ECUACIONES, SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

Ejercicio 1.

a) Halle los valores de m para los que la ecuación de segundo grado $8x^2-(m-1)x=7-m$ no tiene solución real.

b) Resuelva la siguiente inecuación indicando claramente y con intervalos sus soluciones:

$$\frac{1}{x-1}\le\frac{2}{x+4}$$

Resolución:

a) La ecuación de segundo grado $8x^2-(m-1)x=7-m$ es equivalente a la ecuación $8x^2-(m-1)x+m-7=0$, por lo que, según la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado, para que no tenga solución, debe ocurrir que $\sqrt{(m-1)^2-4\cdot 8\cdot(m-7)}$ no exista, es decir, que $(m-1)^2-4\cdot 8\cdot(m-7)<0$.

Operando, la inecuación queda del siguiente modo:

$$m^2-34m+225<0$$

Factorizando el polinomio, obtenemos:

$$(m-9)(m-25)<0$$

Como $m-9>0\Leftrightarrow m>9$ y $m-25>0\Leftrightarrow m>25$, está claro que ambos factores son positivos para $m>25$ y ambos son negativos para $m<9$, por lo que para que el producto sea negativo, es decir, para que ambos factores sean de distinto signo, debe ocurrir que $9<m<25$ (las desigualdades son estrictas puesto que no se puede dar que el producto sea igual a cero).

Luego para que no tenga solución la ecuación propuesta debe ocurrir que $m\in(9,25)$.

b) Para resolver esta inecuación, debemos hacer un miembro igual a cero, por lo que sumamos $-\frac{2}{x+4}$ a los dos miembros de la desigualdad, quedándonos la siguiente inecuación:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+4}\le 0\Leftrightarrow\frac{x+4-2(x-1)}{(x-1)(x+4)}\le 0\Leftrightarrow\frac{-x+6}{(x-1)(x+4)}\le 0$$

Tenemos entonces que analizar cuándo es positivo y negativo cada factor del numerador y del denominador:

$-x+6>0\Leftrightarrow -x>-6\Leftrightarrow x<6$

$x-1>0\Leftrightarrow x>1$

$x+4>0\Leftrightarrow x>-4$

Trasladando esta información a la siguiente tabla:

	$-\infty$ a -4	-4 a 1	1 a 6	6 a $+\infty$
$-x+6$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{-x+6}{(x-1)(x+4)}$	$+$	$-$	$+$	$-$

Además, $\dfrac{-x+6}{(x-1)(x+4)}$ es cero sólo si $-x+6=0$, es decir, sólo si $x=6$, por lo que, esto, junto con la tabla anterior, nos da las siguientes soluciones de la inecuación:

$$x\in(-4,1)\cup[6,+\infty)$$

Ejercicio 2.

Resuelva las siguientes ecuaciones indicando con claridad cuáles son sus soluciones:

a) $4^x-2^{x-1}=14$

b) $x^4-x^3-2x^2-4x+1=-2x^3+2x^2+1$

c) $e^{2x}=e^{x+9}\cdot\sqrt{73}$

Resolución:

a) $4^x-2^{x-1}=14\Leftrightarrow\left(2^2\right)^x-2^{-1}\cdot 2^x=14\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-\frac{1}{2}2^x=14$

Haciendo $t=2^x$, obtenemos la ecuación $t^2-\frac{1}{2}t=14$. Sumando -14 a ambos miembros, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$t^2-\frac{1}{2}t-14=0$$

que, completando cuadrados, se obtiene que es equivalente a la ecuación $\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{225}{16}=0$, de donde se deducen las dos soluciones de la ecuación: $t=4$ o $t=-\frac{7}{2}$.

Es decir, $2^x=4$ o $2^x=-\frac{7}{2}$. Como $2^x>0\quad\forall x\in\mathbb{R}$, la segunda posibilidad indicada es imposible. Luego la única solución de la ecuación inicial es:

$$x=\log_2 4=2$$

b) Si sumamos a los dos miembros de la igualdad $2x^3-2x^2-1$, obtenemos la siguiente ecuación equivalente:

$$x^4+x^3-4x^2-4x=0$$

Factorizando el primer miembro, la ecuación queda:

$$x(x+1)(x+2)(x-2)=0$$

de donde, obviamente, las soluciones son $x=0$ o $x=-1$ o $x=-2$ o $x=2$.

c) Multiplicando por e^{-x} los dos miembros de la igualdad, obtenemos:

$$e^{2x}\cdot e^{-x}=e^{x+9}\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{73}\Leftrightarrow e^x=e^9\cdot\sqrt{73}$$

de donde $x=\log_e\left(e^9\cdot\sqrt{73}\right)=\ln\left(e^9\right)+\ln\left(73^{\frac{1}{2}}\right)=9+\frac{1}{2}\ln 73$.

Ejercicio 3.

Resuelva los sistemas siguientes indicando sus soluciones:

a) $\begin{cases} y-2x=x+1 \\ 3x+\sqrt{x+y+4}=y+2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_2 x+3\log_2 y=5 \\ \log_2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-(1+x)>3x-1 \\ 3(x+2)\geq 2(x-4) \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9^{\frac{x-1}{2}}+7^{y-1}=16 \\ 3^{x-2}-7^{y+1}=-340 \end{cases}$

Resolución:

a) Despejando y en la primera ecuación del sistema, obtenemos:

$$y=3x+1$$

y sustituyendo en la segunda ecuación, tenemos:

$3x+\sqrt{x+3x+1+4}=3x+1+2x \Rightarrow \sqrt{4x+5}=2x+1 \Rightarrow 4x+5=(2x+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x+5=4x^2+4x+1 \Rightarrow 4x^2-4=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

Si $x=1$ tenemos que $y=3x+1=4$, y sustituyendo en la segunda ecuación del sistema (al tener radicales debemos comprobar si la solución es válida), obtenemos que $3+\sqrt{1+4+4}=4+2 \Leftrightarrow 3+3=6$, por lo que $x=1, y=4$ es una solución del sistema.

Si $x=-1$ tenemos que $y=3x+1=-2$, pero sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos que $-3+\sqrt{-1-2+4}=-2-2 \Leftrightarrow -3+1=-4$, que es una igualdad falsa, por lo que este par de valores no son una solución del sistema.

Luego la solución única es $x=1, y=4$.

b) Tenemos que $\log_2 x+3\log_2 y=5 \Leftrightarrow \log_2\left(x\cdot y^3\right)=5 \Leftrightarrow x\cdot y^3=2^5$.

Además $\log_2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)=3 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y}=2^3 \Leftrightarrow x^2=2^3 y \Leftrightarrow y=2^{-3}x^2$.

Sustituyendo en la anterior ecuación, obtenemos

$x\cdot\left(2^{-3}x^2\right)^3=2^5 \Leftrightarrow 2^{-9}x^7=2^5 \Leftrightarrow x^7=2^{14} \Leftrightarrow x=\sqrt[7]{2^{14}}=4$.

Como $y=2^{-3}x^2$, entonces $y=2^{-3}\cdot 4^2=2$.

Como ambos valores son positivos, entonces todos los logaritmos del sistema existen (puesto que en tal caso, tanto x, como y, como $\dfrac{x^2}{y}$, tienen valores positivos), y basta sustituir para ver que $x=4$, $y=2$ es solución del sistema.

c) Debemos resolver ambas inecuaciones por separado, y los valores de x válidos para que se verifique el sistema serán aquellos valores comunes de entre las soluciones de una y otra inecuación, es decir, deberemos tomar como conjunto de soluciones del sistema la intersección de los conjuntos de soluciones de cada inecuación. Resolvamos entonces las dos inecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} 2x-(1+x)>3x-1 \Leftrightarrow x-1>3x-1 \Leftrightarrow -2x>0 \Leftrightarrow x<0 \\ 3(x+2)\geq 2(x-4) \Leftrightarrow 3x+6\geq 2x-8 \Leftrightarrow x\geq -14 \end{cases}$$

Por tanto, debe ocurrir que $x\geq -14$ y $x<0$, es decir, que $x\in[-14,0)$

d) $$\begin{cases} 9^{\frac{x-1}{2}}+7^{y-1}=16 \\ 3^{x-2}-7^{y+1}=-340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{x-1}+7^{-1}\cdot 7^y=16 \\ 3^{-2}\cdot 3^x-7\cdot 7^y=-340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{-1}\cdot 3^x+7^{-1}\cdot 7^y=16 \\ 3^{-2}\cdot 3^x-7\cdot 7^y=-340 \end{cases}$$

Realizando las sustituciones $t=3^x$ y $s=7^y$, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}t+\frac{1}{7}s=16 \\ \frac{1}{9}t-7s=-340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7t+3s=336 \\ t-63s=-3060 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7t+3s=336 \\ -7t+441s=21420 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7t+3s=336 \\ 444s=21756 \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos $s=\frac{21756}{444}=49$, y sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos que $7t+147=336 \Rightarrow 7t=189 \Rightarrow t=27$.

Por tanto:

$$\begin{cases} 3^x=t=27 \\ 7^y=s=49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\log_3 27=3 \\ y=\log_7 49=2 \end{cases}$$

Es decir, la solución del sistema es $x=3, y=2$.

Ejercicio 4.

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ x+3y-2z=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2y-z=-1 \\ 5x-y-3z=2 \\ x-y+2z=-2 \end{cases}$

Resolución:

a) Vamos a resolverlo matricialmente, indicando las transformaciones en sistemas equivalentes entre las matrices que vamos obteniendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_1 \leftrightarrow E_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{E_2 \to E_2-2E_1 \\ E_3 \to E_3-E_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[E_3 \to E_3-E_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Finalmente nos quedan dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado, con grado de libertad igual a 1. Si le damos esa libertad a la incógnita z, es decir, si hacemos $z=\lambda$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-2\lambda=0 \\ -4y+5\lambda=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=2\lambda \\ -4y=-5\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=2\lambda \\ y=\frac{5}{4}\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\frac{15}{4}\lambda+2\lambda=-\frac{7}{4}\lambda \\ y=\frac{5}{4}\lambda \end{array}\right\},$$

de donde las infinitas soluciones del sistema son:

$$\left\{\left(x=-\frac{7}{4}\lambda, \quad y=\frac{5}{4}\lambda, \quad z=\lambda\right) / \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

b) Este sistema lo vamos a resolver del mismo modo que el anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 \leftrightarrow E_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_2 \to E_2-5E_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -13 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\substack{E_3\to 2E_3\\ E_3\to E_3-E_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -13 & 12 \\ 0 & 0 & 11 & -14 \end{array}\right)$$

Al quedarnos un sistema triangular con tres ecuaciones y tres incógnitas, el sistema es compatible determinado. De la tercera ecuación, se obtiene que $11z=-14\Rightarrow z=-\dfrac{14}{11}$.

Sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos:

$$4y-13\cdot\left(-\frac{14}{11}\right)=12\Rightarrow 4y=12-\frac{182}{11}=-\frac{50}{11}\Rightarrow y=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{50}{11}\right)=-\frac{25}{22}.$$

Finalmente, sustituyendo en la primera ecuación, hallamos el valor de x:

$$x+\frac{25}{22}-\frac{28}{11}=-2\Rightarrow x=-2-\frac{25}{22}+\frac{28}{11}=-\frac{13}{22}.$$

Por tanto la solución única del sistema es $\left(x=-\dfrac{13}{22},\quad y=-\dfrac{25}{22},\quad z=-\dfrac{14}{11}\right)$.

Ejercicio 5.

Un técnico informático espera obtener 360 euros por la reparación de varios equipos. El técnico se de cuenta de que cuatro ordenadores no tienen posible reparación y, para obtener el mismo beneficio, aumenta en 4.50 euros el precio que va a cobrar por un equipo reparado. ¿Cuántos ordenadores tenía al principio? ¿A qué precio cobrará finalmente cada reparación?

Resolución:

Si llamamos e al número de equipos que tenía al principio y p al precio que inicialmente iba a cobrar por la reparación de cada uno de ellos, sabemos que:

$$e\cdot p=360$$

Posteriormente, decide reparar $e-4$ equipos a un precio cada uno de ellos de $p+4.5$, obteniendo el mismo beneficio total, es decir:

$$(e-4)(p+4.5)=360$$

Por tanto ya tenemos un sistema de dos ecuaciones en el que intervienen las dos incógnitas:

$$\begin{cases} e\cdot p=360 \\ (e-4)(p+4.5)=360 \end{cases}$$

Resolvamos entonces el sistema:

$$\begin{cases} e\cdot p=360 \\ (e-4)(p+4.5)=360 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ep=360 \\ ep-4p+4.5e-18=360 \end{cases}$$

Sustituyendo ep por 360 en la segunda ecuación y despejando p, obtenemos:

$$360-4p+4.5e-18=360\Rightarrow 4p=4.5e-18\Rightarrow p=\frac{4.5e-18}{4}$$

Sustituyendo ahora en la primera ecuación, obtenemos:

$$e\left(\frac{4.5e-18}{4}\right)=360\Rightarrow 4.5e^2-18e-1440=0\Rightarrow 9e^2-36e-2880=0\Rightarrow e^2-4e-320=0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos:

$$e=-16 \text{ o } e=20$$

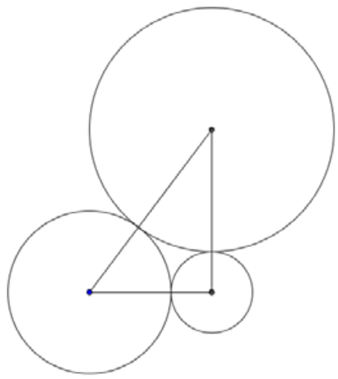
Como la primera solución no es válida para la definición de e (que debe ser un número natural), entonces $e = 20$ es la única solución posible para nuestro problema.

Entonces $p = \frac{4.5 \cdot 20 - 18}{4} = 18 \Rightarrow p + 4.5 = 22.5$.

Luego inicialmente había que reparar 20 ordenadores, de los que puede reparar sólo 16, a un precio estos últimos de 22.50 euros.

<u>Ejercicio 6.</u>

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 27 y 36 cm, respectivamente. Con centro en los vértices del triángulo, se trazan tres circunferencias de forma que son tangentes exteriores dos a dos, tal y como aparece en la figura. Calcule los radios de las tres circunferencias.



Resolución:

De los datos del problema se puede deducir sin dificultad la hipotenusa del triángulo, haciendo uso del Teorema de Pitágoras: $h^2 = 27^2 + 36^2 = 2025 \Rightarrow h = 45$.

Si llamamos r_1 al radio de la circunferencia cuyo centro está en el vértice opuesto a la hipotenusa, r_2 al radio de la circunferencia con centro en el otro extremo del cateto menor, y, finalmente, r_3 al radio de la circunferencia con centro en el otro extremo del cateto mayor, sabemos que cada lado es la suma de dos radios, y tal y como los hemos nombrado, tenemos entonces lo siguiente:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 27 \\ r_1 + r_3 = 36 \\ r_2 + r_3 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 27 - r_2 \\ 27 - r_2 + r_3 = 36 \\ r_2 + r_3 = 45 \end{cases}$$

(habiendo despejado r_1 en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda).

Sumando las dos últimas ecuaciones, obtenemos:

$$27 + 2r_3 = 81 \Rightarrow 2r_3 = 54 \Rightarrow r_3 = 27$$

Sustituyendo en la tercera ecuación este valor de r_3, hallamos r_2:

$$r_2 + 27 = 45 \Rightarrow r_2 = 18$$

Finalmente, sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos que $r_1 = 27 - 18 = 9$.

Por tanto, los radios de las circunferencias son, respectivamente, de 9 m, 18 m y 27 m.