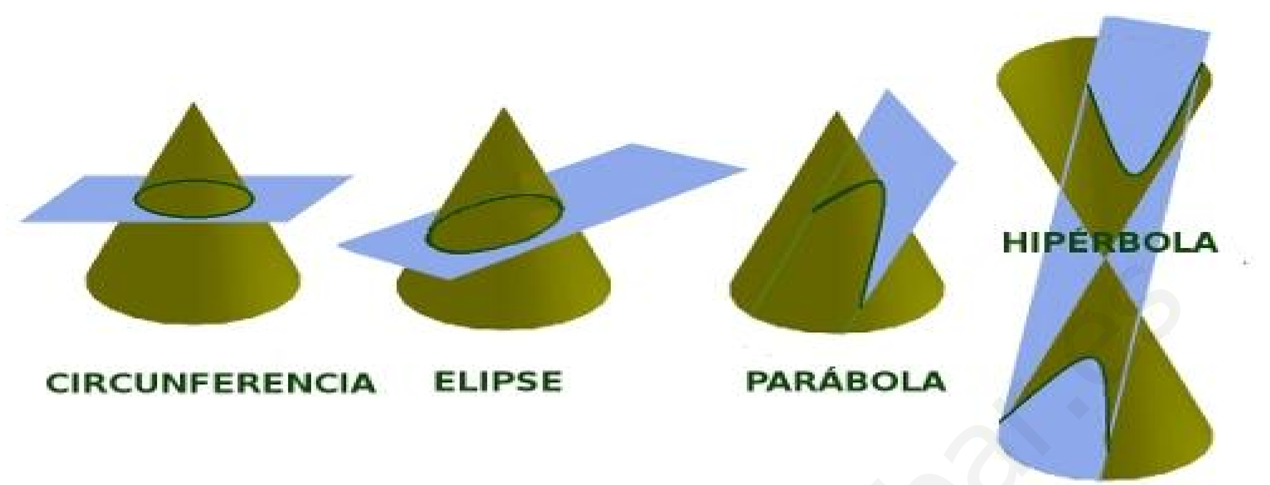
Cuando en el siglo III a.C. Apolonio de Perga describió las elipses, parábolas e hipérbolas como cónicas, estaba muy lejos de imaginar que dichas curvas se ajustaban a los movimientos de los cuerpos celestes. Durante muchos siglos, se consideró que las órbitas de los planetas eran circulares. Fue a comienzos del siglo XVII cuando Kepler enunció sus importantes leyes, una de las cuales asigna órbitas elípticas a dichos cuerpos. Solo un siglo antes, Copérnico había dado al traste con la concepción geométrica del universo, haciendo ver que era la tierra la que giraba alrededor del sol.

Elementos de las cónicas:

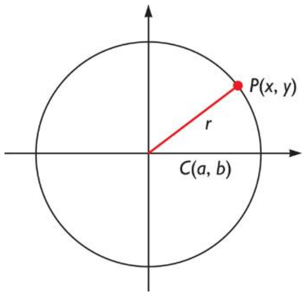


- ✓ ***Superficie:*** Una superficie cónica de revolución está engendrada por la rotación de una recta alrededor de otra recta fija, llamada **eje**, a la que corta de modo oblicuo.
- ✓ ***Generatriz:*** La generatriz es una cualquiera de las rectas oblicuas.
- ✓ ***Vértice:*** El vértice es el punto central donde se cortan las generatrices.
- ✓ ***Hojas:*** Las hojas son las dos partes en las que el vértice divide a la superficie cónica de revolución.
- ✓ ***Sección:*** Se denomina sección cónica a la curva intersección de un cono con un plano que no pasa por su vértice. En función de la relación existente entre el ángulo de conicidad (α) y la inclinación del plano respecto del eje del cono (β), pueden obtenerse diferentes secciones cónicas.

Si el plano que corta a la superficie cónica es perpendicular al eje, la sección es una ***circunferencia.***	Si inclinamos el plano, de modo que sea oblicuo con el eje y corte a todas las generatrices, la sección es una ***elipse.***	Si continuamos inclinando el plano de modo que sea oblicuo con el eje y que sea paralelo a una generatriz, resulta una ***parábola.***	Si inclinamos aún más el plano, de modo que sea paralelo a dos generatrices, resulta una curva con dos ramas, llamada ***hipérbola.***



3.7.1.- Circunferencia



La ecuación de una circunferencia viene dada por la expresión:

$$d(P,C)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

En la que P es un punto cualquiera de la circunferencia P(x,y) y C(a,b) es su centro.

Si elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Y operamos un poco, llegamos a:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$

Si reordenamos los términos:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Observamos que se trata de un polinomio de segundo grado en x e y, tal que los coeficientes tanto de x^2 como de y^2 son 1 y que no tiene término en xy:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

Donde: $\begin{cases} A=-2a \\ B=-2b \\ a^2+y^2-r^2=C \end{cases}$

Si nos dan una circunferencia mediante la ecuación $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, su **centro** es el punto $C\left(\frac{-A}{2},\frac{-B}{2}\right)$ y su **radio** es $r=\sqrt{\left(\frac{-A}{2}\right)^2+\left(\frac{-B}{2}\right)^2-C}$

Por tanto, a la hora de saber si una expresión de segundo grado en x e y de la forma $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ se corresponde con una circunferencia, ha de verificarse que:

$$\left(\frac{-A}{2}\right)^2+\left(\frac{-B}{2}\right)^2-C>0$$

Ejemplos:

a) La circunferencia de radio r=3 y centro C(1,-2), tiene por ecuación $(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$, o desarrollando esta expresión, si se prefiere, $x^2+y^2-2x+4y-4=0$

b) La ecuación $x^2+y^2-6x+8y=0$, representa una circunferencia de centro (3,-4) y radio r=5, pues:

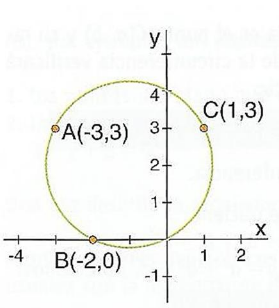
$$C\left(-\frac{-6}{2},-\frac{8}{2}\right)=(3,-4) \ \text{ y } r=\sqrt{\left(-\frac{-6}{2}\right)^2+\left(\frac{-8}{2}\right)-0}=\sqrt{25}=5$$

A este resultado puede llegarse completando cuadrados. Observa:

$$x^2+y^2-2x+4y-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)-16=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2+(y+4)^2=5^2$$

3.7.1.1.- Determinación de una circunferencia

En general, se necesitan tres puntos o tres condiciones para determinar la ecuación de una circunferencia, pues son 3 coeficientes que es preciso conocer en cualquiera de las formas de expresar la circunferencia que hemos visto. (En el primer caso a, b, r; y en el segundo A, B, C)

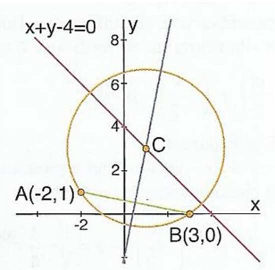


A – Que pasa por tres puntos

Así, para determinar la circunferencia que pasa por los puntos A(-3,3) B(-2,0) y C(1,3), sustituimos en la ecuación $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ las coordenadas de los puntos A, B y C, y obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 9+9-3A+3B+C=0 \\ 4+0-2A+0+C=0 \\ 1+9+A+3B+C=0 \end{array}\right\} \text{ cuya solución es: } \left\{\begin{array}{l} A=2 \\ B=-4 \\ C=5 \end{array}\right.$$

Luego la circunferencia pedida tiene por ecuación $x^2+y^2+2x-4y=0$. Su centro es el punto (-1,2) y su radio $r=\sqrt{5}$



B – Que pasa por dos puntos y por una recta

También podemos determinar la circunferencia que pasa por los puntos A(-2,1), B(3,0) y tiene su centro en la recta r: x+y-4=0, diciendo que el centro de la circunferencia está en la intersección de la mediatriz del segmento AB y la recta r.

$$\text{Mediatriz AB:} \left\{\begin{array}{l} \text{Punto medio de } AB: \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \text{Vector normal al vector } \overline{AB}: (1,5) \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \text{Mediatriz}: 5x-y-2=0$$

Centro en la solución del sistema: $\left.\begin{array}{r} 5x-y-2=0 \\ x+y-4=0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad C(1,3)$

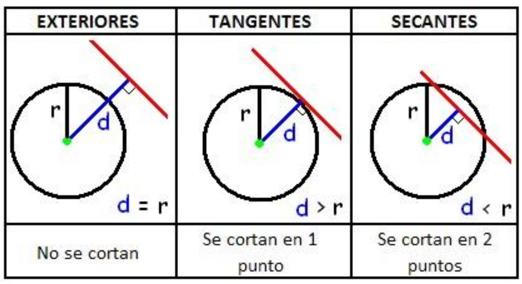
Y el radio es la distancia de, por ejemplo, A a C: $d(A,C)=\sqrt{13}$

Así, la circunferencia tiene por ecuación: $(x-1)^2+(y-3)^2=13$

3.7.1.2.- Posición relativa de una recta y una circunferencia

Dada una circunferencia y una recta, ésta puede ser ***exterior*** a la circunferencia (no tienen puntos en común), ***tangente*** a la circunferencia (tienen un punto en común) o ***secante*** (tienen dos puntos en común)

Para determinar la posición relativa, basta con resolver el sistema que forman sus respectivas ecuaciones.

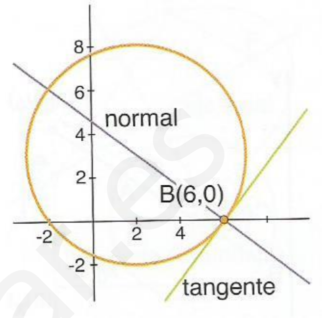


3.7.1.3.- Recta tangente y normal a una circunferencia

Como sabemos, la recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia. Por tanto, el radio está contenido en la recta que pasa por el centro de la circunferencia C(a,b) y por el punto $P(x_o,y_o)$ de tangencia. Como esta recta tiene por vector director: $\overrightarrow{CP}=(x_0-a, y_o-b)$, su pendiente es: $m=\dfrac{y_o-b}{x_o-a}$, y la pendiente de la recta tangente (por ser perpendicular) será: $m_\perp=\dfrac{x_o-a}{y_o-b}$.

Luego la ecuación de la ***recta tangente a la circunferencia*** $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ en el punto $P(x_o,y_o)$ viene dado por:

$$\boxed{y-y_o=-\frac{x_o-a}{y_o-b}(x-x_o)}$$

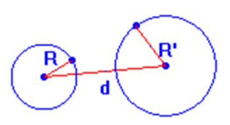
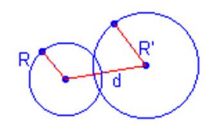
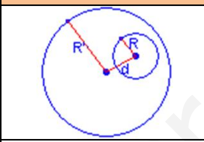
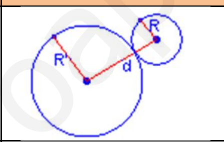
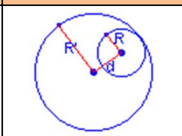
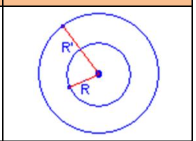


La ***recta perpendicular a la tangente*** en el punto de tangencia se llama recta normal a la circunferencia y su ecuación viene dada por la expresión:

$$\boxed{y-y_o=\frac{y_o-b}{x_o-a}(x-x_o)}$$

3.7.1.4.- Posición relativa de dos circunferencias

Dos circunferencias pueden ser:

Exteriores	**Secantes**	**Una interior a la otra**	**Tangentes exteriores**	**Tangentes interiores**	**Concéntricas**
					
d>R+R'	**R-R'<d<R+R'**	**d<R-R'**	**d=R+R'**	**d=R-R'**	**d=0**

Para hallar la posición relativa de dos circunferencias se resuelve el sistema formado por ambas ecuaciones obteniendo una ecuación de primer grado, se despeja en esta ecuación la incógnita más fácil y se sustituye en la ecuación de la circunferencia más sencilla. Así sabremos si son exteriores, tangentes o secantes, según los puntos que tengan en común. Para precisar más la posición relativa se hallan los radios R y R', y también la distancia entre los centros.

***Ejemplo:* Estudia la posición relativa de las siguientes circunferencias.**

$$C_1: x^2+y^2+2x-2y-6=0 \qquad C_2: x^2+y^2-4x'-8y+18=0$$

Resolvemos el sistema, restando a la primera ecuación la segunda. Y tenemos:

$$6x+6y-24=0 \quad\to\quad x+y-4=0 \quad\to\quad y=4-x$$

Que sustituyendo en la primera ecuación, nos da:

$$x^2+(4-x)^2+2x-2(4-x)-6=0$$

Y operando, obtenemos:

$$x^2+16-8x+x^2+2x-8+2x-6=0 \quad\leftrightarrow\quad 2x^2-4x+2=0 \quad\to\quad x^2-2x+1=0 \quad\to\quad (x-1)^2=0 \quad\to\quad x=1$$

Sustituimos x=1 en $y=4-x$, y obtenemos el punto P(1,3)

Por lo que como solo obtenemos un punto las circunferencias son tangentes. Para ver si son interiores o exteriores, calculamos la distancia entre ambas (distancia entre sus centros)

$$C_1: x^2+y^2+2x-2y-6=0 \quad\to\quad x^2+2x+1-1+y^2-2x+1-1-6=0 \quad\to\quad (x+1)^2+(y-1)^2=8 \quad\to\quad \begin{cases} C_1(-1,1) \\ r_1=2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$C_2: x^2+y^2-4x-8y+18=0 \quad\to\quad x^2-4x+4-4+y^2-8y+16-16+18=0 \quad\to\quad (x-2)^2+(y-4)^2=2 \quad\to\quad \begin{cases} C_2(2,4) \\ r_2=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$d(C_1,C_2)=\left\|\overrightarrow{C_1C_2}\right\|=\sqrt{(3)^2+(3)^2}=3\sqrt{2}$$

Y como $d(C_1,C_2)=3\sqrt{2}=r_1+r_2$ las circunferencias son ***tangentes exteriores***.

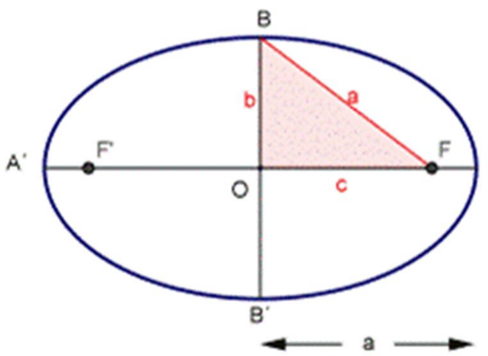
3.7.2.- Elipse

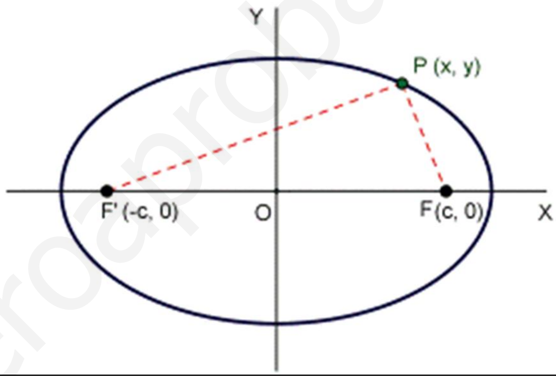
Una elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a 2a.

$$\boxed{d(P,F)+d(P,F')=K=2a}$$

3.7.2.1.- Elementos de una Elipse

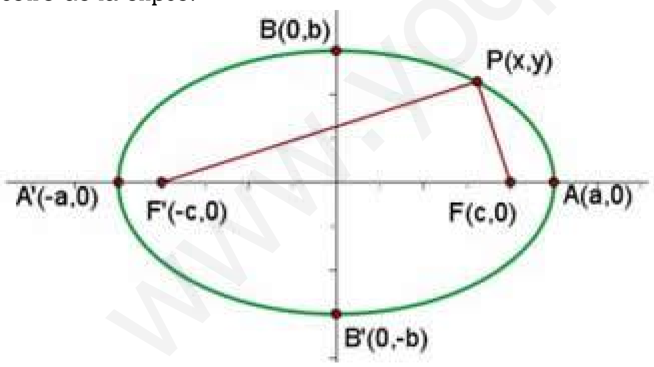
- ✓ Focos F y F' son los puntos fijos.
- ✓ Se llama ***eje focal*** a la recta que pasa por los dos focos.
- ✓ El ***eje secundario*** es la mediatriz del segmento que determinan los focos. La elipse es simétrica respecto de ambos ejes.
- ✓ El ***centro O*** es el punto de corte de los dos ejes.
- ✓ Los vértices de la elipse A, A', B, B' son los puntos de corte de ésta con los ejes. Es segmento AA' se llama ***eje mayor*** de la elipse y se representa por 2a. Al segmento BB' se le llama ***eje menor*** y se representa por 2b. El ***semieje menor*** es b.
- ✓ La distancia entre los focos se llama ***distancia focal*** y se representa por 2c; la ***semidistancia focal*** es c.





3.7.2.2.- Ecuación reducida de una Elipse

Se un sistema de referencia cuyo eje de abscisas sea el eje focal de la elipse y cuyo origen coincida con el cetro de la elipse.



En dicho sistema de referencia los focos son los puntos F(c,0) y F'(-c,0). Los vértices tienen por coordenadas A(a,0), A'(-a,0), B(0,b) y B'(0,-b).

Para cualquier punto de la elipse, la suma de sus distancias a los focos es constante, como dice su definición. Para el vértice A de la elipse, D(A,F)+d(A,F'==cte. Pero también como podemos ver en la figura d(A,F)+d(A,F')=2a.

Para el vértice B de la elipse tenemos d(B,F)+d(B,F')=2^a, (al ser iguales) 2d(B,F)=2^a, por tanto d(B,F)=a.

Al aplicar Pitágoras al triángulo OFB, tenemos que: $a^2=b^2+c^2$.

Sea P(x,y) un punto cualquiera de la elipse, podemos escribir:

$$d(P,F)+d(P,F')=2a \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

Si pasamos una raíz al segundo miembro y elevamos al cuadrado:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \leftrightarrow \quad (x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Operando, llegamos a:

$$(x-c)^2+y^2-4a^2-(x+c)^2-y^2=-4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$x^2+c^2-2xc+y^2-4a^2-x^2-c^2-2xc-y^2=-4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado otra vez:

$$-4xc-4a^2=-4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad\rightarrow\quad xc+a^2=a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad\rightarrow\quad x^2c^2+a^4+2xca^2=a^2\left(x^2+c^2+2xc+y^2\right)$$

$$x^2c^2+a^4+2xca^2=a^2x^2+a^2c^2+2a^2xc+a^2y^2 \quad\rightarrow\quad x^2\left(c^2-a^2\right)+a^2\left(a^2-c^2\right)-a^2y^2=0$$

Si pasamos el término independiente ala izquierda de la igualdad tenemos:

$$x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$

Y como $c^2-a^2=-b^2$

$$-x^2b^2-y^2a^2=-a^2b^2$$

Dividiendo todo por $-a^2b^2$, llegamos a:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Que es la ***ecuación reducida*** o ***canónica*** de la elipse.

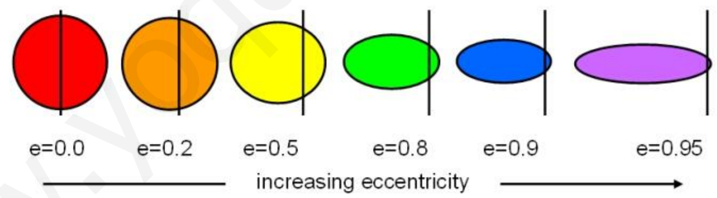
***Ejemplo:* Escribe la ecuación de la elipse de focos F(4,0) y F'(-4,0) y de semieje mayor 5.**

De la relación $a^2=b^2+c^2$, tenemos que $b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=9$

Por tanto, su ecuación reducida será: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

3.7.2.3.- Excentricidad de la Elipse

Se llama ***excentricidad*** de una elipse al número $e=\frac{c}{a}$ y su valor está comprendido entre 0 y 1.



Éste número, nos da información del achatamiento de la elipse. Si e=1, tenemos una circunferencia y si e=0, tenemos un segmento.

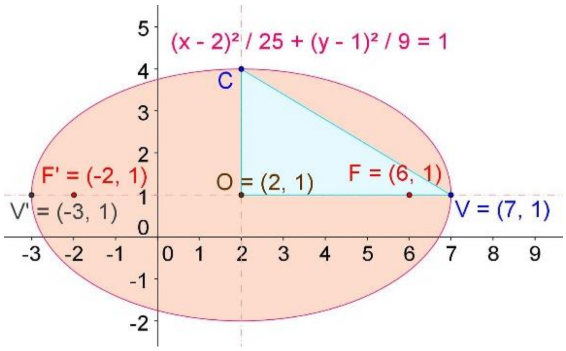
3.7.2.4.- Elipse centrada en el punto C(m,n)

La ecuación reducida de la elipse de centro C(m,n) se obtiene haciendo una traslación: x se sustituye por x-m e y por y-m, obteniendo:

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}$$

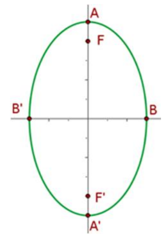
Por ejemplo, en el gráfico de la derecha tenemos la elipse de centro en O(2,1) y en la que a=5 y b=3. Su ecuación será:

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$



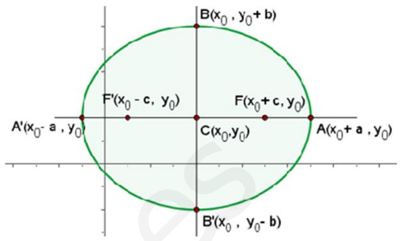
3.7.2.5.- Casos particulares

- ✓ Elipse centrada en el origen y de eje mayor en el eje de ordenadas.



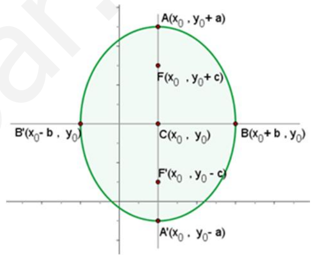
Su ecuación será: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, con a>b

- ✓ Elipse centrada en el punto $P(x_o,y_o)$ y de eje mayor paralelo al eje OX.



Su ecuación será: $\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$, con a>b.

- ✓ Elipse centrada en el punto $P(x_o,y_o)$ y de eje mayor paralelo al eje OY.



Su ecuación será: $\frac{(x-x_o)^2}{b^2}+\frac{(y-y_o)^2}{a^2}=1$, con a>b.

Ejemplo: ***Halla el centro, los semiejes y la excentricidad de la elipse de ecuación $4x^2+8y^2+4x-16y-7=0$***

La ecuación puede escribirse $4(x^2+x)+8(y^2-2y)=7$.

Completando cuadrados en el primer miembro de la ecuación, tenemos:

$$4\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-1+8\left(y^2-2y+1\right)-8=7 \quad \to \quad 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+8(y-1)^2=16$$

Si dividimos todo por 16, tenemos:

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$$

Y de aquí, el centro es el punto $\left(-\frac{1}{2},1\right)$. Como $a^2=4$, entonces tenemos que el semieje mayor a=2, y el semieje menor es $b=\sqrt{2}$

De la relación $a^2=b^2+c^2$, tenemos que $c^2=4-2=2 \quad \to \quad c=\sqrt{2}$ y por tanto la excentricidad es: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.7.3.- La Hipérbola

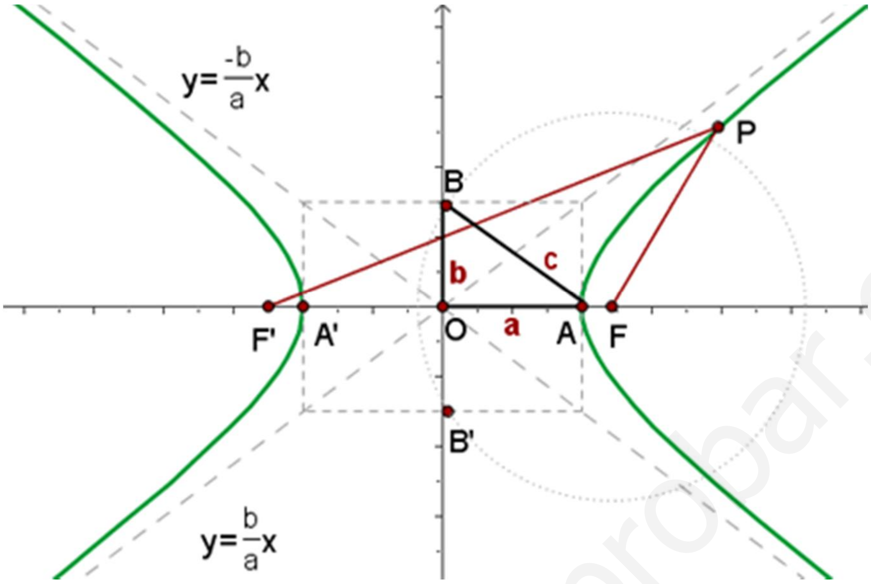
Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a 2a. La hipérbola tiene dos ramas

$$\boxed{\left|d(P,F)-d(P,F')\right|=K=2a}$$

3.7.3.1.- Elementos de una hipérbola

- ✓ Focos F y F' son los puntos fijos.
- ✓ Se llama ***eje focal*** a la recta que pasa por los dos focos.
- ✓ El ***eje secundario*** es la mediatriz del segmento que determinan los focos. La hipérbole es simétrica respecto de ambos ejes.
- ✓ El ***centro O*** es el punto de corte de los dos ejes.

- ✓ La distancia entre los focos se llama ***distancia focal*** y se representa por 2c; la ***semidistancia focal*** es c.
- ✓ Los vértices A, A' son los puntos de corte la hipérbola con el eje focal. Es segmento AA' se llama ***eje real o mayor*** de la hipérbola y se representa por 2a.
- ✓ Al segmento BB' se le llama ***eje imaginario o menor*** y se representa por 2b. El ***semieje menor*** es b. Se define de modo que se verifique $c^2=a^2+b^2$.



3.7.3.2.- Ecuación reducida de una hipérbola

Mediante un razonamiento similar al utilizado para la deducción de la ecuación de la elipse, y partiendo en este caso desde $|d(P,F)-d(P,F')|=2a$, llegamos a:

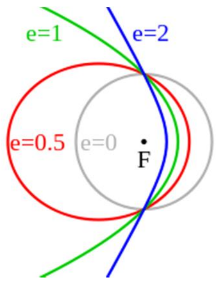
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Que es la ***ecuación reducida*** o ***ecuación canónica*** de una hipérbola.

3.7.3.3.- Excentricidad de la Hipérbola

Se llama ***excentricidad*** de una hipérbola al número $e=\frac{c}{a}$ y su valor es siempre mayor que 1.

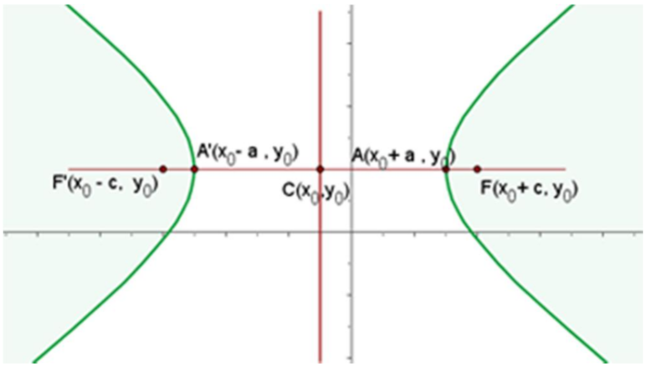
Éste número, nos da información de la curvatura de sus ramas: cuando disminuye, aumenta la curvatura de las ramas (en el caso extremo, e=1, degenera en dos semirectas).

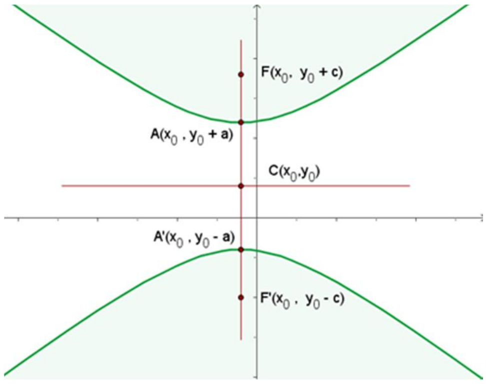


3.7.3.4.- Casos Particulares

- Si el centro de la hipérbola es $C(x_o,y_o)$ y el eje principal es paralelo a OX, los focos tienen de coordenadas $F(x_0+c,\ y_0)$ y $F'(x_0-c,\ y_0)$. Y la ecuación de la hipérbola será:

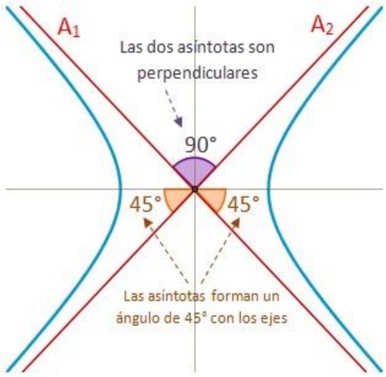
$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}$$





- Si el centro de la hipérbola $C(x_0, y_0)$ y el eje principal es paralelo a OY, los focos tienen de coordenadas $F(x_0, y_0+c)$ y $F'(x_0, y_0-c)$. Y la ecuación de la hipérbola será:

$$\boxed{\frac{(x-m)^2}{b^2}-\frac{(y-n)^2}{a^2}=1}$$



- La hipérbole en la que los semiejes real e imaginarios son iguales, a=b, se llama, por la igualdad de sus semiejes, ***hipérbola equilátera.***

Su ecuación tiene la forma:

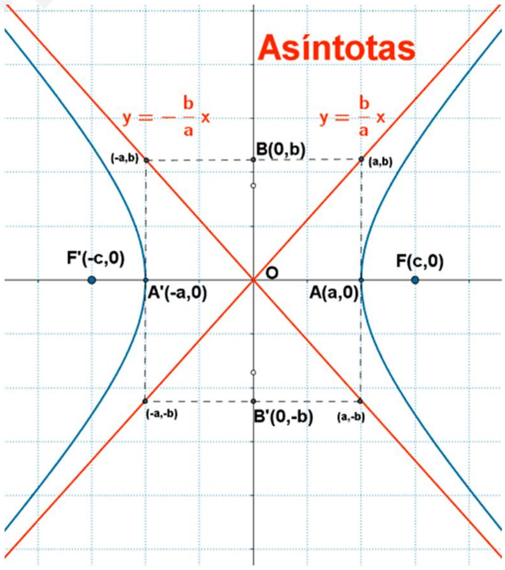
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \rightarrow \quad x^2-y^2=a^2}$$

Y su excentricidad $c=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$

3.7.3.5.- Asíntotas de una hipérbola

Las asíntotas de una hipérbola son las líneas que pasan por el centro de la hipérbola y tocan la hipérbola en el infinito. Básicamente actúan como tangentes a las dos ramas de la hipérbola al infinito.

Para calcularlas, escribimos la ecuación reducida de la hipérbola, cambiamos el uno por cero, desarrollamos la identidad notable, y despejamos y en cada uno de los miembros.



<u>*Veamos un ejemplo*</u>, para que quede más claro el proceso: Vamos a obtener las asíntotas de la siguiente hipérbola:

$$\frac{(x-3)^2}{169}-\frac{(y+2)^2}{121}=1$$

La igualamos a cero: $\frac{(x-3)^2}{169}-\frac{(y+2)^2}{121}=0$,

La convertimos en una diferencia de cuadrados:

$$\left(\frac{x-3}{13}\right)^2-\left(\frac{y+2}{11}\right)^2=0$$

Lo convertimos en una suma por diferencia:

$$\left(\frac{x-3}{13}+\frac{y+2}{11}\right)\cdot\left(\frac{x-3}{13}-\frac{y+2}{11}\right)=0$$

Y como el producto es cero, ambos pueden ser cero, y por tanto, tenemos:

$$\left(\frac{x-3}{13}+\frac{y+2}{11}\right)=0 \quad \rightarrow \quad 11(x-3)+13(y+2)=0 \quad \rightarrow \quad 11x-33+13y+26=0$$

$$\left(\frac{x-3}{13}-\frac{y+2}{11}\right)=0 \quad \rightarrow \quad 11(x-3)-13(y+2)=0 \quad \rightarrow \quad 11x-33-13y-26=0$$

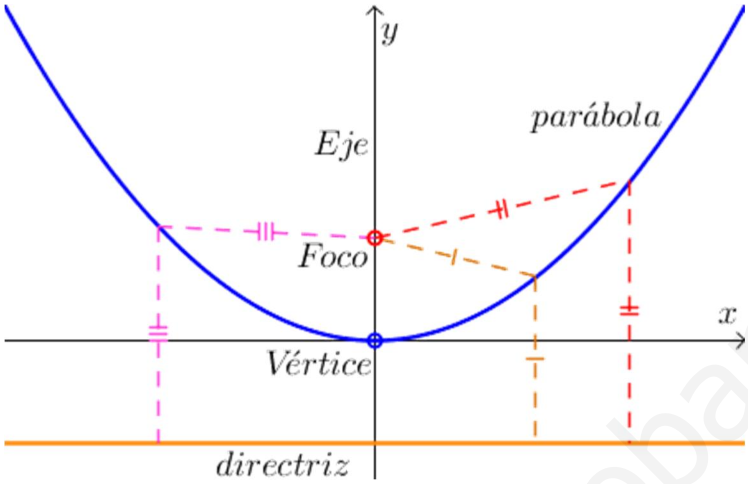
De donde si despejamos y en ambas ecuaciones: $y=-\frac{11}{13}x+\frac{7}{13}$ $\qquad$ $y=\frac{11}{13}x+\frac{59}{13}$

Obtenemos las ecuaciones de las dos asíntotas.

3.7.4.- La Parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos, P, del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado foco, y de una recta fija δ llamada directriz.

Esto es, si P es un punto de la parábola se cumple que: $d(P,F) = d(P,\delta)$



3.7.4.1.- Elementos de una parábola

- La recta que pasa por el **foco** y es perpendicular a la directriz se llama **eje** de la parábola. La parábola es simétrica respecto de su eje.
- El **vértice** V es el punto de corte de la parábola y su eje.
- La distancia del vértice al foco se llama **distancia focal** y se representa por p/2. El número p, distancia del foco a la directriz, es el **parámetro** de la parábola.

3.7.4.2.- Ecuación de una parábola

Tomemos el vértice de la parábola como origen de coordenadas y su eje como el eje OX.

En este sistema de referencia el foco tiene por coordenadas $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ y la directriz es la recta $\delta = -\frac{p}{2}$, si el punto P(x,y) es de la parábola, la relación $d(P,F) = d(P,\delta)$ equivale a :

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|$$

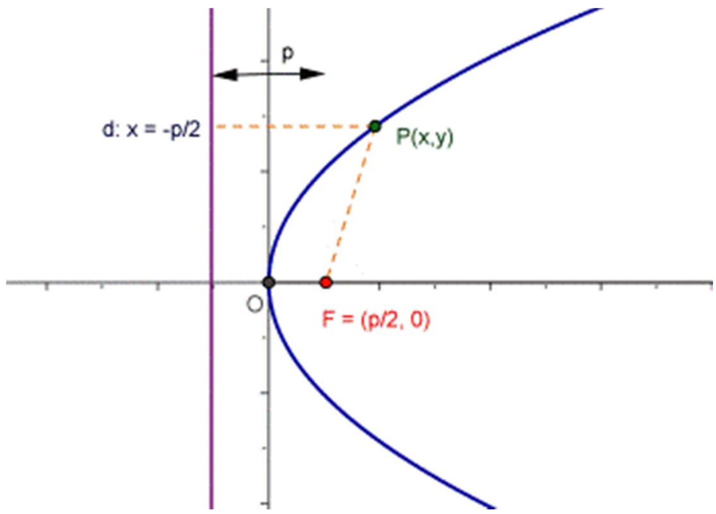
Elevando ambos miembros al cuadrado se tiene:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

Si operamos, resulta la expresión:

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Que es la ecuación de la parábola.



Así, por ejemplo, la parábola del foco en F(2,0) y directriz la recta $\delta : x = -2$ tiene por parámetro p=4, luego su ecuación es:

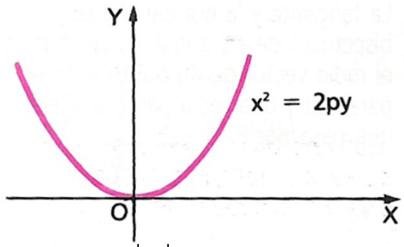
$$y^2 = 2{\cdot}4x = 8x$$

3.7.4.4.- Casos Particulares

Mediante cálculos similares al anterior, se obtienen las ecuaciones de los siguientes tipos de parábolas:

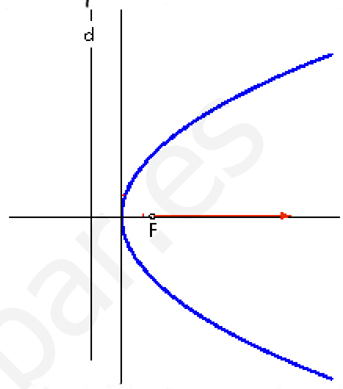
- De vértice en el origen y su eje coincide con el eje OY:

  Su ecuación es: $\boxed{x^2 = 2py}$



Por ejemplo, en la parábola de foco en F(0,3) y directriz $\delta = -3$, es p=6, luego su ecuación es $x^2 = 12y$

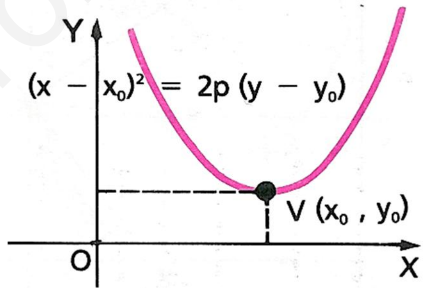
- De vértice en el punto V(x_o,y_o) y eje paralelo al eje OX:



Su ecuación es: $\boxed{(y - y_o)^2 = 2p(x - x_o)}$

Su fofo es el punto $F\left(x_o + \dfrac{p}{2}, y_o\right)$; su directriz es la recta $x = x_o - \dfrac{p}{2}$

- De vértice en el punto V(x_o,y_o) y eje paralelo al OY:



Su ecuación es: $\boxed{(x - x_o)^2 = 2p(y - y_o)}$

Su fofo es el punto $F\left(x_o, y_o + \dfrac{p}{2}\right)$; su directriz es la recta $y = y_o - \dfrac{p}{2}$

Observación: *En cursos anteriores ya has trabajado con un tipo de parábola; su ecuación era de la forma:* $y = ax^2 + bx + c$ *, su vértice estaba e, el punto* $V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ *y su eje era la recta:* $x = -\dfrac{b}{2a}$

Ejemplo: **Determina el foco, la directriz, el vértice y el eje de la parábola de ecuación** $y^2 + 6x + 6y + 3 = 0$

La ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$y^2 + 6y = -6x - 3$$

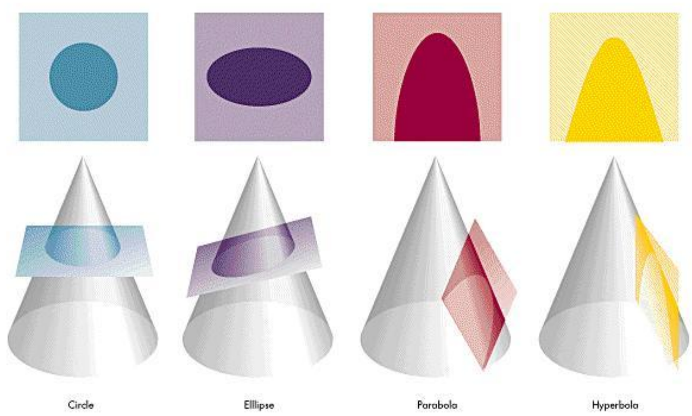
Completando el cuadrado del primer miembro:

$$y^2 + 6y + 9 = -6x - 3 + 9 \quad \rightarrow \quad (y+3)^2 = -6(x-1)$$

Así el vértice es el punto *V(1,-3)*, y el eje la recta directriz *y=-3*.

Como 2p=-6, entonces p=-3 y por tanto el foco es el punto $F\left(1 - \dfrac{3}{2}, -3\right) = \left(\dfrac{-1}{2}, -3\right)$

Y la directriz es la recta $\delta : x = 1 + \dfrac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{5}{2}$



3.7.5.- Ecuación General de una cónica

Una ecuación general de 2º grado en dos variables $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ corresponde a una sección cónica, quizá degenerada (un par de rectas secantes, paralelas o coincidentes) o imaginaria (sin puntos reales), o reducirse a un único punto.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

El tipo de la cónica viene determinado por el discriminante $D = b^2 - 4ac$.

- ✓ Si D < 0, es de tipo elíptico, ya sea una elipse, un círculo, un punto o ninguna curva
- ✓ Si D = 0, de tipo parabólico, una parábola, dos rectas paralelas, una recta o ninguna curva.
- ✓ Si D > 0, de tipo hipérbólico, una hipérbola o 2 rectas secantes

Según los casos, se presentan los focos, vértices principales y secundarios, eje principal y secundario, asíntotas y directrices.

Las soluciones de la ecuación de 2º grado $c{*}m^2 + b{*}m + a = 0$, son las pendientes de las direcciones asintóticas de la cónica: las de las asíntotas en el caso de una hipérbola, o la del eje principal en el caso de una parábola.

Salvo que sea vertical. En ese caso, se puede tomar la ecuación $a{*}t^2 + b{*}t + c = 0$, cuyas soluciones serían los inversos de esas pendientes (0, para una recta vertical). Ambas ecuaciones tienen el mismo discriminante $b^2 - 4ac$, y esto explica por qué su valor determina el tipo de la cónica.

	Círculo	**Elipse**	**Parábola**	**Hipérbola**
Ecuación (vértice horizontal):	$x^2 + y^2 = r^2$	$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$	$4px = y^2$	$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$
Ecuaciones de las asíntotas:				$y = \pm (b/a)x$
Ecuación (vértice vertical):	$x^2 + y^2 = r^2$	$y^2 / a^2 + x^2 / b^2 = 1$	$4py = x^2$	$y^2 / a^2 - x^2 / b^2 = 1$
Ecuaciones de las asíntotas:				$x = \pm (b/a)y$
Variables:	**r** = el radio del círculo	**a** = el radio mayor (= 1/2 la longitud del eje mayor) **b** = el radio menor (= 1/2 la longitud del eje menor) **c** = la distancia desde el centre al foco	**p** = la distancia desde el vértice al foco (o a la directriz)	**a** = 1/2 la longitud del eje mayor **b** = 1/2 la longitud del eje menor **c** = la distancia desde el centro al foco
Excentricidad:	0		c/a	c/a
El Relación al Foco:	p = 0	$a^2 - b^2 = c^2$	p = p	$a^2 + b^2 = c^2$
Definición: es el conjunto de todos los puntos que cumple la condición...	la distancia al origen es constante	la suma del las distancias a cada foco es constante	la distancia al foco = la distancia a la directriz	la diferencia entre las distancias a cada foco es constante

3.8.- Ejercicios resueltos

1.- Dado el triángulo de vértices A(2, 4), B(6, 5) y C(4, 1), halla:
  a) Las ecuaciones de las alturas que parten de A y de C.
  b) El ortocentro.

a) Altura que parte de A:

Como es perpendicular a la recta que pasa por B y por C, para obtener su pendiente hacemos lo siguiente:

La pendiente de la recta que pasa por B y C es: $m = \dfrac{5-1}{6-4} = \dfrac{4}{2} = 2$

La pendiente de la recta perpendicular es: $\dfrac{-1}{2}$

Así la ecuación de la altura es: $y = 4 - \dfrac{1}{2}(x-2) \;\rightarrow\; 2y = 8 - x + 2 \;\rightarrow\; x + 2y - 10 = 0$

Altura que parte de C:

La pendiente de la recta que pasa por A y B es: $m=\dfrac{5-4}{6-2}=\dfrac{1}{4}$

La pendiente de la perpendicular es: $\dfrac{-1}{1/4}=-4$

Así, la ecuación de la altura es: $y=1-4(x-4) \;\rightarrow\; y=1-4x+16 \;\rightarrow\; 4x+y-17=0$

b) El ortocentro es el punto de corte de las alturas:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-10=0 \\ 4x+y-17=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-2y+10 \\ 4(-2y+10)+y-17=0 \end{array}$$

$$-8y+40+y-17=0$$

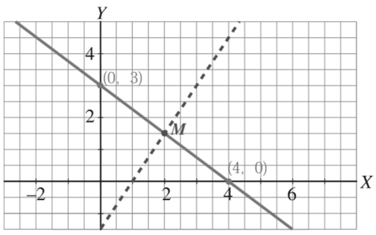
$$-7y=-23 \;\rightarrow\; y=\frac{-23}{-7}=\frac{-23}{7}$$

$$x=-2y+10=\frac{24}{7}$$

Por tanto el ortocentro es el punto $\left(\dfrac{24}{7}, \dfrac{23}{7}\right)$

2.- Halla la ecuación de la mediatriz del segmento que tiene como extremo los puntos de corte de la recta 3x + 4y -12 = 0 con los ejes de coordenadas.

1º) Hallamos los puntos de corte de la recta $3x + 4y - 12 = 0$ con los ejes de coordenadas:



$x = 0$; $4y - 12 = 0$; $y = 3$; Punto (0, 3)
$y = 0$; $3x - 12 = 0$; $x = 4$; Punto (4, 0)

2º) La mediatriz de un segmento es perpendicular a él y pasa por su punto medio.

El punto medio del segmento de extremos (0, 3) y (4, 0) es: $M\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$

La pendiente de la recta que une los puntos (0. 3) y (4, 0) es: $m=\dfrac{-3}{4}$

La pendiente de su perpendicular es: $m'=\dfrac{-1}{-3/4}=\dfrac{4}{3}$

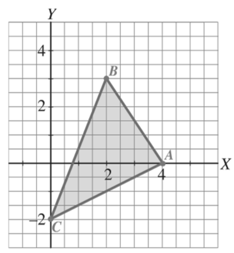
3.º) La ecuación de la mediatriz será: $y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}(x-2) \;\rightarrow\; y=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4x}{3}-\dfrac{8}{3}$

$$6y=9+8x-16 \;\rightarrow\; 8x-6y-7=0$$

3.- Halla el área del triángulo de vértices A(4,0), B(2,3) y C(0,-2).

1º) Tomamos el lado AC como base: $\left|\overline{AC}\right|=\left|(-4,-2)\right|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

2º) La altura será la distancia de B a la recta, r que pasa por A y C.
Hallamos la ecuación de la recta.



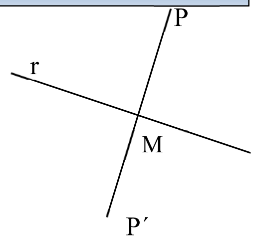
$$pendiente=\frac{-2-0}{0-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$y=\frac{1}{2}(x-4) \;\rightarrow\; 2y=x-4 \;\rightarrow\; r: x-2y-4=0$$

Por tanto: $altura=dist(B,r)=\dfrac{|2-2\cdot 3-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2-6-4|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

3º) El área será: $Área=\dfrac{base\cdot altura}{2}=\dfrac{\sqrt{20}\cdot\dfrac{8}{\sqrt{5}}}{2}=\dfrac{\sqrt{4}\cdot 8}{2}=\dfrac{2\cdot 8}{2}=8\ \text{u}^2$

4.- Halla el punto simétrico de P(2,3) respecto de la recta r: 3x-y+5=0.



1º) Hallamos la ecuación de la recta, s, perpendicular a r que pasa por P:

Pendiente de r: $y = 3x + 5$, de donde: $m=3$

Pendiente de la perpendicular $\rightarrow \frac{-1}{3}$

La ecuación de s será: $y = 3 - \frac{1}{3}(x-2) \rightarrow 3y = 9 - x + 2 \rightarrow x + 3y - 11 = 0$

2º) Hallamos el punto, M, de intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y + 5 = 0 \\ x + 3y - 11 = 0 \end{array}\right\} x = 11 - 3y \Rightarrow 3(11-3y) - y + 5 = 0 \rightarrow 33 - 9y - y + 5 = 0 \rightarrow 38 = 10y$$

$$y = \frac{38}{10} = \frac{19}{5} \rightarrow x = 11 - 3y = 11 - \frac{57}{5} = \frac{-2}{5}$$

El punto es $M\left(-\frac{2}{5}, \frac{19}{5}\right)$.

3º) Si llamamos P'(x, y), al simétrico de P con respecto a r, M es el punto medio del segmento que une P con P'.

Por tanto:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{-2}{5} \rightarrow 5x + 10 = -4 \rightarrow 5x = -14 \rightarrow x = -\frac{14}{5}$$

$$\frac{y+3}{2} = \frac{19}{5} \rightarrow 5y + 15 = 38 \rightarrow 5y = 23 \rightarrow y = \frac{23}{5}$$

Luego: $P'\left(\frac{-14}{5}, \frac{23}{5}\right)$

5.- Dados los puntos A(–2, 1) y B(1, 3), halla las rectas que pasan por A y distan dos unidades de B.

La ecuación de cualquier recta que pasa por A será de la forma (punto pendiente) y – 1 = m (x + 2)

$\Rightarrow$ m (x + 2) – y + 1 = 0. $\Rightarrow$ mx – y +1 + 2m

La distancia de esta recta al punto B, es: $d = \frac{|m - 3 + 1 + 2m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow |3m-2| = 2\sqrt{m^2+1}$.

Elevando al cuadrado: $(3m-2)^2 = 4(m^2+1) \Rightarrow 9m^2 - 12m + 4 = 4m^2 + 4 \Rightarrow 5m^2 - 12m = 0 \Rightarrow$

$m\cdot(5m - 12) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{12}{5} \end{array}\right.$. Las rectas pedidas son: y = 1 y 12x – 5y + 29 = 0

6.- En un triángulo isósceles, el lado desigual está sobre los puntos (2, 2) y (5, 3). Calcula el tercer vértice sabiendo que se encuentra sobre la recta r de ecuación: x + 1 = y

Si el lado desigual se encuentra sobre los puntos A(2,2) y B(5,3), quiere decir que estos, A y B, son dos de los vértices del triángulo. Estos dos puntos estarán a la misma distancia del tercer vértice, puesto que el enunciado dice que el triángulo es isósceles.

Como el tercer vértice, C, está sobre la recta r: x-y+1=0, sus coordenadas genéricas serán: $C(x, x+1)$, así que los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ serán:

$$\overrightarrow{AC} = (x-2, x+1-2) = (x-2, x-1)$$
$$\overrightarrow{BC} = (x-5, x+1-3) = (x-5, x-2)$$

Si calculamos el módulo de cada uno de ellos y los igualamos (puesto que se corresponden con los lados iguales) tenemos:

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(x-2)^2 + (x-1)^2} = \sqrt{2x^2 - 6x + 5}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(x-5)^2 + (x-2)^2} = \sqrt{2x^2 - 14x + 29}$$

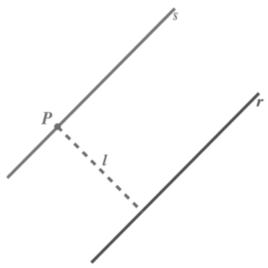
$$\sqrt{2x^2 - 6x + 5} = \sqrt{2x^2 - 14x + 29} \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 6x + 5 = 2x^2 - 14x + 29 \quad \rightarrow \quad -6x + 5 = -14x + 29$$

Y despejando x, tenemos:

$$-6x + 14x = 29 - 5 \quad \rightarrow \quad 8x = 24 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

Por tanto el vértice C se corresponde con: $C(x, x+1) = (3,4)$

7.- Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están sobre las rectas r:2x-3y+4=0 y s:2x-3y+1=0. Calcula el área de dicho cuadrado.



Aunque no sepamos dónde está situado exactamente el cuadrado, sí sabemos que la longitud de su lado es la distancia entre las dos rectas.

Para calcular esta distancia, tomamos un punto, P, de s y hallamos su distancia a r. (Previamente hemos observado que r y s son paralelas, puesto que $\frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{4}{1}$)

Para obtener un punto P, de s, basta con sustituir $x=1$ en la recta; $2-3y+1=0$, *de donde*, $3=3y$; y por tanto, $y=1$

Tomamos entonces $P(1,1)$ y calculamos su distancia a la recta r:

$$dist(P,\ r) = \frac{|2-3+4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4+9}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Por tanto el lado del cuadrado es: $\frac{3}{\sqrt{13}}$. Y, su área será: $Área = (lado)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{9}{13} \approx 0{,}69 \text{ u}^2$

8.- Sea ABCD un cuadrado de área 40 y centro en (6,6). Sabiendo que uno de sus vértices está en A(4,y). Hallar las coordenadas de los otros vértices.

Si el área del cuadrado es de 40, quiere decir que sus lados miden $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, por tanto la diagonal de dicho cuadrado mide, utilizando Pitágoras: $d = \sqrt{\left(2\sqrt{10}\right)^2 + \left(2\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. Por tanto, si la diagonal mide esto, la distancia del vértice A al centro G(6,6) medirá la mitad. $2\sqrt{5}$.

La distancia del vértice A al centro G, es el módulo del vector $\overrightarrow{AG}$.

Calculando el vector $\overrightarrow{AG} = G - A = (6,6) - (4,y) = (2, 6-y)$, y su módulo, e igualando a $2\sqrt{5}$, obtenemos:

$$\left\|\overrightarrow{AG}\right\| = \sqrt{2^2 + (6-y)^2} = \sqrt{4 + 36 + y^2 - 12y} = 2\sqrt{5},$$

De aquí, podemos despejar y:

$$4+36+y^2-12y=20 \quad\rightarrow\quad y^2-12y+20=0 \quad\rightarrow\quad (y-10)\cdot(y-2)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} y_1=10 \\ y_2=2 \end{cases}$$

- **Si tomamos y=2:**

A es el punto (4,2), G(6,6) y vértice C es el punto simétrico de A con respecto a G, por tanto, utilizando que G es el punto medio de A y C, tenemos:

$$(6,6)=\left(\frac{4+x}{2},\frac{2+y}{2}\right) \quad\rightarrow\quad \begin{cases} 4+x=12 & \rightarrow \quad x=8 \\ 2+y=12 & \rightarrow \quad y=10 \end{cases}$$

Por tanto, el vértice C es el punto C(8,10)

Como se trata de un cuadrado, sus diagonales son perpendiculares. Así que vamos a hallar las ecuaciones de sus dos diagonales:

La diagonal que pasa por A y por G, es una recta de vector director $\overline{AG}=(2,4)$ que pasa por G(6,6), por tanto:

$$r_{AG}:\frac{x-6}{2}=\frac{y-6}{4} \quad\rightarrow\quad 4x-2y=2y-12 \quad\rightarrow\quad 4x-2y-12=0 \quad\rightarrow\quad r_{AG}:2x-y-6=0$$

La otra diagonal, como es perpendicular a ésta, tendrá por ecuación: $r_\perp = S: x+2y+K=0$, como también pasa por G(6,6), tenemos que:

$$S: x+2y-18=0$$

Así que un punto genérico de esta nueva diagonal será un punto de coordenadas: $g_s=\left(x,\frac{18-x}{2}\right)$

Si calculamos los puntos de esta recta que están a una distancia $2\sqrt{5}$ del punto G, obtendremos los otros dos vértices B y D:

$$d(G,B)=2\sqrt{5} \quad\rightarrow\quad \left\|\overline{GB}\right\|=2\sqrt{5}$$

Calculamos el vector $\overline{GB}=\left(x-6,\frac{18-x}{2}-6\right)=\left(x-6,\frac{18-x-12}{2}\right)=\left(x-6,\frac{6-x}{2}\right)$ e igualamos su módulo a:

$$\sqrt{(x-6)^2+\left(\frac{6-x}{2}\right)^2}=2\sqrt{5} \quad\rightarrow\quad x^2+36-12x+\frac{36+x^2-12x}{4}=20 \quad\rightarrow\quad 4x^2+144-48x+36+x^2-12x=80$$

Operando, llegamos a una ecuación de segundo grado:

$$5x^2-60x+100=0 \quad\rightarrow\quad x^2-12x+20=0 \quad\rightarrow\quad (x-10)\cdot(x-2)=0$$

Que resolviendo nos da dos soluciones: $\begin{cases} x_1=10 \\ x_2=2 \end{cases}$

Por tanto los vértices B y D serán: $g_s=\left(x,\frac{18-x}{2}\right) \quad\rightarrow\quad B(10,4) \quad y \quad D(2,8)$

Así que los vértices del cuadrado serán: A(4,2) B(10,4), C(8,10) y D(2,8)

- **Si tomamos y=10**

Reiterando el procedimiento anterior, tendremos que el vértice A' es (4,10), y que C'(8,2).

Si calculamos la diagonal que una A' con G, obtenemos: $2x+y-18=0$

La otra diagonal será: $x-2y+6=0$

Un punto genérico de esta diagonal será el: $\left(x,\frac{x+6}{2}\right)$ y si volvemos a calcular los puntos de esta recta que están a distancia $2\sqrt{5}$ de G, obtendremos:

$$\overline{GD'}=\left(x-6,\frac{x-6}{2}\right)$$

Y por tanto:

$$\sqrt{(x-6)^2+\left(\frac{x-6}{2}\right)^2}=2\sqrt{5} \quad \rightarrow \quad x^2+36-12x+\frac{36+x^2-12x}{4}=20 \quad \rightarrow \quad 4x^2+144-48x+36+x^2-12x=80$$

Operando, llegamos a una ecuación de segundo grado:

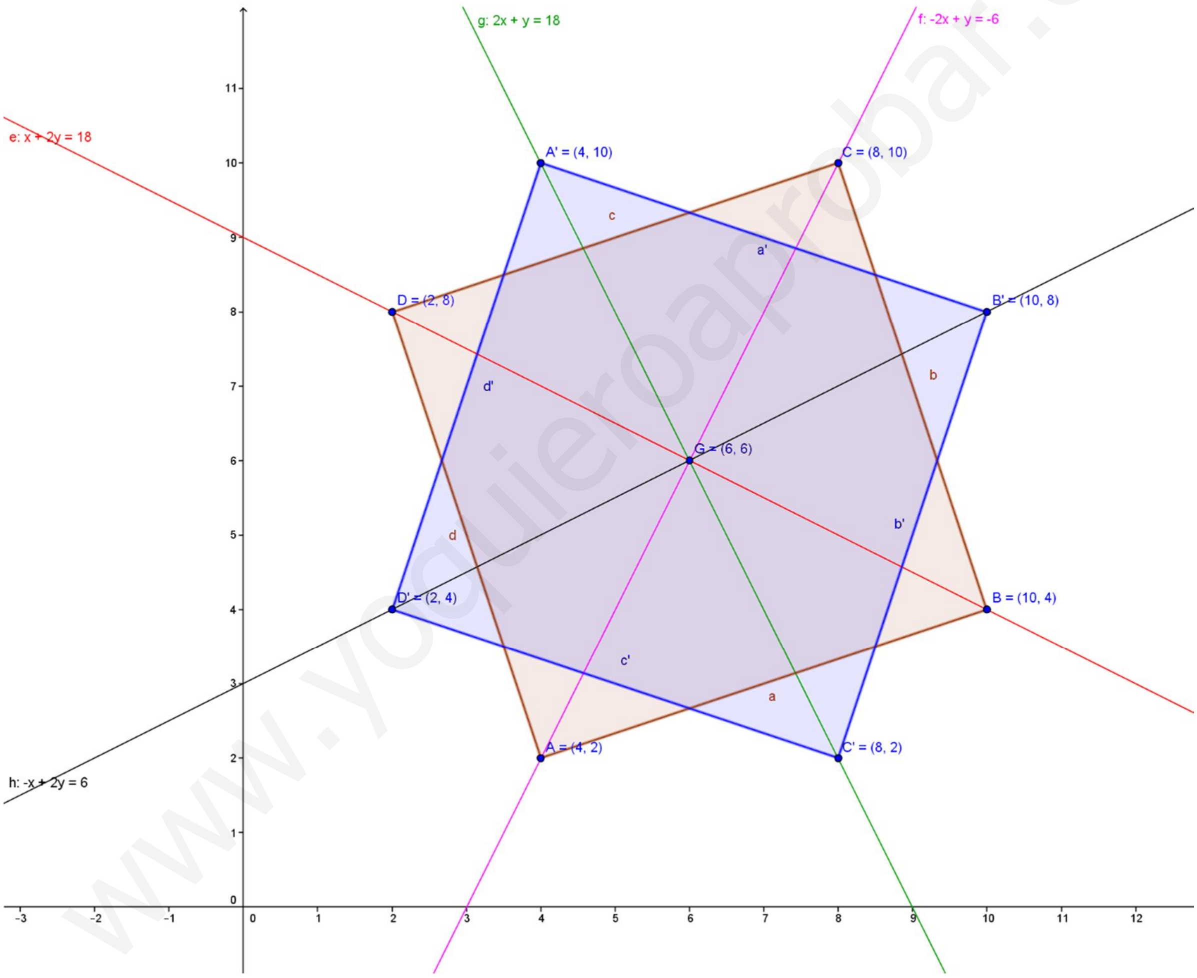
$$5x^2-60x+100=0 \quad \rightarrow \quad x^2-12x+20=0 \quad \rightarrow \quad (x-10)\cdot(x-2)=0$$

Que resolviendo nos da dos soluciones: $\begin{cases} x_1=10 \\ x_2=2 \end{cases}$

Por tanto los vértices B' y D' serán: $g_s=\left(x,\frac{x+6}{2}\right) \quad \rightarrow \quad B'(10,8) \quad y \quad D'(2,4)$

Así que los vértices del cuadrado serán: A'(4,10) B'(10,8), C'(8,2) y D'(2,4)

Representando ambas soluciones, vemos que obtenemos dos cuadrados que verifican el enunciado del ejercicio:



> 9.- Sean la recta *r: mx-y=1* y la recta *s: x-my=2m-1*. (2 puntos)
> a) Estudia la posición relativa de las rectas, según los valores del parámetro *m*.
> b) Determina m si ambas rectas se cortan en un punto de accisa x=3.

Los vectores directores de r y s son $\vec{r}=(m,-1)$ y $\vec{s}(1,-m)$. Para que las rectas sean paralelas, ha de ocurrir que $\frac{m}{1}=\frac{-1}{-m} \quad \rightarrow \quad -m^2=-1 \quad \rightarrow \quad m=\pm 1$

Por tanto, si m es 1 ó -1, las rectas son paralelas. Veamos si sin coincidentes o no:

- Si m=1, las rectas r y s son: $\begin{cases} r: x-y-1=0 \\ s: x-y-1=0 \end{cases}$, que como vemos son la misma, por tanto son coincidentes.
- Si m=-1, las rectas r y s son: $\begin{cases} r: -x-y-1=0 \\ s: x+y+3=0 \end{cases}$, que como podemos observar no son la misma, por tanto las rectas son paralelas no coindicentes.

En el caso de que m no sea ni 1 ni -1, las rectas son secantes. Veamos el caso en el que ambas son perpendiculares:

Para que sean perpendiculares, ha de ocurrir que el producto escalar de los dos vectores directores sea nulo:
r y s son perpendiculares $\Leftrightarrow \quad \vec{r}\cdot\vec{s}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (m,-1)\cdot(1,-m)=0 \quad \Leftrightarrow \quad m+m=0 \quad \rightarrow \quad 2m=0$
Por tanto para que sean perpendiculares, ha de ocurrir que m=0.

- Si m≠1 y m≠-1, las rectas son secantes.
- Si m=0, las rectas son perpendiculares.

Si ambas rectas se cortan en un punto con x=3, tenemos que el punto de corte será (3,y), por tanto, si sustituimos en ambas rectas:

$$\begin{cases} r: 3\mathrm{m}-y-1=0 \\ s: 3-\mathrm{m}y+1-2m=0 \end{cases}$$

despejando y de la primera y sustituyendo en la segunda:

$$\begin{cases} y=3\mathrm{m}-1 \\ 3-\mathrm{m}(3\mathrm{m}-1)+1-2m=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 3-3m^2+m+1-2m=0 \quad \rightarrow \quad -3m^2-m+4=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado en m, obtenemos:

$$3m^2+m-4=0 \quad \rightarrow \quad m=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot3\cdot4}}{6}=\frac{-1\pm7}{6} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m_1=1 \\ m_2=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

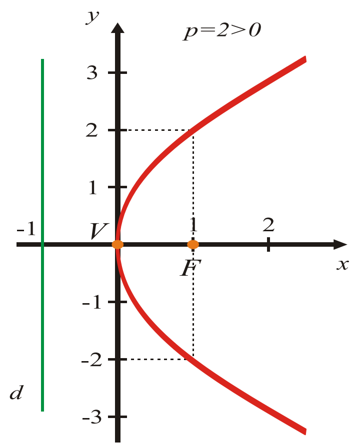
Si m=1, como son coincidentes, es claro que se cortan en un punto de abscisa 3, y para el otro caso, son secantes en el punto de abscisa 3

10.- Encuentra los elementos de las siguientes parábolas y dibújalas:
a) $y^2=4x$ b) $x^2=10y$ c) $(y-4)^2=4(x+1)$ d) $(x-3)^2=-6(y-1)$

a) $y^2=4x$; $2p=4 \quad \Rightarrow \quad p=2$. El parámetro $p=2$ ($p>0$), la parábola se abre a la derecha del eje $\boldsymbol{y}$.

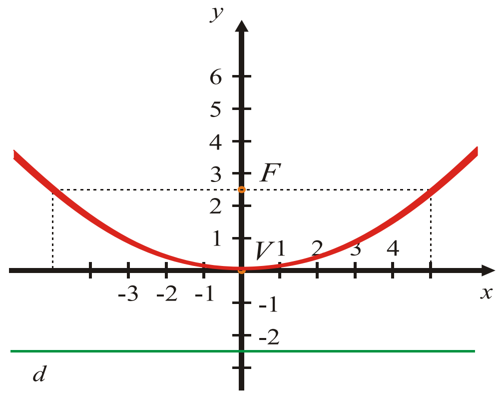
El vértice $V(0,0)$. El foco está sobre el eje $\boldsymbol{x}$ y tiene coordenadas $F\left(\frac{p}{2},0\right)=(1,0)$. La directriz tiene ecuación $x=-\frac{p}{2}=-1$.

El eje de la parábola es el eje $\boldsymbol{x}$. Si $x=1$; $y^2=4 \quad \Rightarrow \quad y=\pm2$



Observación: Para saber cuánto se abre la rama de la parábola, se reemplaza la coordenada $\boldsymbol{x}$ o $\boldsymbol{y}$ del foco y se determina la ordenada o abscisa del mismo.

b) $x^2 = 10y$



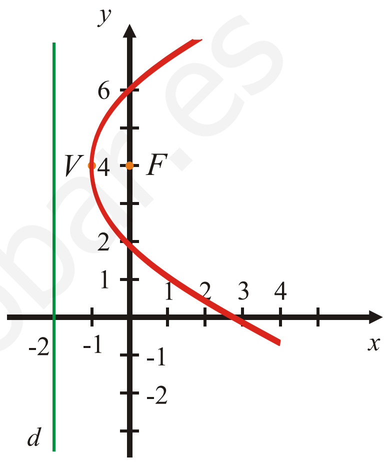
$V(0,0)$. El eje de la parábola es el eje $\boldsymbol{y}$.

$2p = 10 \quad \Rightarrow \quad p = 5$, $F\left(0,\dfrac{p}{2}\right) = \left(0,\dfrac{5}{2}\right)$.

La directriz tiene ecuación $y = -\dfrac{p}{2} = -\dfrac{5}{2}$.

Si $y = \dfrac{5}{2}$; $x^2 = 10 \cdot \dfrac{5}{2} = 25 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 5$

c) $(y-4)^2 = 4(x+1)$



De la ecuación observamos que el vértice es.

$$2p = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2 > 0.$$

El foco es ahora: $F\left(x_0 + \dfrac{p}{2}, y_0\right)$ $F(-1+1,4) = (0,4)$.

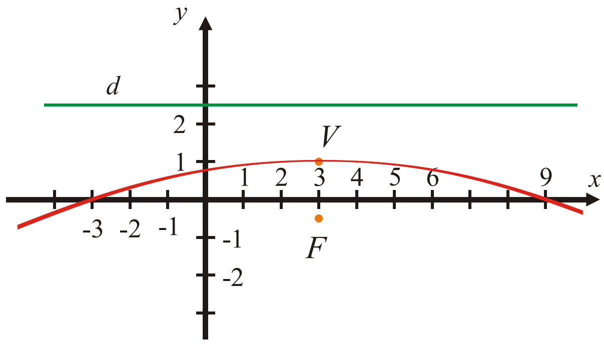
La directriz es: $x = x_0 - \dfrac{p}{2} = -1-1 = -2$; $x = -2$.

Cuando $x = 0$,

$(y-4)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y-4 = \sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad y-4 = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2 + 4$

$$\boldsymbol{y} = \begin{cases} \nearrow 6 \\ \searrow 2 \end{cases}.$$

d) $(x-3)^2 = -6(y-1)$



Observamos que el vértice es $V(3,1)$. $2p = -6$, la parábola se abre hacia la dirección negativa del eje $\boldsymbol{y}$.

El foco tiene coordenadas $\left(x_0, y_0 + \dfrac{p}{2}\right)$

$F\left(3, 1 - \dfrac{3}{2}\right) = \left(3, -\dfrac{1}{2}\right)$.

La directriz tiene ecuación $y = y_0 - \dfrac{p}{2}$: $y = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{5}{2}$.