Ejercicio 1.

Calcule y simplifique todo lo que pueda:

a) $\dfrac{4b^3}{\sqrt[7]{b^2}}+\dfrac{5b^4}{\sqrt[7]{b^9}}$ **b)** $\dfrac{3+\sqrt{8}}{3-\sqrt{3}}-2\sqrt{3}+3\sqrt{27}-5\sqrt{48}$

c) Sabiendo que $\log 2 \cong 0,301$ **y que** $\log 3 \cong 0,477$**, calcule razonadamente, aplicando las propiedades de los logaritmos y sin calculadora,** $\log_6 12$**. (Nota: fíjese que la base de este logaritmo es distinta de la base de los logaritmos dados como datos).**

Resolución.

a) $$\frac{4b^3}{\sqrt[7]{b^2}}+\frac{5b^4}{\sqrt[7]{b^9}}=\frac{4b^3\sqrt[7]{b^5}}{\sqrt[7]{b^2}\sqrt[7]{b^5}}+\frac{5b^4\sqrt[7]{b^5}}{b\sqrt[7]{b^2}\sqrt[7]{b^5}}=\frac{4b^3\sqrt[7]{b^5}}{b}+\frac{5b^4\sqrt[7]{b^5}}{b^2}=4b^2\sqrt[7]{b^5}+5b^2\sqrt[7]{b^5}=9b^2\sqrt[7]{b^5}$$

b) $$\frac{3+\sqrt{8}}{3-\sqrt{3}}-2\sqrt{3}+3\sqrt{27}-5\sqrt{48}=\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}-2\sqrt{3}+9\sqrt{3}-20\sqrt{3}=$$

$$=\frac{9+3\sqrt{3}+6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{9-3}-13\sqrt{3}=\frac{9}{6}+\frac{3}{6}\sqrt{3}+\frac{6}{6}\sqrt{2}+\frac{2}{6}\sqrt{6}-13\sqrt{3}=$$

$$=\frac{3}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{6}-\frac{25}{2}\sqrt{3}$$

c) $$\log_6 12=\frac{\log 12}{\log 6}=\frac{\log\left(2^2\cdot 3\right)}{\log\left(2\cdot 3\right)}=\frac{\log\left(2^2\right)+\log 3}{\log 2+\log 3}=\frac{2\log 2+\log 3}{\log 2+\log 3}\cong$$

$$\cong\frac{2\cdot 0,301+0,477}{0,301+0,477}=\frac{0,602+0,477}{0,778}=\frac{1,079}{0,708}=\frac{1079}{708}$$

Ejercicio 2.

Desarrolle y simplifique:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^5$$

Resolución.

Aunque se puede desarrollar directamente, vamos a resolverlo racionalizando y simplificando el binomio antes de desarrollar la potencia:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^5=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^5=\left(\frac{\sqrt{xy}}{y}-\frac{\sqrt{xy}}{x}\right)^5=\left(\frac{x\sqrt{xy}-y\sqrt{xy}}{xy}\right)^5=\left(\frac{(x-y)\sqrt{xy}}{xy}\right)^5=$$

$$=(x-y)^5\left(\frac{\sqrt{xy}}{xy}\right)^5=(x-y)^5\frac{\sqrt{x^5y^5}}{x^5y^5}=(x-y)^5\frac{\sqrt{xy}}{x^3y^3}=$$

$$=\left(x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5\right)\frac{\sqrt{xy}}{x^3y^3}=$$

$$=\left(\frac{x^2}{y^3}-5\frac{x}{y^2}+10\frac{1}{y}-10\frac{1}{x}+5\frac{y}{x^2}-\frac{y^2}{x^3}\right)\sqrt{xy}$$

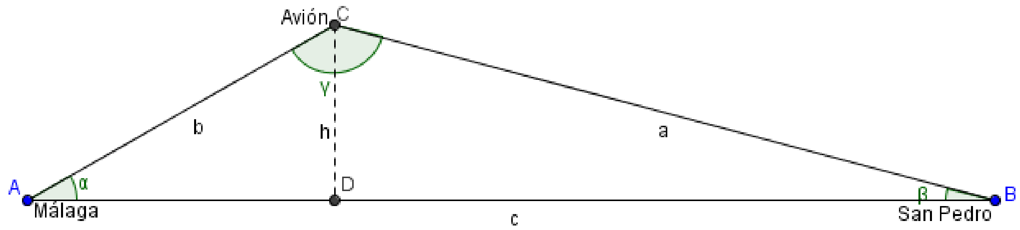
Ejercicio 3.

Un avión vuela entre Málaga y San Pedro Alcántara (ciudades que, supongamos, distan 72 km). En un momento dado del vuelo, la visual desde Málaga al avión forma un ángulo con

el suelo de $\frac{\pi}{6}$ radianes, y la visual desde San Pedro, un ángulo de $\frac{\pi}{12}$ radianes. Halle los valores exactos de la altura a la que se encuentra el avión y su distancia en ese momento a Málaga y a San Pedro. (Nota: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$).

Resolución.

Si dibujamos el triángulo ABC formado por las dos ciudades y el avión,



tenemos $\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{12}$, y entonces el ángulo en C es $\gamma=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{12}=\frac{9\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$. Además $c=72$ Km, por lo que podemos aplicar el Teorema del Seno para hallar a y b.

Para ello debemos conocer los senos de los ángulos del triángulo. Sabemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ y como $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$, entonces $\operatorname{sen}\gamma=\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aplicando entonces el Teorema del Seno, obtenemos:

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{c\cdot\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}=\dfrac{72\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{72}{\sqrt{2}}=\dfrac{72\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{72\sqrt{2}}{2}=36\sqrt{2}\text{ km} \\[2ex] b=\dfrac{c\cdot\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}=\dfrac{72\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{72\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}=\dfrac{72\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{72\left(2\sqrt{3}-2\right)}{2}=72\left(\sqrt{3}-1\right)\text{ km}\end{cases}$$

Luego la distancia del avión a Málaga es de $72\left(\sqrt{3}-1\right)$ km y a San Pedro, de $36\sqrt{2}$ km.

Para hallar la altura, tomamos el triángulo rectángulo ACD, cuya hipotenusa es b, el ángulo sobre AD es $\frac{\pi}{6}$ y su cateto opuesto es h. Por tanto:

$$h=b\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=72\left(\sqrt{3}-1\right)\frac{1}{2}=36\left(\sqrt{3}-1\right)\text{ km.}$$

Luego el avión se encuentra a una altura de $36\left(\sqrt{3}-1\right)$ km.

Ejercicio 4.

Resuelva las siguientes ecuaciones indicando claramente las soluciones:

a) $\frac{3}{x}-\frac{x}{x+2}=\frac{5x-1}{x^2+x-2}$ **b)** $\sqrt{3\sqrt{16-x}}=\sqrt{2x-5}$

Resolución.

a) Sumando $-\dfrac{5x-1}{x^2+x-2}$ a los dos miembros de la igualdad y operando las razones algebraicas en el otro miembro (para lo que factorizamos el denominador $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$), obtenemos:

$$\frac{3}{x}-\frac{x}{x+2}-\frac{5x-1}{x^2+x-2}=0\Rightarrow\frac{3(x+2)(x-1)}{x(x+2)(x-1)}-\frac{x\cdot x(x-1)}{x(x+2)(x-1)}-\frac{(5x-1)x}{x(x+2)(x-1)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(3x^2+3x-6)-(x^3-x^2)-(5x^2-x)}{x(x+2)(x-1)}=0\Rightarrow\frac{-x^3-x^2+4x-6}{x(x+2)(x-1)}=0.$$

Por tanto, el numerador debe ser cero, pero sin que se anule el denominador, es decir, $-x^3-x^2+4x-6=0$, pero con $x\neq 0$, $x\neq -2$ y $x\neq 1$. Debemos resolver entonces la ecuación:

$$-x^3-x^2+4x-6=0\Leftrightarrow x^3+x^2-4x+6=0.$$

Factorizando el polinomio, obtenemos que $x^3+x^2-4x+6=(x+3)(x^2-2x+2)$, donde $x^2-2x+2=0$ no tiene soluciones reales, por lo que la única solución es $x=-3$.

b) Elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad, obtenemos:

$$\sqrt{3\sqrt{16-x}}=\sqrt{2x-5}\Rightarrow 3\sqrt{16-x}=2x-5,$$

y volviendo a elevar al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$3\sqrt{16-x}=2x-5\Rightarrow 9(16-x)=(2x-5)^2\Rightarrow 144-9x=4x^2-20x+25\Rightarrow 4x^2-11x-119=0,$$

cuyas soluciones son:

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-4\cdot 4\cdot(-119)}}{2\cdot 4}=\frac{11\pm\sqrt{121+1904}}{8}=\frac{11\pm\sqrt{2025}}{8}=\frac{11\pm\sqrt{3^4\cdot 5^2}}{8}=$$

$=\dfrac{11\pm 3^2\cdot 5}{8}=\dfrac{11\pm 45}{8}$. Por tanto $x=7$ o $x=-\dfrac{17}{4}$.

Es necesario sustituir estas posibles soluciones en la ecuación inicial para comprobar si son válidas o no.

Si $x=7$, tenemos $\sqrt{3\sqrt{16-x}}=\sqrt{2x-5}\Leftrightarrow\sqrt{3\sqrt{16-7}}=\sqrt{2\cdot 7-5}\Leftrightarrow 3=3$, por lo que $x=7$ es una solución de la ecuación.

Sin embargo, si $x=-\dfrac{17}{4}$, tenemos que el segundo miembro sería la raíz de un número negativo, lo que no es un número real, y, por tanto, esta solución no es válida.

Luego la única solución real es $x=7$.

Ejercicio 5.

Resuelva el sistema indicando claramente las soluciones:

$$\begin{cases}2^x+2\cdot 3^{y+1}=8\\ 5\cdot 2^{x-1}+9^y=6\end{cases}$$

Resolución.

Tenemos que $\begin{cases} 2^x + 2\cdot 3^{y+1} = 8 \\ 5\cdot 2^{x-1} + 9^y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 2\cdot 3\cdot 3^y = 8 \\ \frac{5}{2}\cdot 2^x + 3^{2y} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 6\cdot 3^y = 8 \\ \frac{5}{2}\cdot 2^x + \left(3^y\right)^2 = 6 \end{cases}$

Haciendo $a = 2^x$ y $b = 3^y$ y sustituyendo, obtenemos el siguiente sistema de segundo grado:

$$\begin{cases} a + 6b = 8 \Leftrightarrow a = -6b + 8 \\ \frac{5}{2}a + b^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2}\left(-6b+8\right) + b^2 = 6 \Rightarrow b^2 - 15b + 14 = 0.$$

Por tanto, $b = 14$ o $b = 1$.

Si $b = 14$, entonces $a = -6\cdot 14 + 8 < 0 \Rightarrow 2^x < 0$, lo que es imposible, por lo que esta solución no es válida.

Si $b = 1$, entonces $a = -6\cdot 1 + 8 = 2$, por lo que:

$$\begin{cases} a = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = \log_2 2 = 1 \\ b = 1 \Rightarrow 3^y = 1 \Rightarrow y = \log_3 1 = 0 \end{cases}$$

y entonces la solución del sistema es $\left(x = 1, y = 0\right)$.

<u>Ejercicio 6.</u>

Indique los números x para los que la siguiente expresión es un número real:

$$\sqrt{\frac{-x^2+5x-6}{5-x}}$$

Resolución.

Para que ocurra lo que pide el ejercicio, debemos tener que $\dfrac{-x^2+5x-6}{5-x} \geq 0$.

Factorizando el numerador, obtenemos la inecuación $\dfrac{-1\left(x-3\right)\left(x-2\right)}{5-x} \geq 0$.

Sabemos que:

$$x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$$
$$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$
$$5 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -5 \Leftrightarrow x < 5$$

y trasladando la información a una tabla, tenemos que:

	$-\infty$ a 2	2 a 3	3 a 5	5 a $+\infty$
-1	$-$	$-$	$-$	$-$
$x-2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$5-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\dfrac{-1\left(x-3\right)\left(x-2\right)}{5-x}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Como además el denominador no puede ser nulo, esto es, no puede ser $x = 5$, los valores de x que son solución de la inecuación y, por tanto, son los valores para los que la raíz es un número real, son los siguientes:

$$x \in \left[2,3\right] \cup \left(5,+\infty\right)$$

Ejercicio 7.

Calcule la expresión algebraica del polinomio $P(x)$ que verifica todas las condiciones siguientes:

- **Es de cuarto grado.**
- **El término independiente es nulo y el de mayor grado tiene coeficiente 1.**
- **Es divisible por $x-2$.**
- **El resto de dividirlo entre $x-3$ es 15.**
- **El valor numérico en $x=-1$ es -9.**

(Resuélvalo aplicando el método de Gauss).

Resolución.

Teniendo en cuenta que es un polinomio de cuarto grado con coeficiente principal 1 y con coeficiente independiente nulo, debe ser de la forma $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$.

Como es divisible entre $x-2$, el valor numérico para $x=2$ es 0; como al dividirlo entre $x-3$ el resto es 15, el valor numérico para $x=3$ es 15, y, además, nos dicen que el valor numérico para $x=-1$ es -9. Por todo ello tenemos:

$$p(2)=0 \Rightarrow 2^4+a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2=0$$

$$p(3)=15 \Rightarrow 3^4+a\cdot 3^3+b\cdot 3^2+c\cdot 3=15$$

$$p(-1)=-9 \Rightarrow (-1)^4+a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)=-9$$

Luego, hemos obtenido el siguiente sistema con incógnitas a, b y c:

$$\begin{cases} 8a+4b+2c=-16 \\ 27a+9b+3c=-66 \\ -a+b-c=-10 \end{cases}$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ la primera ecuación, por $\frac{1}{3}$ la segunda, y colocando la tercera ecuación en primer lugar, el sistema, con su matriz de coeficientes, se resuelve mediante el método de Gauss del siguiente modo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -10 \\ 4 & 2 & 1 & -8 \\ 9 & 3 & 1 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{e_2\leftrightarrow e_2+4e_1 \\ e_3\leftrightarrow e_3+9e_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 6 & -3 & -48 \\ 0 & 12 & -8 & -112 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{e_2\leftrightarrow \frac{1}{3}e_2 \\ e_3\leftrightarrow \frac{1}{4}e_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -16 \\ 0 & 3 & -2 & -28 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[e_3\leftrightarrow 2e_3-3e_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right)$$

Por tanto, la tercera ecuación queda $-c=-8 \Rightarrow c=8$.

La segunda ecuación queda de la forma $2b-c=-16 \Rightarrow 2b-8=-16 \Rightarrow 2b=-8 \Rightarrow b=-4$.

Por último, la primera ecuación es $-a+b-c=-10 \Rightarrow -a-4-8=-10 \Rightarrow -a=2 \Rightarrow a=-2$.

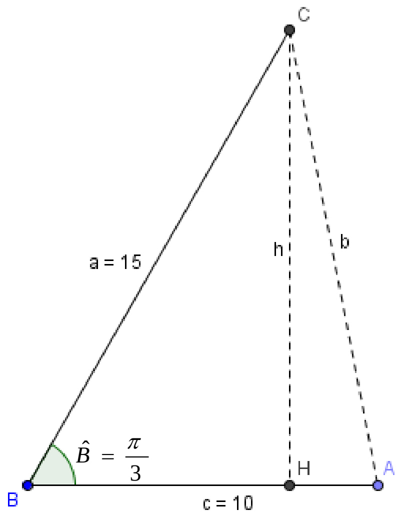
Luego, el polinomio que cumple todas las condiciones impuestas es $p(x)=x^4-2x^3-4x^2+8x$.

Ejercicio 8.

Calcule el área de un terreno triangular, con vértices A, B y C, sabiendo que $\overline{AB}=10$ metros, $\overline{BC}=15$ metros y $\hat{B}=\frac{\pi}{3}$. Halle además la distancia entre A y C.

Resolución.

El triángulo es, de acuerdo a los datos que nos dan, el de la siguiente figura:



Como $h = a \cdot \operatorname{sen}\hat{B} = 15 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 15\frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces el área es:

$A = \frac{1}{2}c \cdot h = \frac{1}{2}10 \cdot 15\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$ m ^{2}.

Por otra parte, por el Teorema del Coseno, tenemos:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$b^2 = 325 - 300\frac{1}{2} = 175 = 5^2 \cdot 7 \Rightarrow b = 5\sqrt{7}$ metros, siendo precisamente b la distancia entre A y C.