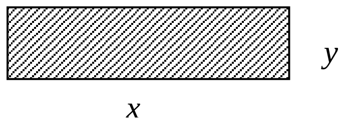
RELACIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1. En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula razonadamente la cuantía del máximo premio que se pueda obtener en este concurso.



A(x, y) = $x \cdot y$ (Función Objetivo)
Condición: $2x+2y = 2$

Condición: $2x+2y = 2 \quad \Rightarrow \quad x+y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1-x$

Función Objetivo: $A(x, y) = x \cdot y \quad \Rightarrow \quad A(x) = x \cdot (1-x) = x - x^2$

$$A'(x) = 1-2x$$

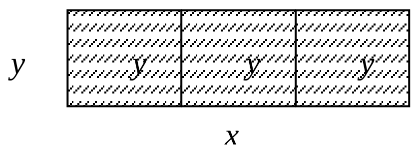
$$A'(x) = 0 \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow x = 1/2 \text{ m.}$$

$$A''(x) = -2 \Rightarrow A''(1/2) = -2 < 0 \quad \text{(es un máximo)}$$

Solución: $x = 5$ dm. e $y = 5$ dm., siendo Área = 25 dm^2.

Cuantía máxima a percibir por el premio = 25 €.

2. Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes. Las alambradas de las divisiones deben quedar paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que su área sea la mayor posible?



A(x, y) = $x \cdot y$ (Función objetivo)

Condición: $2x+4y = 160$

Condición: $2x+4y = 160 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{80-x}{2}$

Función: $\quad A(x, y) = x \cdot y$

$$A(x) = x \cdot \left(\frac{80-x}{2}\right) = 40x - \frac{x^2}{2}$$

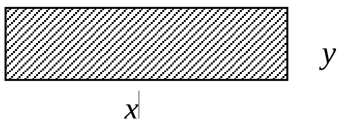
$$A'(x) = 40 - x \quad \Rightarrow \quad A'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 40 \text{ m.}$$

$$A''(x) = -1 < 0 \text{ (el punto es un máximo)}$$

Para $x = 40$ m. resulta $y = \dfrac{80-40}{2} \Rightarrow y = 20$ m.

Solución: $x = 40$ m, $y = 20$ m.

3. Se dispone de 400 metros de alambrada para vallar un solar rectangular. ¿Qué dimensiones deberá tener el solar para que con esa alambrada se limite la mayor área posible? Razonar el proceso.



Función: $A(x, y) = x \cdot y$
Condición: $2x+2y = 400$

Condición: $2x+2y = 400 \Rightarrow x + y = 200 \Rightarrow y = 200 - x$

Función: $A(x, y) = x \cdot y$

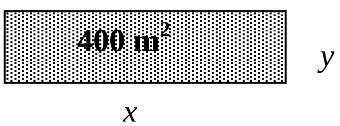
$$A(x) = x \cdot (200-x) = 200x - x^2$$

$$A'(x) = 200 - 2x \quad \Rightarrow \quad A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 100 \text{ m}$$

$A''(x) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 100$ es un máximo, siendo $y = 200-100=100$

Solución: $x = 100$ e $y = 100$, es un cuadrado

4. Un terreno de forma rectangular tiene 400 m^2 y va a ser vallado. El precio del metro lineal de valla es de 4 euros. ¿Cuáles serán las dimensiones del solar que hacen que el costo de la valla sea mínimo?



Perímetro del vertedero: $P = 2x+2y$

Coste cerca: $4 \cdot P = 4(2x)+4(2y) = 8x+8y$ (función objetivo)

Condición: $x \cdot y = 400$

Condición: $x \cdot y = 400 \Rightarrow y = \dfrac{400}{x}$

Coste cerca: $C(x, y) = 8x+8y$

$$C(x) = 8x+8\left(\frac{400}{x}\right) = 8x+\frac{3200}{x}$$

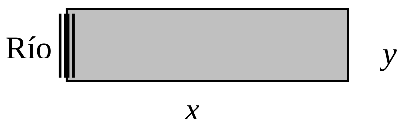
$$C´(x) = 8-\frac{3200}{x^2} \Rightarrow C´(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2=400 \quad \Rightarrow x = \pm 20; \text{ Solución válida } x = 20 \text{ m.}$$

$$C´´(x) = 3200\cdot\frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad C´´(20)= 0.8 > 0 \qquad \text{Es un mínimo}$$

Para $x = 20$ m., siendo $y = \frac{400}{x} \Rightarrow y = 400/20 = 20$ m.

Solución: Las dimensiones del solar son cuadradas con $x = 20$m. e $y = 20$m.

5. Supongamos que el solar del problema anterior tiene 200 m² y un lado a lo largo del río requiere una valla más costosa de 5 euros el metro lineal. ¿Qué dimensiones darán el costo más bajo?



Función: $C(x, y) = 4\cdot(2x) + 4y + 5y$
Condición: $x\cdot y = 200$

Condición: $x\cdot y = 200 \Rightarrow y = \frac{200}{x}$
Función objetivo: $C(x, y) = 4\cdot(2x) + 4y + 5y = 8x + 9y$

$$C(x) = 8x + 9\frac{200}{x} = 8x + \frac{1800}{x}$$

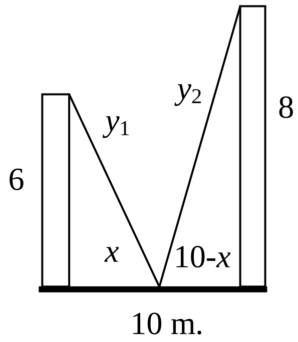
$$C´(x) = 8x+ \frac{1800}{x^2} \Rightarrow C´(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{225} = \pm 15 \text{ (Solución válida: 15 m.)}$$

$$C´´(x) = 1800\frac{2}{x^2} = \frac{3600}{x^3} \quad \Rightarrow \quad C´´(15) = \frac{3600}{15^3} > 0 .$$

Luego, en $x = 15$ hay un mínimo, siendo $y = 40/3$.

Solución: Las dimensiones del solar serán en este caso $x = 15$ m. e $y = 40/3$ m.

6. *(El Problema del Cable más Corto)* Dos postes con longitudes de 6 y 8 metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule aproximadamente la longitud mínima de un cable que pueda ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.



Función: $L_{cable} = y_1 + y_2$

Condición: $y_1^2 = 36+x^2$
$y_2^2 = 64+(10-x)^2$

$$L_{cable} = L(x) = \sqrt{36+x^2} + \sqrt{64+(10-x)^2}$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{36+x^2}} + \frac{-2(10-x)}{2\sqrt{64+(10-x)^2}}$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow x\cdot\sqrt{64+(10-x)^2} = (10-x)\sqrt{36+x^2}$$

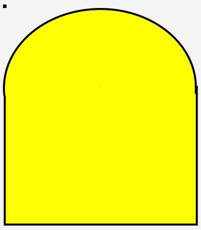
$$\Rightarrow 7x^2+180x-900 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -30 \text{ solución no válidad} \\ x_2 = \dfrac{30}{7} \end{cases}$$

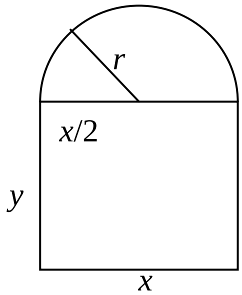
$$L''(x) = \frac{36}{\sqrt{\left(36+x^2\right)^3}} + \frac{64}{\sqrt{\left[64+(10-x)^2\right]^3}} > 0 \Rightarrow L''(30/7) > 0 \Rightarrow x = 30/7 \text{ es un mínimo}$$

$$L(30/7) = \sqrt{36+\left(\frac{30}{7}\right)^2} + \sqrt{64+\left(10-\frac{30}{7}\right)^2}$$

Solución: Longitud mínima = L(30/7) = 2.32 + 9.83 = 17.20 m.

7. (*El Primer Problema de la Ventana)* Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado con un semicírculo. Encuentre las dimensiones de la ventana que deja pasar más luz, si su perímetro mide 5 metros.





$L_{circunferencia} = L = 2\pi r \Rightarrow L_{semicircunferencia} = \frac{L}{2} = \pi r$

Perímetro rectángulo = $x+2y$

Perímetro total = $x + 2y + \pi r = 5$ (condición)

Función: Área: $A(x, y) = x \cdot y + \frac{\pi \cdot r^2}{2}$

Condición: $x + 2y + \frac{\pi \cdot x}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10-(2+\pi)\cdot x}{4}$

Función: $A(x, y) = x \cdot y + \frac{\pi \cdot r^2}{2} = x \cdot y + \frac{\pi \cdot x^2/4}{2}$

$$A(x) = x \cdot \frac{10-(2+\pi)\cdot x}{4} + \frac{\pi \cdot x^2}{8}$$

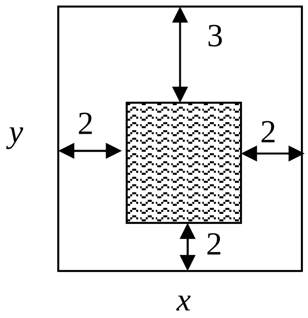
$$A'(x) = \frac{10-4x-\pi \cdot x}{4} \quad \Rightarrow \quad A'(x)=0 \quad \Rightarrow x = \frac{10}{4+\pi} = 1.4\,\text{m}$$

$$A''(x) = \frac{-4-\pi}{4} < 0 \quad \Rightarrow \qquad x = 1.4 \text{ es un máximo}$$

$$y = \frac{10-(2+\pi)\cdot 10/4+\pi}{4} = 0.7 \text{ m}$$

Solución: Dimensiones de la ventana: Ancho: x = 1.4 m.; Alto: $y + r$ = 0.7 + 0.7 =1.4 m.

8. Las páginas de un libro deben medir cada una 600 cm^2 de área. Sus márgenes laterales y el inferior miden 2 cm. y el superior mide 3 cm. Calcular las dimensiones de la página que permitan obtener la mayor área impresa posible.



Alto de la página impresa: y-5
Ancho de la página impresa: x-4
Área impresa = $(x-4)\cdot(y-5)$ (función objetivo)
Área páginas = $x\cdot y = 600$ (condición)

Condición: $x\cdot y = 600 \Rightarrow \quad y = 600/x$

Función: $A(x, y) = (x-4)\cdot\left(\frac{600}{x} - 5\right)$

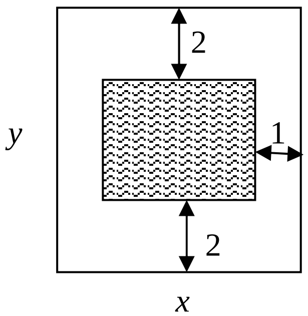
$$A(x) = -5x+620-\frac{2400}{x}$$

$A´(x) = -5+\frac{2.400}{x^2} \Rightarrow A´(x)=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{480} \Rightarrow x=\pm 4\sqrt{30}$ (La solución negativa no es válida)

$A´´(4\sqrt{30}) = \frac{-4.800}{\left(4\sqrt{30}\right)^3} < 0$, es un máximo, siendo $y = \frac{150\sqrt{30}}{30} \Rightarrow y = 5\sqrt{30}$

Solución: $x = 4\sqrt{30}$ cm. e $y = 5\sqrt{30}$ cm.

9. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm. cada uno, y los laterales 1 cm. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.



Función: $A(x, y) = x \cdot y$
Condición: $(x-4)\cdot(y-2)=18$

Condición: $(x\text{-}4)\cdot(y\text{-}2)=18 \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{10+2x}{x-4}$

Función: $A(x, y) = x \cdot y$

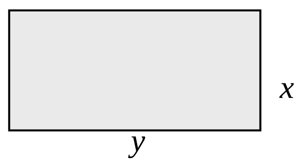
$$A(x) = x\cdot\frac{10+2x}{x-4} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{10+2x^2}{x-4}$$

$$A'(x) = \frac{2x^2-16x-40}{(x-4)^2} \quad \Rightarrow \quad A'(x) = 0 \Rightarrow \ x=10 \text{ y } \ x=-2 \text{ (solución negativa no es válida).}$$

$$A''(x) = \frac{(4x-16)(x-4)^2-2(x-4)(2x^2-16x-40)}{(x-4)^4} \Rightarrow A''(10) > 0, \text{ es un mínimo.}$$

Solución: $x=10$ e $y=5$.

10. Un pastor dispone de 1000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. Halla las dimensiones de la cerca para que el área encerrada sea máxima.



Función: $f(x, y) = x\cdot y$

Condición: $2x + y = 1.000 \ \Rightarrow \ y = 1000\text{-}2x$

$f(x, y) = x\cdot y$

$f(x) = x\cdot(1.000\text{-}2x)$

$f(x)=1.000\,x - 2\,x^2$

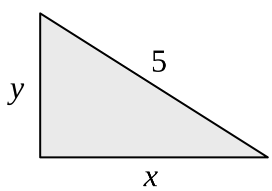
$f'(x) = 1.000 - 4x \ \Rightarrow f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 250$

$f''(x) = -4 \ \Rightarrow \ f''(250) < 0.$

Por lo tanto, $x = 250$ es un máximo.

Solución: $x=250$ e $y=500$.

11. Un segmento de longitud de 5 cm. apoya sus extremos en los semiejes positivos OX y OY, de tal manera que forma con éstos un triángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido.



Función: $f(x, y) = \dfrac{x\cdot y}{2}$

Condición $x^2 + y^2 = 5$

Condición: $x^2 + y^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{5 - x^2}$

Función: $f(x, y) = \dfrac{x \cdot y}{2}$

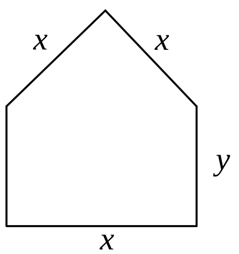
$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{5 - x^2}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{5 - 3x^2}{2\sqrt{5 - x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{5/3}$$ (La solución negativa no es válida).

$$f''(x) = \frac{-10x}{5 - x^2} \Rightarrow f''\left(\sqrt{5/3} < 0\right)$$. Por lo tanto, es un máximo.

Solución: $x = \sqrt{5/3}; \; y = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$

12. Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior se ha sustituido por un triángulo equilátero. Sabiendo que el perímetro de la ventana es 6,6 m, hallar sus dimensiones para que la superficie sea máxima.



Función: $A_{\text{total}} = A_{\text{triángulo}} + A_{\text{rectángulo}}$

Condición: $3x+2y = 6.6$

Condición: $3x + 2y = 6.6 \quad \Rightarrow \quad y = 3.3 - 1.5\,x$

$$A_{\text{total}} = f(x, y) = x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} + x \cdot y = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + x \cdot y$$

$$f(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + x \cdot (83.3 - 1.5\,x)$$

$$f(x) = 3.3\,x - 1.07\,x^2$$

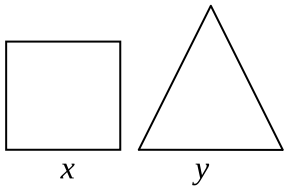
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3.3 - 2.14x = 0 \quad \Rightarrow x = 1.54$$

$$f''(x) = -2'14 \quad \Rightarrow f''(1.54) < 0.$$

Luego, $x = 1.54$ es máximo.

Solución: $x = 1.54$; $y = 0.99$

13. Dividir un segmento de 6 cm. de longitud en dos partes, con la propiedad de que la suma de las áreas del cuadrado y del triángulo equilátero construidos sobre ellos sea máxima.



$A_{total} = A_{triángulo} + A_{cuadrado}$

Condición: $x + y = 6$

Condición: $x + y = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 6 - y$

Función: $A_{total} = f(x, y) = \dfrac{\sqrt{3}y^2}{4} + x^2$

Sustituimos y obtenemos:

$f(y) = \dfrac{\sqrt{3}y^2}{4} + (6 - y)^2$

$f(y) = 1.43y^2 - 2y + 36$

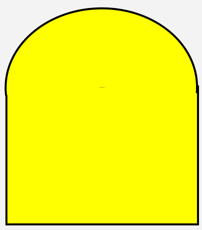
$f'(y) = 2´86y - 2 \quad \Rightarrow \quad f´(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.7$

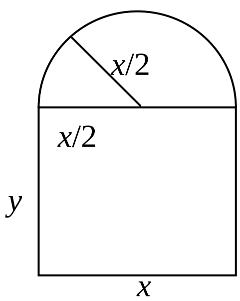
$f''(y) = -2 \quad \Rightarrow \quad f''(0.7) < 0$

Luego, en $y = 0.7$ es máximo.

Solución: $x = 5.3$; $y = 0.7$

14. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (la parte inferior es rectangular y la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Halla las dimensiones “x” e “y” del rectángulo para que la superficie de la ventana sea máxima (Expresa el resultado en función de π).





Condición: $x + 2y + \dfrac{\pi x}{2} = 6$, luego $y = \dfrac{12 - 2x - \pi x}{4}$

Función: $f(x, y) = xy + \dfrac{\pi \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{2}$

$$f(x) = x\left(\frac{12-2x-\pi x}{4}\right)+\frac{\pi x^2}{8}$$

$$f(x) = \frac{24x-4x^2-\pi x^2}{8}$$

$$f'(x) = \frac{1}{8}(24-8x-2\pi x)$$

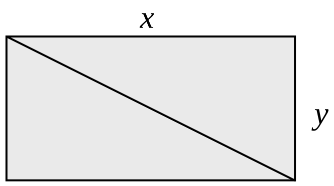
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{12}{4+\pi}$$

$$f''(x) = -1-\frac{\pi}{4}$$

$$f''\left(\frac{12}{4+\pi}\right) = -1-\frac{\pi}{4} < 0 \Rightarrow x = \frac{12}{4+\pi} \text{ es un máximo}$$

Solución: $x = \dfrac{12}{4+\pi} = 1.68$; $y = \dfrac{12-2\cdot 1.68-\pi\cdot 1.68}{4} = 0.84$

15. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m. ¿cuál es el que tiene la diagonal menor? Razonar el proceso seguido.



Condición: $2x + 2y = 12 \Rightarrow y = 6-x$

Función: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f(x) = \sqrt{x^2+(6-x)^2}$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2-12x+36}$$

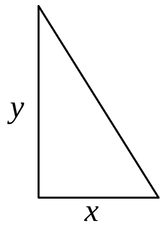
$$f'(x) = \frac{2x-6}{\sqrt{2x^2-12+36}}$$

Para $f'(x) = 0$ tenemos que $x = 3$

$f''(x) = \dfrac{36}{\left(\sqrt{2x^2-12x+36}\right)^3}$ y sustituimos $x = 3$, $f''(3) > 0$, por lo tanto es mínimo.

Solución: $x = 3$ e $y = 3$

16. Calcula el área máxima que puede tiene un triángulo rectángulo tal que la suma de la longitudes de sus dos catetos vale 4 cm.



Condición: $x+y = 4$; $y = 4-x$

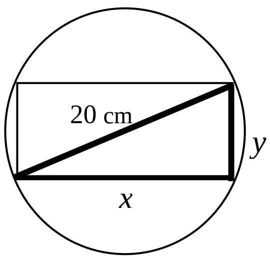
Función: Área = $f(x,y) = x{\cdot}y/2$

$$f(x,y) = \frac{xy}{2}$$
$$f(x) = \frac{x(4-x)}{2}$$
$$f(x) = \frac{4x-x^2}{2}$$
$$f'(x) = 2-x$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$
$$f''(x) = -1 \Rightarrow \quad f''(2) < 0$$

de donde tenemos que $x = 2$ es máximo.

Solución: $x = 2$ e $y = 2$.

17. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 cm. de radio. Razonar el proceso seguido.



Condición: $x^2 + y^2 = (20)^2 = 400 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{400-x^2}$

Función = Área = $x{\cdot}y$

$$f(x,y) = xy$$
$$f(x) = x\sqrt{400-x^2}$$
$$f'(x) = \frac{400-2x^2}{\sqrt{400-x^2}}$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 10\sqrt{2}$$

La solución negativa no es válida.

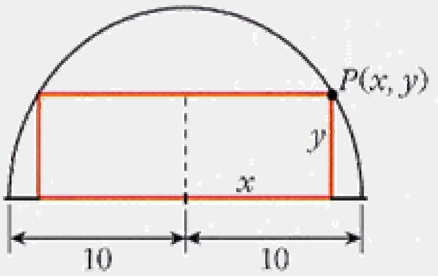
$$f''(x)=\frac{-4x\sqrt{400-x^2}-\frac{-2x}{2\sqrt{400-x^2}}\left(400-2x^2\right)}{400-x^2}$$

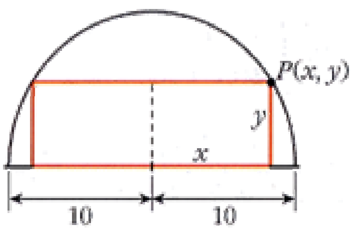
$$f''(10\sqrt{2})=\frac{-\sqrt{400}}{5}<0 \quad \text{es un mínimo}$$

$$y=\sqrt{400-\left(10\sqrt{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad y=10\sqrt{2}$$

Solución: $x=10\sqrt{2}; \quad y=10\sqrt{2}$

18. En un jardín con forma semicírculo de radio 10 m se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del parterre para que su área sea máxima.





Condición: P(*x*,*y*) pertenece a la Circunferencia

$$x^2+y^2=100 \Rightarrow y=\sqrt{100-x^2}$$

Función: $f(x,y)=2xy$

$$f(x,y)=2xy$$

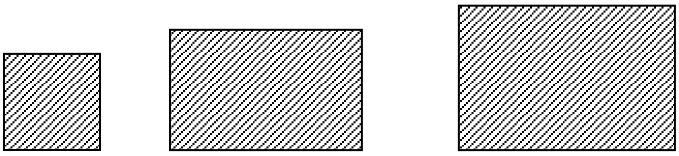
$$f(x)=2x\sqrt{100-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{200-4x^2}{\sqrt{100-x^2}} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 5\sqrt{2} \text{ (La solución negativa no es válida)}$$

$$f''(5\sqrt{2})<0 \text{ (máximo)}$$

Solución: Dimensión del parterre será de base = $10\sqrt{2}$ m; altura $=5\sqrt{2}$ m. Siendo el área máxima de 100 m^2.

19. Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesiten exactamente 1248 metros de valla para vallar los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.



x $\qquad$ y $\qquad$ z

Llamamos x, y, z, a los lados de las tres parcelas.

Condiciones:

i) $z = 3x$

ii) $4x+4y+4z = 1248$

de donde $z = 3x$, entonces $y = 312 - 4x$

Función: $S(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

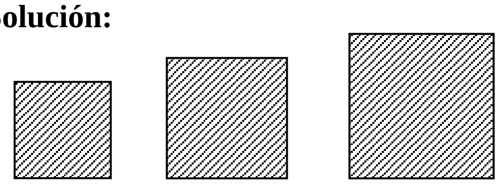
$$S(x) = x^2 + (312-4x)^2 + 9x^2$$

$$S(x) = 26x^2 - 2496x + 312^2$$

$S'(x) = 52x - 2496$ y para $S'(x) = 0$ tenemos que $x = 48$

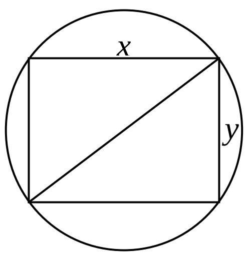
$S''(x) = 52 \Rightarrow S''(48) > 0$, por tanto, es mínimo.

Solución:



$x = 48$ m $\qquad$ $y = 120$ m $\qquad$ $z = 144$ m.

20. Una arquitecta quiere construir un jardín rectangular en un terreno circular de 100 metros de radio. Halla las dimensiones de dicho jardín para que el área sea máxima.



Condición: $x^2 + y^2 = 100^2$, luego tenemos que $y = \sqrt{100^2 - x^2}$

Función: Área del jardín rectangular

$$A(x,y)=xy$$
$$A(x)=x\sqrt{100^2-x^2}$$

El valor que haga máxima el área, también hará máxima a $A^2(x)$ y los cálculos se simplifican haciendo:

$$B(x)=A^2(x)=x^2\left(10000-x^2\right)=10000x^2-x^4$$
$$B'(x)=20000x-4x^3 \Rightarrow B'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ Se descarta} \\ x=70.71\text{m} \end{cases}$$
$$B''(x)=20000-12x^2 \Rightarrow B''(70.71)<0 \ (\text{máximo})$$

Solución: Para $x=$ 70.71 resulta $y=\sqrt{100^2-70.71^2}=70.71\text{m}$

21. Descomponer el número *e* en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos sea máxima. Calcular dicha suma.

Condición: $x+y=e$, de donde tenemos que $y=e-x$

Función: $S(x,y)=\ln(x)+\ln(y)$

$$S(x)=\ln(x)+\ln(e-x)$$
$$S'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e-x}\Rightarrow S'(x)=0\Rightarrow x=\frac{e}{2}$$
$$S''(x)=\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{(e-x)^2}\Rightarrow S''(\frac{e}{2})=\frac{-8}{e^2}<0$$

luego, tenemos que es máximo.

La suma pedida será: $suma=\ln\frac{e}{2}+\ln\left(e-\frac{e}{2}\right)=2-2\ln 2$.

Solución: $x=e/2$ y la suma $S=2-2\ln2$

22. Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar su seguridad?

Alarmas tipo A = x

Alarmas tipo B = y

Condición: $x + y = 9$, luego $y = 9-x$

Función: La Seguridad se expresa como: $\frac{xy^2}{10} = f(x, y)$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{10}$$

$$f(x) = \frac{x(9-x)^2}{10}$$

$$f(x) = \frac{81x - 36x^2 + x^3}{10}$$

$$f'(x) = \frac{81 - 36x + 3x^2}{10} \Rightarrow f'(x) = 0$$

los valores de la x que anulan la primera derivada son $x = 9$ y $x = 3$

$$f''(x) = \frac{-36 + 6x}{10}$$

$$f''(9) = \frac{-36 + 54}{10} > 0$$

$$f''(3) = \frac{-36 + 18}{10} < 0$$

luego, x=9 es mínimo y x=3 es máximo.

Solución: Será necesario instalar de tipo A = x = 3 alarmas y de tipo B = y = 6 alarmas.

23. Calcula dos números que cumplan que al sumarlos resulte 10 y la resta de uno de ellos menos el inverso del otro sea mínima.

Condición: $x + y = 10$, de donde $y = 10-x$

La función:

$$f(x,y) = x - \frac{1}{y}$$

$$f(x) = x - \frac{1}{10-x} = \frac{9-x^2}{10-x}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 20x + 9}{(10-x)^2}$$

Como $f'(x) = 0$ tenemos que $x = 19.54$ y $x = 0.46$.

$$f''(x) = \frac{-180}{(10-x)^3}$$
$$f''(19.54) > 0 \quad \text{mínimo}$$
$$f''(0.46) < 0 \quad \text{máximo}$$

Solución: x=19.54 e y=-9.54.

24. Si un cultivador valenciano planta 200 naranjos por hectárea, el rendimiento promedio es de 300 naranjas por árbol. Por cada árbol adicional que siembre por hectárea, el cultivador obtendrá 15 naranjas menos por árbol. ¿Cuántos árboles por hectárea darán la mejor cosecha?

Nº naranjos / hectárea = 200
Rendimiento / árbol = 300 naranjas
x = nº árboles a plantar
R (x) = Rendimiento(x)

$$R(x) = (200 + x)\cdot(300 - 15x)$$
$$R(x) = 60000 - 2700x - 15x^2$$
$$R'(x) = -2700 - 30x$$
$R'(x) = 0 \Rightarrow x = -90$. Solución absurda.

Conclusión: Sin plantar árboles la producción que se obtiene es mejor que si aumentamos el número de frutales de esta variedad.

25. El propietario de un edificio tiene alquilados los 40 pisos del mismo a un precio de 600 € cada uno. Por cada 60€ que el propietario aumenta el precio observa que pierde un inquilino. ¿a qué precio le convienen alquilar los pisos para obtener la mayor ganancia posible?(Ayuda: llamar x = nº de 60 € que aumenta o lo que es lo mismo el nº inquilinos perdidos.)

40 pisos
600 euros / cada uno

- Si aumenta x euros por cada piso cobra 600 + x, pero alquila $40 - \frac{x}{60}$ pisos.
- La función es el beneficio obtenido:

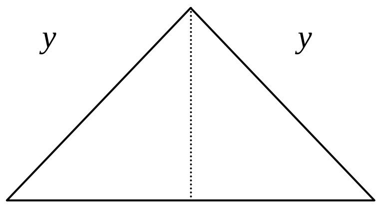
$$B(x) = (600 + x)\cdot\left(40 - \frac{x}{60}\right) \quad \text{con} \quad 0 < x < 2400$$
$$B(x) = 2400 + 30x - \frac{x^2}{60}$$

$$B'(x) = 30 - \frac{2x}{60} \Rightarrow B'(x) = 0 \Rightarrow x = 900$$

$$B''(x) = \frac{-x}{30} \Rightarrow B''(900) < 0 \Rightarrow \text{ Es Máximo.}$$

Solución: Aumentará 15·60€ = 900

26. Entre todos los triángulos isósceles (dos lados iguales) de perímetro 30 cm., ¿cuál es el de área máxima?



Condición: $x + 2y = 30 \Rightarrow y = \dfrac{30 - x}{2}$

$$h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Función: $A(x,y) = \dfrac{x \cdot \sqrt{y^2 - \dfrac{x^2}{4}}}{2}$

$$A(x) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{30-x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{225 - 15x} = \sqrt{\frac{225\ x^2}{4} - \frac{15x^3}{4}}$$

$$A'(x) = \frac{450 - 15x}{4 \cdot \sqrt{225 - 15x}} \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$$

$A''(10) < 0 \Rightarrow$ Es un máximo

Solución: $x = 10$, $y = 10$

27. Para la fabricación de un determinado producto, se necesita invertir dinero en contratar empleados y comprar máquinas. El dueño de la fábrica ha estimado que si compra x máquinas y contrata "y" empleados, el número de unidades de producto que podía fabricar vendría dado por la función: $f(x,y) = 90x \cdot y^2$ Cada máquina le supone una inversión de 2500 € y cada contrato de un nuevo empleado otro de 1500 € Si el empresario sólo dispone de un presupuesto de 22500€ para este fin, determine el número de obreros que debe contratar y el número de máquinas que debe comprar para maximizar la producción.

x = máquinas.
y = empleados.

Condición: $2500x + 1500y = 22500 \Rightarrow y = \dfrac{45-5x}{3}$

Función: $f(x,y) = 90xy^2$

$$f(x) = 90x \cdot \left(\frac{45-5x}{3}\right)^2$$
$$f(x) = 250x^3 - 4500x^2 + 20500x$$
$$f'(x) = 750x^2 - 9000x + 20500$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3\,;\, x_2 = 9$$
$$f''(x) = 1500x - 9000$$
$$f''(3) < 0 \Rightarrow \text{ Es Máximo.}$$
$$f''(9) > 0 \Rightarrow \text{ Es Mínimo.}$$

Solución: *x* = 3, *y* = 30.

28. Una esmeralda pesa 16 grs. y sabemos que su valor es proporcional al cuadrado de su peso. Si partimos en dos trozos la esmeralda, halla el peso que debe tener cada uno de ellos para que su valor sea mínimo.

Condición: $x + y = 16 \Rightarrow y = 16 - x$

x = peso de un trozo.
y = peso del otro trozo.

La función que queremos optimizar es la que nos da el valor de la esmeralda después de dividirla, que dependerá del peso de cada trozo.

Función: $f(x,y) = kx^2 + ky^2$

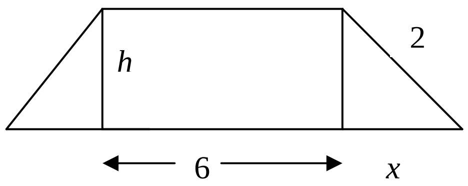
$$f(x,y) = k\left(x^2 + y^2\right)$$
$$f(x) = k\left(x^2 + (16-x)^2\right)$$
$$f(x) = k\left(2x^2 - 32x + 256\right)$$
$$f'(x) = k(4x - 32)$$
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8, \text{ consideramos } k > 0$$
$$f''(x) = 4k$$
$$f''(8) > 0 \Rightarrow \text{ Es mínimo.}$$

Solución: *x* = 8 gramos e *y* = 8 gramos.

RELACIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Ejercicios de ampliación

29. La base menor de un trapecio isósceles mide 6 metros y la longitud de los lados no paralelos es de 2 metros. Calcula cuánto debe medir la base mayor para que el área del trapecio sea máxima.



Condición (por Pitágoras): $h^2 + x^2 = 4 \Rightarrow h = \sqrt{4 - x^2}$

Función: $A_{trapecio}$

$$A_{trapecio} = \frac{(BASE + base)\cdot h}{2} = \frac{(6 + 2x)\cdot h}{2} = (3 + x)h = f(x,h)$$

$$f(x) = (3 + x)\sqrt{4 - x^2}$$

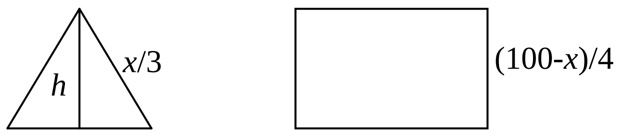
$$f'(x) = \frac{4 - 6x - 3x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{21}}{2} < 0 \text{ Se descarta} \\ x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{21}}{2} > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{6x^3 + 24x^2 - 32x - 24}{\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^3} \Rightarrow f''\left(\frac{-3 + \sqrt{21}}{2}\right) < 0 \text{ es máximo}$$

Solución: $x = \dfrac{-3 + \sqrt{21}}{2}$ e $y = -3 + \sqrt{21}$

(el valor $y = -3 - \sqrt{21}$ se descarta)

30. Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos segmentos de longitudes x y 100-x. Con el de longitud x se forma un triángulo equilátero y con el otro segmento se forma un cuadrado. Sea f(x) la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado. Indicar razonadamente para qué valor de x se obtiene que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado es mínima.



Condición:

Altura del triángulo $h=\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{6}\right)^2}=\frac{x\sqrt{3}}{6}$

Área del triángulo $a_{triángulo}=\frac{\frac{x}{3}\frac{x\sqrt{3}}{6}}{2}=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}$

Área del cuadrado $a_{cuadrado}=\left(\frac{100-x}{4}\right)^2$

Función: $a_{triángulo}+a_{cuadrado}=f(x)$

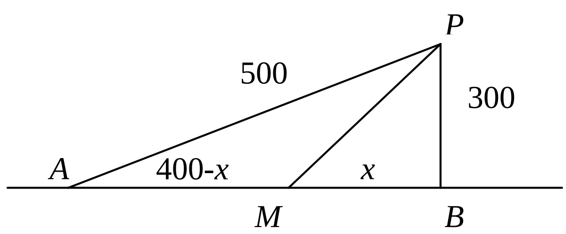
$$f(x)=\frac{x^2\sqrt{3}}{36}+\left(\frac{100-x}{4}\right)^2$$

$$f'(x)=\frac{x\sqrt{3}}{18}-\frac{100-x}{2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{900}{\sqrt{3}+9}=83.86$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{3}+9}{18}>0\ \text{(mínimo)}$$

Solución: Para $x=83.86$ resulta la suma de áreas mínima, siendo $h=\frac{83.86\cdot\sqrt{3}}{6}=24.21$

31. En una carretera a través del desierto un automóvil debe de ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 Km de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 Km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 Km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 Km, determina la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.



La ruta a seguir es *AMP*

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo *ABP* se obtiene: $\overline{AB}=\sqrt{500^2-300^2}=400$

En el triángulo *MBP* se obtiene $\overline{MP}=\sqrt{x^2+300^2}$

Y el tiempo que tarda el automóvil en recorrer la distancia $AM + MP$ es: $t(x) = \frac{4-x}{100} + \frac{\sqrt{x^2+300^2}}{60}$

Derivando, $t'(x) = \frac{-1}{100} + \frac{x}{60\sqrt{x^2+300^2}}$

Si hacemos $t'(x) = 0 \Rightarrow$ obtenemos $\frac{x}{60\sqrt{x^2+300^2}} = \frac{1}{100} \Rightarrow x = \pm 225$

La solución negativa no tiene sentido: $\overline{AM} = 400 - 225 = 175$

El automóvil deja la carretera a 175 km de la ciudad *A*.

Podemos comprobar que es un mínimo utilizando la segunda derivada:

$$t''(x) = \frac{60(x^2+300^2) - 60x}{60^2 \cdot \left(x^2+300^2\right) \cdot \sqrt{x^2+300^2}} \quad \Rightarrow \quad t''(x) = \frac{x^2+300^2-x}{60\left(x^2+300^2\right) \cdot \sqrt{x^2+300^2}}$$

Para $x = 225 \Rightarrow t''(x) > 0$, por lo tanto, es un mínimo.

Solución: La ruta a seguir es *AMP*, de A a M hay 175 Km. y de M a P hay $\sqrt{225^2+300^2} = 375$ Km., con lo que recorrerá en total 550 Km. a una velocidad de 100 Km/h.

32. Sea T un triángulo de perímetro 60 cm. Uno de los lados del triángulo T mide x cm. y los dos lados tienen la misma longitud.

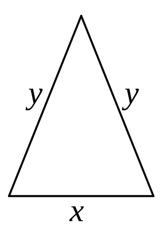
a) Deducir razonadamente las expresiones de las funciones A y f tales que:

A(x) = Área del triángulo T

F(x) = $\{A(x)\}^2$

Indicar además entre que valores puede variar x.

b) Obtener, razonadamente, el valor de x para el que f (x) alcanza el valor máximo.



Condición: $x + 2y = 60 \Rightarrow y = \frac{60-x}{2}$

La altura del triángulo será: $h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$

a)

Solución:

$$A(x,y) = \mathrm{A}_{\text{triángulo}} = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} \qquad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{x\sqrt{\left(\frac{60-x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}}}{2}$$

$$F(x,y) = \left(A(x,y)\right)^2 = \frac{x^2}{4}\left(y^2 - \frac{x^2}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^2}{4}\left(\left(\frac{60-x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}\right)$$

b)

$$F(x) = \frac{x^2}{4}\left(\frac{(60-x)^2}{4} - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{x^2}{4}(900-3x)$$

$$F'(x) = 900x - 45x^2$$

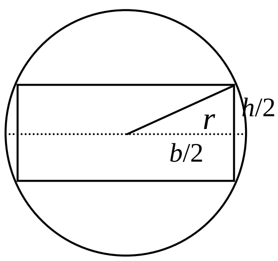
$$F'(x) = 0 \quad \Rightarrow 900x - 45x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \ \text{ y } \quad x = 20$$

Por las condiciones del problema descartamos x = 0, siendo:

$F''(x) = -90x \quad \Rightarrow \quad F''(20) < 0$. Por lo tanto es máximo.

Solución: x = 20 e y = 20.

33. Comprueba que el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es un cuadrado de lado $\sqrt{2}r$ **.**



Condición:

$$r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{b^2 + h^2}{4}$$

$$h = \sqrt{4r^2 - b}$$

Función = Área = $b \cdot h$

$$f(b,h)=b\cdot h$$

$$f(b)=b\sqrt{4r^2-b^2}$$

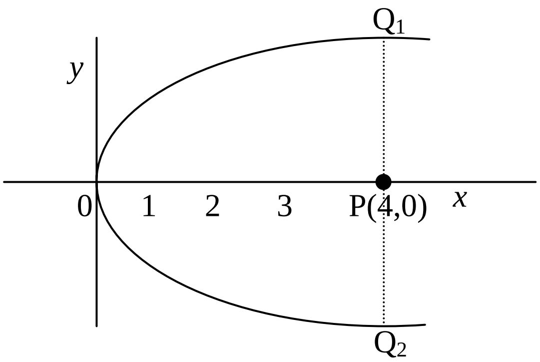
$$f'(b)=\sqrt{4r^2-b^2}-\frac{b^2}{\sqrt{4r^2-b^2}} \Rightarrow f'(b)=0 \Rightarrow b=\sqrt{2}r$$

$$f''(b)=-\frac{b^2}{\sqrt{4r^2-b^2}}-\frac{2b\left(4r^2-b^2\right)+b^4}{\sqrt{\left(4r^2-b^2\right)^3}}<0$$

$$h=\sqrt{4r^2-b^2}=\sqrt{4r^2-\left(\sqrt{2}r\right)^2}=\sqrt{2}r$$

Solución: El área es máxima para: $b=\sqrt{2}r;\quad h=\sqrt{2}r$

34. Determine los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que están a distancia mínima del punto P (4, 0).



Condición: $y^2 = 4x$ de donde $y=2\sqrt{x}$

Un punto de la curva tiene la forma P(x, $\pm2\sqrt{x}$)

Función: $d(P,Q)=\sqrt{(x-4)^2+\left(\pm2\sqrt{x}\right)^2}$

$$d(P,Q)=\sqrt{(x-4)^2+\left(\pm2\sqrt{x}\right)^2}$$

$$d(x)=\sqrt{x^2-4x+16}$$

$$d'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}} \Rightarrow d'(x)=0 \Rightarrow x=2$$

$$d''(x)=\frac{12}{\sqrt{\left(x^2-4x+16\right)^3}} \Rightarrow d''(2)>0$$

El punto x = 2 es mínimo.

Solución: $Q_1(2,2\sqrt{2})$ y $Q_2(2,-2\sqrt{2})$

35. Un rectángulo tiene por vértices los puntos de coordenadas $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$ y (a,b), de modo que el punto (a,b) tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de ecuación: $y=\frac{1}{x^2}+4$. De todos estos rectángulos hallar razonadamente el de área mínima.

Condición: Si (a, b) pertenece a la curva, verifica: $b=\frac{1}{a^2}+4$

Función: El área del rectángulo es $A(a)=a\left(\frac{1}{a^2}+4\right)=\frac{1}{a}+4a$

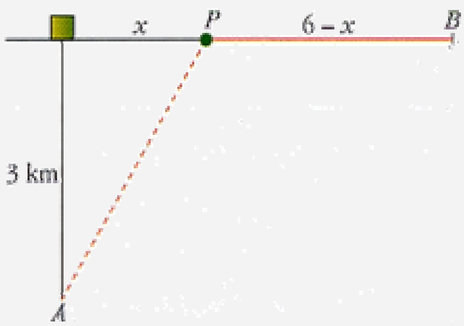
$$A'(a)=\frac{-1}{a^2}+4 \Rightarrow A'(a)=0 \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$$

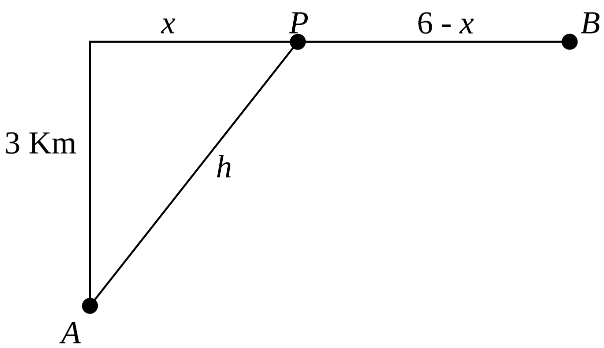
El valor a = -1/2 no es valido por que se indica que las coordenadas son positivas.

$$A''(a)=\frac{2}{a^3} \Rightarrow A''(\frac{1}{2})>0 \text{ (es mínimo)}$$

Solución: Los vértices serán (0,0), (1/2,0), (1/2,8) y (0,8)

36. (Problema del tiempo mínimo).- Un nadador, A, se encuentra a 3 km. De la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 6 Km. De la caseta. Sabiendo que nada a 3 km/h y que anda por la arena a 5 km/h, averigua a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.





$h=\sqrt{9+x^2}$ a 3 Km/h
Recorre $6-x$ a 5 Km/h

Tiempo empleado:

$$t(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{6-x}{5}$$

$$t'(x) = \frac{2x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}$$

Haciendo $t'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 6\sqrt{x^2+9} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{9}{4} = 2'25\ ; x_2 = \frac{-9}{4}$ (No valida)

$t''(2'25) > 0 \Rightarrow$ Es mínimo.

Solución:

- Debe dirigirse a un punto que esté a 2.25 Km de la caseta.
- Tiempo que tarda en llegar:

$$t = \frac{\sqrt{2'25^2+9}}{3} + \frac{6-2'25}{5}$$

t = 2 horas.

37. Determina el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

Condición: $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$

Pendiente: $p(x) = f'(x) = -3x^2 + 12x - 7$

$p'(x) = -6x + 12 \quad , \quad p'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$p''(x) = -6 \quad , \quad p''(2) < 0 \quad \Rightarrow \quad Es\ Máximo$

Solución:

Punto buscado: P(2, f(2))

P(2, 7)

Ecuación Recta Tangente: $y - 7 = p(2)\,(x - 2)$

$y - 7 = 5\cdot(x - 2)$