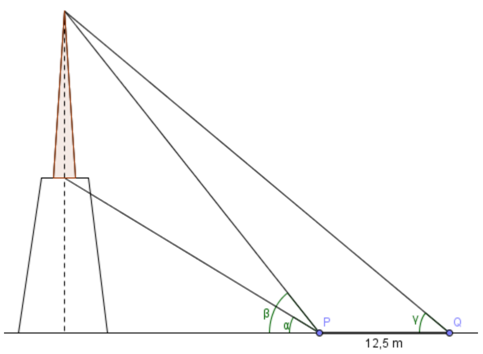
Nombre:

Duración: 55 minutos.
Los ejercicios deberán resolverse en folios aparte de la presente hoja, en la que únicamente se debe escribir el nombre y apellidos en el lugar habilitado para ello.
No está permitido el uso de fluido corrector o análogo. Igualmente no está permitido el uso de lápiz, goma ni bolígrafo con tinta deleble.
Está permitido el uso de calculadora. Sin embargo en todos los ejercicios se deben indicar y explicar los razonamientos usados para su resolución.



Ejercicio 1. (2 puntos)
Un repetidor de televisión se encuentra sobre una montaña y un observador se sitúa en los puntos P y Q de la figura de la izquierda.
Se conoce que la distancia $\overline{PQ} = 12,5$ metros, y que los ángulos indicados son, medidos en radianes, $\alpha = \frac{11\pi}{30}$, $\beta = \frac{70\pi}{180}$ y $\gamma = \frac{67\pi}{180}$. Halle la altura del repetidor.

Ejercicio 2. (2 puntos)
Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $3\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 3$

b) $6\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$

Ejercicio 3. (2 puntos)
Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones en el intervalo $[0, 2\pi]$:

a) $\begin{cases} \tan(x+y) = \sqrt{3} \\ x + 2y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$

Ejercicio 4. (2 puntos)
Demuestre las siguientes igualdades:

a) $\frac{1-\cos 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{sen}\alpha - \tan\alpha$

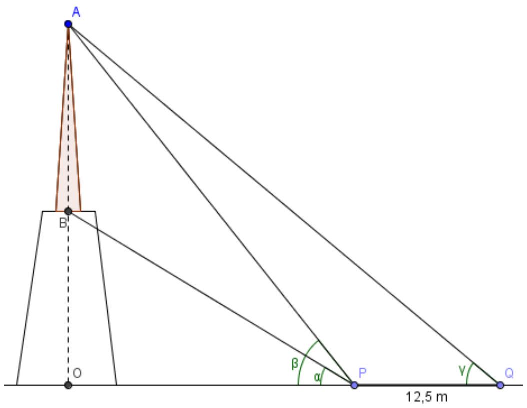
b) $\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

Ejercicio 5. (2 puntos)
Expresión de la diferencia de los cosenos de dos ángulos como producto. Demuéstrelo a partir de las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma de dos ángulos.

Ejercicio 1.

Un repetidor de televisión se encuentra sobre una montaña y un observador se sitúa en los puntos P y Q de la figura de la izquierda.

Se conoce que la distancia $\overline{PQ}=12,5$ metros, y que los ángulos indicados son, medidos en radianes, $\alpha=\frac{11\pi}{30}$, $\beta=\frac{70\pi}{180}$ y $\gamma=\frac{67\pi}{180}$. Halle la altura del repetidor.



Resolución.

Llamemos A al punto más alto del repetidor. Entonces en el triángulo APQ podemos conocer todos los ángulos, ya que el ángulo en P es el suplementario de β, es decir, $\hat{P}=\pi-\frac{70\pi}{180}=\frac{11\pi}{18}$ radianes.

El ángulo en A será entonces $\hat{A}=\pi-\hat{P}-\gamma=$ $=\pi-\frac{11\pi}{18}-\frac{67\pi}{180}=\frac{180\pi}{180}-\frac{110\pi}{180}-\frac{67\pi}{180}=\frac{\pi}{60}$ rad.

Al conocer los tres ángulos y un lado, podemos aplicar el Teorema del Seno para hallar el lado AP:

$$\frac{PQ}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{AP}{\operatorname{sen}\gamma}\Rightarrow\frac{12,5}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{AP}{\operatorname{sen}\gamma}\Rightarrow AP=\frac{12,5\cdot\operatorname{sen}\frac{67\pi}{180}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{60}}$$

Llamemos ahora B al punto más bajo del repetidor y O al punto más bajo de la montaña. En el triángulo ABP también podemos conocer los tres ángulos. Concretamente en el triángulo rectángulo OPB, el ángulo en B es el complementario de α, por lo que el ángulo en el mismo punto B dentro del triángulo ABP es igual a $\hat{B}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}+\alpha=\frac{\pi}{2}+\frac{11\pi}{30}=\frac{13\pi}{15}$ radianes.

En este mismo triángulo, el ángulo en el vértice P es el ángulo $\hat{P}=\beta-\alpha=\frac{70\pi}{180}-\frac{11\pi}{30}=\frac{\pi}{45}$ radianes. En el triángulo ABP conocemos entonces el ángulo $\hat{P}$, que es el opuesto a la altura AB del repetidor, y el ángulo $\hat{B}$, que es el opuesto al lado conocido AP.

Podemos por tanto, con estos datos, usar nuevamente el Teorema del Seno para este triángulo ABP:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\hat{P}}=\frac{AP}{\operatorname{sen}\hat{B}}\Rightarrow AB=\frac{AP\cdot\operatorname{sen}\hat{P}}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{\dfrac{12,5\cdot\operatorname{sen}\frac{67\pi}{180}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{60}}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{45}}{\operatorname{sen}\frac{13\pi}{15}}=\frac{12,5\cdot\operatorname{sen}\frac{67\pi}{180}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{45}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{60}\cdot\operatorname{sen}\frac{13\pi}{15}}$$

Por tanto, $AB\cong 37,7057$ metros.

Ejercicio 2.

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $3\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x=3$

b) $6\cos^2\frac{x}{2}+\cos x=1$

Resolución.

a) $3\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x=3$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por $\frac{\sqrt{3}}{6}$, obtenemos:

$$\frac{3\sqrt{3}}{6}\operatorname{sen} x+\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{6}\cos x=\frac{3\sqrt{3}}{6}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \text{o bien}\\ x+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}\quad \text{con } k\in\mathbb{Z}.$$

Nota: en el caso de no darnos cuenta de la transformación realizada en la ecuación, siempre se puede resolver como un sistema con incógnitas $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, añadiendo la ecuación $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$. Resolviendo dicho sistema obtenemos dos soluciones:

$$\left\{\operatorname{sen} x=\frac{1}{2},\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \text{ y } \{\operatorname{sen} x=1,\cos x=0\}$$

que, obviamente, conducen a las mismas soluciones de x dadas anteriormente.

b) $6\cos^2\frac{x}{2}+\cos x=1$.

Usando la fórmula del coseno del ángulo mitad, obtenemos que la ecuación la podemos escribir del siguiente modo:

$$6\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2+\cos x=1\Rightarrow 3(1+\cos x)+\cos x=1\Rightarrow 4\cos x=-2\Rightarrow\cos x=-\frac{1}{2}.$$

Como el ángulo en el primer cuadrante con coseno igual a $\frac{1}{2}$ es $\frac{\pi}{3}$, los ángulos que verifican la ecuación son $x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ y $x=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones en el intervalo $[0,2\pi]$:

a) $\begin{cases}\tan(x+y)=\sqrt{3}\\ x+2y=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

b) $\begin{cases}\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\end{cases}$

Resolución.

a) $\begin{cases}\tan(x+y)=\sqrt{3}\\ x+2y=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

Vamos a resolverlo en general y luego veremos cuáles son las soluciones en el intervalo $\left[0,2\pi\right]$.

Como $\tan\left(x+y\right)=\sqrt{3}$ y los ángulos en la primera vuelta con dicha tangente son $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}+\pi$, entonces tenemos que, en general, $x+y=\frac{\pi}{3}+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$.

Además, $x+2y=\frac{\pi}{2}$, por lo que tenemos el sistema

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \\ x+2y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Restando la primera ecuación a la segunda, obtenemos $y=\frac{\pi}{6}-k\pi$, y sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos $x+\frac{\pi}{6}-k\pi=\frac{\pi}{3}+k\pi\Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

Por tanto, las soluciones son $\left\{x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, y=\frac{\pi}{6}-k\pi\right\}$ con $k\in\mathbb{Z}$.

Para que ambos valores estén en el intervalo $\left[0,2\pi\right]$ debe ser, obviamente, $k=0$, por lo que la solución que nos solicitan es $\left\{x=\frac{\pi}{6}, y=\frac{\pi}{6}\right\}$

b) $\begin{cases} \operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos $2\operatorname{sen} x=\sqrt{3}\Rightarrow \operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ o $x=\frac{2\pi}{3}$ (dentro del intervalo $\left[0,2\pi\right]$).

Sustituyendo en la segunda ecuación $\operatorname{sen} x$ por $\frac{\sqrt{3}}{2}$, obtenemos $\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{sen} y=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{sen} y=\frac{1}{2}$. Por tanto, en el intervalo $\left[0,2\pi\right]$ los posibles valores de y son: $y=\frac{\pi}{6}$ o $y=\frac{5\pi}{6}$.

Las soluciones por tanto son:

$$\left(x=\frac{\pi}{3}\text{ o } x=\frac{2\pi}{3}\right)\text{ y }\left(y=\frac{\pi}{6}\text{ o } y=\frac{5\pi}{6}\right)$$

Ejercicio 4.

Demuestre las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}-\dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{sen}\alpha-\tan\alpha$

b) $\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

Resolución.

a) $$\frac{1-\cos 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha} - \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha} =$$
$$= \frac{2\operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha} - \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \operatorname{sen}\alpha - \tan\alpha$$

b) $$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha) =$$
$$= (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta)^2 - (\operatorname{sen}\beta\cos\alpha)^2 = \operatorname{sen}^2\alpha(1-\operatorname{sen}^2\beta) - \operatorname{sen}^2\beta(1-\operatorname{sen}^2\alpha) =$$
$$= \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\ \operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta\ \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$$

<u>Ejercicio 5.</u>

Expresión de la diferencia de los cosenos de dos ángulos como producto. Demuéstrelo a partir de las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma de dos ángulos.

Resolución.

Dados dos ángulos A y B, se tiene que $\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$

Demostración:

Sean A y B dos números reales. Tomemos los valores $\alpha = \frac{A+B}{2}$ y $\beta = \frac{A-B}{2}$.

Entonces $\alpha+\beta = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = \frac{2A}{2} = A$ y $\alpha-\beta = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = \frac{2B}{2} = B$.

Tenemos por tanto que:

$$\cos A = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta$$
$$\cos B = \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta$$

Restando las dos igualdades obtenemos:

$\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$, como queríamos demostrar.