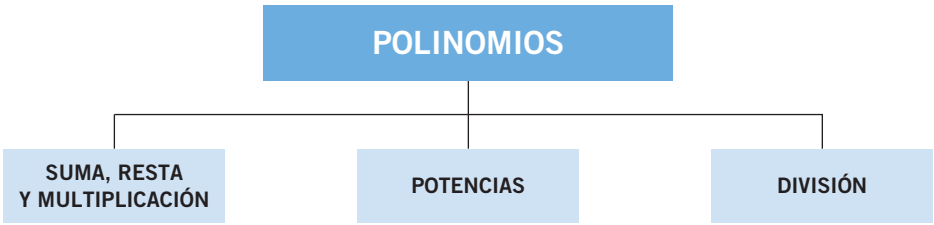
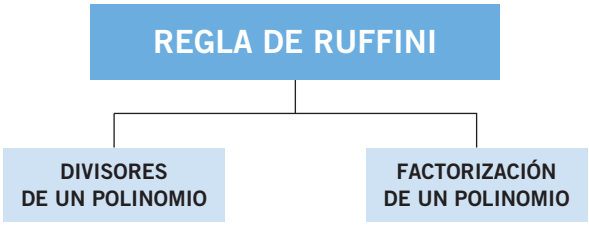
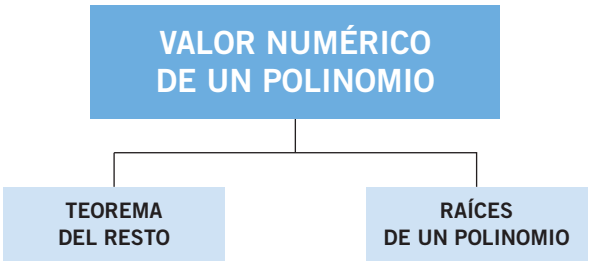
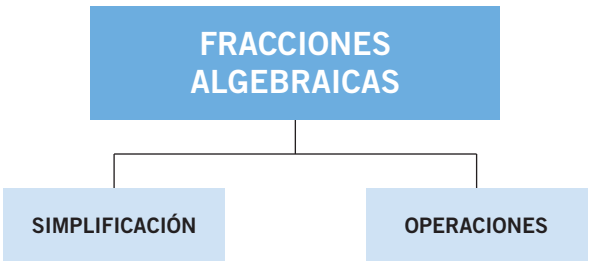
3 Polinomios y fracciones algebraicas









Un hombre de principios

Días negros y noches largas, estas últimas semanas habían sido especialmente difíciles para Paolo Ruffini.

Mientras caminaba en dirección a su casa, pensaba en lo duro que le había sido tomar la decisión de no jurar fidelidad a la bandera de los invasores franceses.

Un golpecito en el hombro y la voz amiga de Luigi lo devolvieron a la realidad:

–¡Paolo! ¿Qué has hecho? En la universidad no se comenta otra cosa. El responsable político ha asegurado que nunca volverás a sentarte en tu cátedra y que has marcado tu destino; se le veía terriblemente enfadado.

–Lo pensé durante mucho tiempo y cuando comuniqué mi decisión me he sentido aliviado –argumentó Ruffini, plenamente convencido.

–Pero ¿no has pensado en tu familia o en tu posición? –Luigi mostró la preocupación que parecía haber abandonado a Ruffini.

–Luigi, ¿cuánto darías por un puesto de funcionario? –Estaban llegando al mercado y Ruffini se paró en seco–. Yo no estoy dispuesto a pagar tanto por la cátedra; si hiciera el juramento, habría traicionado mis principios y mutilado mi alma, mantendría mi cátedra pero el Paolo Ruffini que conoces habría muerto.

Ruffini se dedicó por entero a su oficio de médico en los años en que estuvo alejado de la docencia.

En la división de polinomios $P(x) : (x - a)$, *calcula el grado del cociente y del resto.*

El grado del cociente es un grado menor que el grado del polinomio $P(x)$***, y el grado del resto es cero, pues es siempre un número (un número es un polinomio de grado cero).***

EJERCICIOS

001 **Efectúa la siguiente operación.**

$$(-2x^3 + x^2 + x - 1) - (x^3 + x^2 - x - 1)$$

$(-2x^3 + x^2 + x - 1) - (x^3 + x^2 - x - 1) = -3x^3 + 2x$

002 **Multiplica estos polinomios.**

$$P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1 \qquad Q(x) = x - 1$$

$P(x) \cdot Q(x) = x^4 - x^3 - x^3 + x^2 + 3x^2 - 3x - x + 1 =$
$= x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 1$

003 **Si $P(x) = x^2 - x + 2$ y $Q(x) = x^3 - x^2 + 1$, calcula:**

a) $P(1) + P(-1)$ **b)** $P(0) + Q(-1)$

a) $P(1) + P(-1) = (1 - 1 + 2) + (1 + 1 + 2) = 2 + 4 = 6$

b) $P(0) + Q(-1) = 2 + (4 + 2 + 8) = 2 + 12 = 14$

004 **¿Cuánto tiene que valer *a* para que $P(a) = 0$ si $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$?**

Son las soluciones de la ecuación $2x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = \frac{1}{2}$

005 **Realiza las siguientes divisiones de polinomios. Comprueba, en cada una de ellas, el resultado que obtienes.**

a) $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) : (x^2 - 2x - 1)$

b) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x^2 - 1)$

c) $(x^4 + 1) : (x^2 + 1)$

d) $(x^5 + 2x^3 - 1) : (x^2 - 3)$

a) $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) : (x^2 - 2x - 1) \rightarrow \begin{cases} \text{Cociente} = 2x + 1 \\ \text{Resto} = -x - 4 \end{cases}$

b) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) : (x^2 - 1) \longrightarrow \begin{cases} \text{Cociente} = 2x - 3 \\ \text{Resto} = 6x - 6 \end{cases}$

c) $(x^4 + 1) : (x^2 + 1) \longrightarrow \begin{cases} \text{Cociente} = x^2 - 1 \\ \text{Resto} = 2 \end{cases}$

d) $(x^5 + 2x^3 - 1) : (x^2 - 3) \longrightarrow \begin{cases} \text{Cociente} = x^3 + 5x \\ \text{Resto} = 15x - 1 \end{cases}$

006 **El divisor de una división de polinomios es $Q(x) = 2x^2 - 7$, el cociente es $C(x) = x^3 - 2x$ y el resto es $R(x) = x - 2$. Calcula el dividendo.**

$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) = (2x^2 - 7) \cdot (x^3 - 2x) + (x - 2) =$
$= (2x^5 - 11x^3 + 14x) + (x - 2) = 2x^5 - 11x^3 + 15x - 2$

007 **El dividendo de una división de polinomios es $P(x) = x^5 - 2x^3 - x^2$, el cociente es $C(x) = x^2 - 2$ y el resto es $R(x) = -2$. ¿Cuál es el divisor?**

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$$x^5 - 2x^3 - x^2 = Q(x) \cdot (x^2 - 2) - 2 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^5 - 2x^3 - x^2 + 2 = Q(x) \cdot (x^2 - 2) \rightarrow$$
$$\rightarrow Q(x) = (x^5 - 2x^3 - x^2 + 2) : (x^2 - 2) = x^3 - 1$$

008 **Determina el cociente y el resto, aplicando la regla de Ruffini.**

a) $(x^3 - x^2 + x - 3) : (x - 1)$

b) $(x^4 - x^3 - x + 9) : (x - 2)$

c) $(x^4 + x^2 - 10) : (x - 5)$

d) $(x^5 - 2x^3 + x - 7) : (x + 3)$

e) $(x^7 + x^4 - 7x^2) : (x + 4)$

a)

	1	−1	1	−3
1		1	0	1
	1	0	1	−2

$\rightarrow C(x) = x^2 + 1;\ R(x) = -2$

b)

	1	−1	0	−1	9
2		2	2	4	6
	1	1	2	3	15

$\rightarrow C(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3;\ R(x) = 15$

c)

	1	0	1	0	−10
5		5	25	130	650
	1	5	26	130	640

$C(x) = x^3 + 5x^2 + 26x + 130;\ R(x) = 640$

d)

	1	0	−2	0	1	−7
−3		−3	9	−21	63	−192
	1	−3	7	−21	64	−199

$C(x) = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 21x + 64;\ R(x) = -199$

e)

	1	0	0	1	0	−7	0	0
−4		−4	16	−64	252	−1.008	4.060	−16.240
	1	−4	16	−63	252	−1.015	4.060	−16.240

$C(x) = x^6 - 4x^5 + 16x^4 - 63x^3 + 252x^2 - 1.015x + 4.060;\ R(x) = -16.240$

009 **Si dividimos $4x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$ entre $x + 2$, ¿cuáles serán el resto y el cociente? ¿Podemos aplicar la regla de Ruffini?**

	4	−3	2	−1	−1	1
−2		−8	22	−48	98	−194
	4	−11	24	−49	97	−193

Cociente: $4x^4 - 11x^3 + 24x^2 - 49x + 97$; Resto: -193

010 **Calcula el valor de *m* para que la división sea exacta.**

$$(x^5 - 2x^3 - 8x^2 + mx + 3) : (x - 3)$$

	1	0	−2	−8	m	3
3		3	9	21	39	$117 + 3m$
	1	3	7	13	$39 + m$	$120 + 3m$

$120 + 3m = 0 \rightarrow m = -40$

011 **Considerando el polinomio:**

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + x - 7$$

calcula, mediante el teorema del resto, su valor numérico para:

a) $x = 1$ **c)** $x = -1$ **e)** $x = 3$

b) $x = 5$ **d)** $x = 7$ **f)** $x = -5$

a)

	1	−7	1	−7
1		1	−6	−5
	1	−6	−5	−12

$\longrightarrow$ Como el resto es -12, entonces $P(1) = -12$.

b)

	1	−7	1	−7
5		5	−10	−45
	1	−2	−9	−52

$\longrightarrow$ Como el resto es -52, entonces $P(5) = -52$.

c)

	1	−7	1	−7
−1		−1	8	−9
	1	−8	9	−16

$\longrightarrow$ Como el resto es -16, entonces $P(-1) = -16$.

d)

	1	−7	1	−7
7		7	0	7
	1	0	1	0

$\longrightarrow$ Como el resto es 0, entonces $P(7) = 0$.

e)

	1	−7	1	−7
3		3	−12	−33
	1	−4	−11	−40

$\longrightarrow$ Como el resto es -40, entonces $P(3) = -40$.

f)

	1	−7	1	−7
−5		−5	60	−305
	1	−12	61	−312

$\rightarrow$ Como el resto es -312, entonces $P(-5) = -312$.

012 **Comprueba que se verifica el teorema del resto para $P(x) = x^4 - 3x + 2$ si:**

a) $x = 2$ **b)** $x = -1$

a)

	1	0	0	−3	2
2		2	4	8	10
	1	2	4	5	12

$P(2) = 2^4 - 3 \cdot 2 + 2 = 12$

b)

	1	0	0	−3	2
−1		−1	1	−1	4
	1	−1	1	−4	6

$P(-1) = (-1)^4 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$

013 **¿Cuánto vale a si el valor numérico de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + a$, para $x = 2$, es 0?**

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -3 & a \\ 2 & & 2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & \boxed{a-6} \end{array} \rightarrow a - 6 = 0 \rightarrow a = 6$$

014 **Calcula las raíces de estos polinomios.**

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

c) $R(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$

d) $S(x) = x^2 - 5x - 14$

a)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow$$
1 es raíz, $1 + \sqrt{3}$ y $1 - \sqrt{3}$ son también raíces.

b)
$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow$$
1 es raíz doble.

c) No tiene raíces racionales, al probar con los divisores del denominador nunca da cero.

d)
$$\left.\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & -14 \\ -2 & & -2 & 14 \\ \hline & 1 & -7 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow -2 \text{ es raíz.}\right.$$
$$\left.\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & -14 \\ 7 & & 7 & 14 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow 7 \text{ es raíz.}\right\} \rightarrow \text{Son las dos raíces del polinomio.}$$

015 **¿Cuánto vale a para que $x = 2$ sea una raíz del polinomio $x^3 - 2x^2 - 4x + a$?**

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -4 & a \\ 2 & & 2 & 0 & -8 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{a-8} \end{array} \rightarrow a - 8 = 0 \rightarrow a = 8$$

016 **Determina a y b para que el polinomio $P(x) = ax^2 + b$ tenga como raíces 2 y -2.**

$$\begin{array}{c|ccc} & a & 0 & b \\ 2 & & 2a & 4a \\ \hline & a & 2a & \boxed{b+4a} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & a & 0 & b \\ -2 & & -2a & 4a \\ \hline & a & -2a & \boxed{b+4a} \end{array}$$

Como $b = -4a$, cualquier par de números que lo cumpla formará un polinomio con esas raíces; por ejemplo, $a = 1$, y $b = -4$.

017 **Obtén, utilizando el triángulo de Tartaglia, el desarrollo de estas potencias.**

a) $(x+y)^5$ **c)** $(2x-2)^3$ **e)** $(3x^2-y)^4$ **g)** $(x^2-y^2)^5$

b) $(x+1)^4$ **d)** $(x-24)^4$ **f)** $(x^2-y)^5$ **h)** $(-x+3y)^3$

a) Los coeficientes son 1, 5, 10, 10, 5 y 1.
$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

b) Los coeficientes son 1, 4, 6, 4 y 1.
$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

c) Los coeficientes son 1, 3, 3 y 1.
$(2x-2)^3 = 8x^3 - 24x^2y + 24x - 8$

d) Los coeficientes son 1, 4, 6, 4 y 1.
$(x-24)^4 = x^4 - 96x^3 + 3.456x^2 - 55.296x + 331.776$

e) Los coeficientes son 1, 4, 6, 4 y 1.
$(3x^2-y)^4 = (3x^2)^4 + 4\cdot(3x^2)^3\cdot(-y) + 6\cdot(3x^2)^2\cdot(-y)^2 + 4\cdot(3x^2)\cdot(-y)^3 +$
$+ (-y)^4 = 81x^8 - 108x^6y + 54x^4y^2 - 12x^2y^3 + y^4$

f) Los coeficientes son 1, 5, 10, 10, 5 y 1.
$(x^2-y)^5 = (x^2)^5 + 5\cdot(x^2)^4\cdot(-y) + 10\cdot(x^2)^3\cdot(-y)^2 + 10\cdot(x^2)^2\cdot(-y)^3 +$
$+ 5\cdot(x^2)\cdot(-y)^4 + (-y)^5 = x^{10} - 5x^8y + 10x^6y^2 - 10x^4y^3 +$
$+ 5x^2y^4 - y^5$

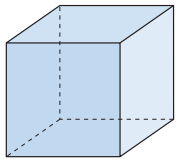
g) Los coeficientes son 1, 5, 10, 10, 5 y 1.
$(x^2-y^2)^5 = (x^2)^5 + 5\cdot(x^2)^4\cdot(-y^2) + 10\cdot(x^2)^3\cdot(-y^2)^2 +$
$+ 10\cdot(x^2)^2\cdot(-y^2)^3 + 5\cdot(x^2)\cdot(-y^2)^4 + (-y^2)^5 =$
$= x^{10} - 5x^8y^2 + 10x^6y^4 - 10x^4y^6 + 5x^2y^8 - y^{10}$

h) Los coeficientes son 1, 3, 3 y 1.
$(-x+3y)^3 = (-x)^3 + 3\cdot(-x)^2\cdot 3y + 3\cdot(-x)\cdot(3y)^2 + (3y)^2 =$
$= -x^3 - 9x^2y - 27xy^2 + 9y^2$

018 **Completa el triángulo de Tartaglia hasta la décima fila.**

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 37 84 126 126 84 37 9 1
1 10 46 121 210 252 210 121 46 10 1

019 **¿Cuál es el volumen de este cubo?**



$a+b$

Volumen: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

020 **Halla un divisor de estos polinomios.**

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

b) $Q(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2$

c) $R(x) = x^6 - x^5 - 2x + 2$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 2 & -6 \\ 3 & & 3 & 0 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow (x-3) \text{ es divisor de } P(x).$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 2 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow (x+1) \text{ es divisor de } Q(x).$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x-1) \text{ es divisor de } R(x).$$

021 **Calcula a para que $x - 1$ sea divisor de $2x^3 - x^2 + 3x + a$.**

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & 3 & a \\ 1 & & 2 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & \boxed{a+4} \end{array} \rightarrow a + 4 = 0 \rightarrow a = -4$$

022 **¿Son correctos los cálculos?**

$$\begin{array}{r|rrrr} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \boxed{\mathbf{0}} \end{array}$$

Así, tenemos que:

$$\mathbf{2x^3 + 2x^2 + 3x + 3 = (x - 1) \cdot (2x + 3)}$$

Los cálculos no son correctos.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & & -2 & 0 & -3 \\ \hline & 2 & 0 & 3 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow 2x^3 + 2x^2 + 3x + 3 = (x+1) \cdot (2x^2 + 3)$$

023 **Descompón en factores estos polinomios.**

a) $P(x) = x^3 - 8$

b) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

d) $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 12x$

e) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 25x - 21$

f) $P(x) = x^5 - 9x^3$

a) $P(x) = x^3 - 8 = (x^2 + 2x + 4) \cdot (x - 2)$

b) $P(x) = x \cdot (x^2 + 4x + 4) = x \cdot (x + 2)^2$

c) $P(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^2$

d) $P(x) = x \cdot (x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 23x + 4) = x \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 4)$

e) $P(x) = (x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 7)$

f) $P(x) = x^3 \cdot (x^2 - 9) = x^3 \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

024 **Factoriza los siguientes polinomios y explica cómo lo haces.**

a) $x^3 - 1$ **b)** $x^5 - 1$ **c)** $x^6 - 1$

a)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow x^3 - 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

b)
$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow x^5 - 1 = (x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

c) $x^6 - 1 = (x^3 - 1)\cdot(x^3 + 1)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow x^3 - 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow x^3 + 1 = (x+1)\cdot(x^2-x+1)$$

$x^6 - 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x+1)\cdot(x^2-x+1)$

025 **Razona si son ciertas estas igualdades.**

a) $x^3 + 9 = x\cdot(x+3)\cdot(x+3)$

b) $x^2\cdot(x^2+1) = [x\cdot(x+1)]^2$

a) Es falsa, porque $x\cdot(x+3)\cdot(x+3) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

b) Es falsa, porque $[x\cdot(x+1)]^2 = x^2\cdot(x^2+2x+1)$.

026 **Simplifica estas fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{2x-2}{2x-6}$ **c)** $\dfrac{x-1}{x^2-1}$ **e)** $\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-5x+4}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$ **d)** $\dfrac{2x^3+4x^2+2x}{6x^3-6x}$ **f)** $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

a) $\dfrac{2x-2}{2x-6} = \dfrac{2\cdot(x-1)}{2\cdot(x-3)} = \dfrac{x-1}{x-3}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3} = \dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-3)} = \dfrac{x+1}{x-3}$

c) $\dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \dfrac{1}{x+1}$

d) $\dfrac{2x^3+4x^2+2x}{6x^3-6x} = \dfrac{2x\cdot(x+1)^2}{6x\cdot(x+1)\cdot(x-1)} = \dfrac{x+1}{3\cdot(x-1)}$

e) $\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-5x+4} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+2)^2}{(x-4)\cdot(x-1)} = \dfrac{(x+2)^2}{x-4}$

f) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x+1}{x-1}$

027 **Encuentra dos fracciones equivalentes y explica cómo lo haces.**

a) $\dfrac{2x}{3x^2 - x}$ **b)** $\dfrac{x^4 - 1}{x^3 - x}$

Multiplicamos o dividimos el numerador y el denominador por el mismo factor.

a) $\dfrac{2x}{3x^2 - x} = \dfrac{2}{3x - 1} = \dfrac{6x^2}{9x^3 - 3x^2}$

b) $\dfrac{x^4 - 1}{x^3 - x} = \dfrac{x^2 + 1}{x} = \dfrac{x^5 - x}{x^4 - x^2}$

028 **Pon dos ejemplos de fracciones que tengan polinomios, pero que no sean algebraicas.**

Dos fracciones con polinomios no son algebraicas cuando el denominador es cero o es de grado cero.

$$\frac{3x + 1}{(x^2 - 1) - (x + 1) \cdot (x - 1)}$$

$$\frac{7x^5}{x \cdot (x + 1) - x^2 - x - 3}$$

029 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\dfrac{x - 2}{x + 2} + \dfrac{2x}{x - 2}$ **c)** $\dfrac{x}{x^2 + 2} \cdot \dfrac{3x^2}{x - 1}$

b) $\dfrac{2x + 1}{x + 1} - \dfrac{x + 1}{x}$ **d)** $\dfrac{x - 1}{x^2 - x - 2} : \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x}$

a) $\dfrac{x - 2}{x + 2} + \dfrac{2x}{x - 2} = \dfrac{(x - 2) \cdot (x - 2) + 2x \cdot (x + 2)}{(x + 2) \cdot (x - 2)} =$

$= \dfrac{x^2 - 4x + 4 + 2x^2 + 4x}{x^2 - 4} = \dfrac{3x^2 + 4}{x^2 - 4}$

b) $\dfrac{2x + 1}{x + 1} - \dfrac{x + 1}{x} = \dfrac{x \cdot (2x + 1) - (x + 1) \cdot (x + 1)}{x \cdot (x + 1)} =$

$= \dfrac{2x^2 + x - x^2 - 2x - 1}{x^2 + x} = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + x}$

c) $\dfrac{x}{x^2 + 2} \cdot \dfrac{3x^2}{x - 1} = \dfrac{x \cdot 3x^2}{(x^2 + 2) \cdot (x - 1)} = \dfrac{3x^3}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$

d) $\dfrac{x - 1}{x^2 - x - 2} : \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x} = \dfrac{(x - 1) \cdot (x^2 - 2x)}{(x^2 - x - 2) \cdot (x + 1)} =$

$= \dfrac{(x - 1) \cdot x \cdot \cancel{(x - 2)}}{(x + 1) \cdot \cancel{(x - 2)} \cdot (x + 1)} = \dfrac{(x - 1) \cdot x}{(x + 1)^2}$

030 **Opera y simplifica.**

a) $\left(x + \frac{x}{3} + \frac{2x-5}{x}\right) \cdot \frac{x}{x+1}$

b) $\left(\frac{1}{x^2+3x} - \frac{5x}{x^2-9}\right) : \frac{2}{x^2+6x+9}$

a) $\left(\frac{3x^2}{3x} + \frac{x^2}{3x} + \frac{6x-15}{3x}\right) \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{4x^2+6x-15}{3x} \cdot \frac{x}{x+1} =$

$= \frac{(4x^2+6x-15) \cdot x}{3x \cdot (x+1)} = \frac{4x^2+6x-15}{3 \cdot (x+1)}$

b) $\left(\frac{1}{x \cdot (x+3)} - \frac{5x}{(x+3) \cdot (x-3)}\right) : \frac{2}{(x+3)^2} =$

$= \frac{(x-3)-5x^2}{x \cdot (x+3) \cdot (x-3)} : \frac{2}{(x+3)^2} = \frac{[(x-3)-5x^2] \cdot (x+3)^2}{2x \cdot (x+3) \cdot (x-3)} =$

$= \frac{(-5x^2+x-3) \cdot (x+3)}{2x \cdot (x-3)}$

031 **¿Por qué fracción algebraica hay que multiplicar $\frac{x^2-7}{x+2}$ para que dé $\frac{-x^3+7x}{x^2+4x+4}$?**

$$\frac{-x^3+7x}{x^2+4x+4} = \frac{-x \cdot (x^2-7)}{(x+2)^2} = \frac{x^2-7}{x+2} \cdot \frac{-x}{x+2}$$

Hay que multiplicar por $\frac{-x}{x+2}$.

ACTIVIDADES

032 **Halla el valor numérico del polinomio $P(x) = -x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 8x - 4$ para:**

a) $x = 0$ **c)** $x = 2$ **e)** $x = -3$

b) $x = -\frac{1}{2}$ **d)** $x = -2$ **f)** $x = 2{,}5$

a) $P(0) = -4$

b) $P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(-\frac{1}{2}\right) - 4 = \frac{-167}{16}$

c) $P(2) = -(2)^4 + 5 \cdot (2)^3 - 7 \cdot (2)^2 + 8 \cdot (2) - 4 = 8$

d) $P(-2) = -(-2)^4 + 5 \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) - 4 = -104$

e) $P(-3) = -(-3)^4 + 5 \cdot (-3)^3 - 7 \cdot (-3)^2 + 8 \cdot (-3) - 4 = -307$

f) $P(2{,}5) = -(2{,}5)^4 + 5 \cdot (2{,}5)^3 - 7 \cdot (2{,}5)^2 + 8 \cdot (2{,}5) - 4 = 11{,}3125$

033 **Razona si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.**

a) $2x = x \cdot x$

b) $-(x^2 + x) = -x^2 - x$

c) $\left(2\sqrt{x}\right)^4 = 4^2x^2$

d) $-\dfrac{2x^2 - 4x}{2} = -x^2 - 2x$

e) $x^2 + x^3 = x^5$

f) $2x^2 \cdot 3x^3 = 5x^5$

g) $-x^2 = x^2$

h) $(x^2)^3 = x^6$

a) Falsa, ya que $2x = x + x$.

b) Verdadera.

c) Verdadera, pues se verifica que $\left(2\sqrt{x}\right)^4 = 16x^2 = 4^2x^2$.

d) Falsa, porque $-\dfrac{2x^2 - 4x}{2} = -(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$.

e) Falsa, ya que en la suma de potencias no se suman los exponentes.

f) Falsa, pues $2x^2 \cdot 3x^3 = 6x^5$.

g) Falsa.

h) Verdadera.

034 **Dados los polinomios:**

$$P(x) = -7x^4 + 6x^2 + 6x + 5$$
$$Q(x) = 3x^5 - 2x^2 + 2$$
$$R(x) = -x^5 + x^3 + 3x^2$$

calcula.

a) $P(x) + Q(x) + R(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

d) $[P(x) - Q(x)] \cdot R(x)$

e) $[P(x) - R(x)] \cdot Q(x)$

a) $P(x) + Q(x) + R(x) = 2x^5 - 7x^4 + x^3 + 7x^2 + 6x + 7$

b) $P(x) - Q(x) = -3x^5 - 7x^4 + 8x^2 + 6x + 3$

c) $P(x) \cdot Q(x) =$
$= -21x^9 + 18x^7 + 32x^6 + 15x^5 - 26x^4 - 12x^3 + 2x^2 + 12x + 10$

d) $[P(x) - Q(x)] \cdot R(x) = (-3x^5 - 7x^4 + 8x^2 + 6x + 3) \cdot (-x^5 + x^3 + 3x^2) =$
$= 3x^{10} + 7x^9 - 3x^8 - 24x^7 - 27x^6 + 5x^5 + 30x^4 + 21x^3 + 9x^2$

e) $[P(x) - R(x)] \cdot Q(x) = (x^5 - 7x^4 - x^3 + 3x^2 + 6x + 5) \cdot (3x^5 - 2x^2 + 2) =$
$= 3x^{10} - 21x^9 - 3x^8 + 7x^7 + 32x^6 + 19x^5 - 20x^4 - 14x^3 - 4x^2 + 12x + 10$

035 Opera y agrupa los términos de igual grado.

a) $\frac{3}{5}x^4 - 2x^3 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2$

b) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{6}x$

c) $\sqrt{45}\,x^3 - \sqrt{80}\,x^3 + \sqrt{5}\,x$

d) $\sqrt{28}\,x - \frac{\sqrt{7}}{7}$

a) $\frac{3}{5}x^4 - 2x^3 + x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2 = \left(\frac{3}{5} + 1\right)x^4 + \left(-2 - \frac{1}{3}\right)x^3 + 2 =$
$= \frac{8}{5}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 2$

b) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{6}x = \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right)x^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)x = -\frac{17}{15}x^2 + \frac{1}{2}x$

c) $\sqrt{45}\,x^3 - \sqrt{80}\,x^3 + \sqrt{5}\,x = \left(\sqrt{45} - \sqrt{80}\right)x^3 + \sqrt{5}\,x =$
$= \left(3\sqrt{5} - 4\sqrt{5}\right)x^3 + \sqrt{5}\,x = \sqrt{5} \cdot (-x^3 + x)$

d) $\sqrt{28}\,x - \frac{\sqrt{7}}{7} = 2\sqrt{7}\,x - \frac{\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7} \cdot \left(2x - \frac{1}{7}\right)$

036 Realiza las operaciones que se indican con los siguientes polinomios.

$P(x) = 2x^3 + 6$
$Q(x) = x^2 - 2x + 3$
$R(x) = -2x^5 + x^2 - 1$

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

b) $P(x) - [Q(x) - R(x)]$

c) $-[P(x) - [Q(x) + R(x)]]$

a) $P(x) + Q(x) - R(x) = 2x^5 + 2x^3 - 2x + 10$

b) $P(x) - [Q(x) - R(x)] = (2x^3 + 6) - (2x^5 - 2x + 4) =$
$= 2 \cdot (-x^5 + x^3 + x + 1)$

c) $-[P(x) - [Q(x) + R(x)]] = -[(2x^3 + 6) - (-2x^5 + 2x^2 - 2x + 2)] =$
$= -2x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 4$

037 Calcula.

a) $(4x^3 - 7x^3) - (6x^3 + 7x^3)$

b) $(4x + 5x) \cdot (2x - 7x)$

c) $(6x^5 - 4x^5) : (8x^5 + 3x^5 - 9x^5)$

d) $7x^3 \cdot (2x^2 \cdot 5x \cdot 3)$

e) $(5x^6 : x^2) - (3x \cdot 2 \cdot x^3) + x^4$

f) $(10x^{10} \cdot x^3) : (5x - 3x)$

a) $(4x^3 - 7x^3) - (6x^3 + 7x^3) = -3x^3 - 13x^3 = -16x^3$

b) $(4x + 5x) \cdot (2x - 7x) = 9x \cdot (-5x) = -45x^2$

c) $(6x^5 - 4x^5) : (8x^5 + 3x^5 - 9x^5) = 2x^5 : 2x^5 = 1$

d) $7x^3 \cdot (2x^2 \cdot 5x \cdot 3) = 7x^3 \cdot 30x^3 = 210x^6$

e) $(5x^6 : x^2) - (3x \cdot 2 \cdot x^3) + x^4 = 5x^4 - 6x^4 + x^4 = 0$

f) $(10x^{10} \cdot x^3) : (5x - 3x) = 10x^{13} : 2x = 5x^{12}$

038 **Determina el valor de *a*, *b*, *c* y *d* para que los polinomios *P*(*x*) y *Q*(*x*) sean iguales.**

$$P(x) = x^3 - (a+2)\cdot x + 2 - (9+c)\cdot x^2$$

$$Q(x) = b + 5x - 2x^2 + \left(d + \frac{1}{4}\right)\cdot x^3 + 10x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = x^3 - (9+c)x^2 - (a+2)x + 2 \\ Q(x) = \left(d + \frac{1}{4}\right)x^3 + 8x^2 + 3x + b + \frac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} d + \frac{1}{4} = 1 \longrightarrow d = \frac{3}{4} \\ -(9+c) = 8 \rightarrow c = -17 \\ -(a+2) = 3 \rightarrow a = -5 \\ b + \frac{1}{2} = 2 \longrightarrow b = \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

039 **Efectúa estas operaciones.**

a) $(x^2 - 3x + 5)\cdot x^2 - x$

b) $(x^2 - x + 3)\cdot x^2 - 2x + (x-4)\cdot(x+5)$

c) $[(1 - x - x^2)\cdot(-1) - 3x)]\cdot(8x+7)$

d) $\left[\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - 3\right)\cdot\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{5}\right) - \frac{1}{4}\right]\cdot x - 1$

e) $[x^2 + 1 - 6x\cdot(x-4)]\cdot x - x\cdot(5x-10)$

a) $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x$

b) $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + x^2 + x - 20 = x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 20$

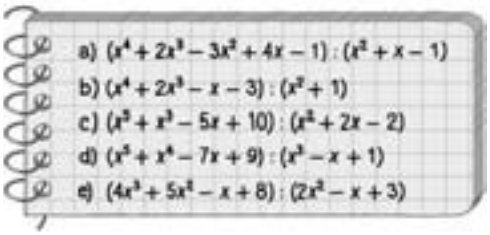
c) $(x^2 - 2x - 1)\cdot(8x - 7) = 8x^3 - 23x^2 + 6x + 7$

d) $\left(\frac{x^2 + 2x - 12}{4}\cdot\frac{5x-6}{10} - \frac{1}{4}\right)\cdot x - 1 =$

$= \left(\frac{5x^3 + 4x^2 - 72x + 62}{40}\right)\cdot x - 1 = \frac{5x^4 + 4x^3 - 72x^2 + 62x - 40}{40}$

e) $(-5x^2 + 24x + 1)\cdot x - 5x^2 + 10x = -5x^3 + 24x^2 + x - 5x^2 + 10x =$
$= -5x^3 + 19x^2 + 11x$

040 **Realiza las siguientes divisiones.**


a) $(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) : (x^2 + x - 1)$
b) $(x^4 + 2x^3 - x - 3) : (x^2 + 1)$
c) $(x^5 + x^3 - 5x + 10) : (x^2 + 2x - 2)$
d) $(x^5 + x^4 - 7x + 9) : (x^3 - x + 1)$
e) $(4x^3 + 5x^2 - x + 8) : (2x^2 - x + 3)$

a) Cociente: $x^2 + x + 5$
Resto: $-2x - 6$

b) Cociente: $x^2 + 2x - 1$
Resto: $-3x - 2$

c) Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 35$
Resto: $83x - 60$

d) Cociente: $x^2 + x + 1$
Resto: $-7x + 8$

e) Cociente: $2x + \frac{7}{2}$
Resto: $-\frac{7}{2}x - \frac{5}{2}$

041 ●●

Halla el polinomio $Q(x)$ por el que hay que dividir a $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + x - 2$, para que el cociente sea $C(x) = x^2 + x - 3$ y el resto sea $R(x) = -6x + 1$.

$$Q(x) = [P(x) - R(x)] : C(x) = (x^4 - x^3 - 4x^2 + 7x - 3) : (x^2 + x - 3) =$$
$$= x^2 - 2x + 1$$

042 ●●●

Si en una división de polinomios el grado del dividendo es 6 y el del divisor es 3, ¿cuál es el grado del cociente y del resto? Razona la respuesta.

El grado del cociente es la diferencia que hay entre el grado del dividendo y el grado del divisor, y el grado del resto es siempre menor que el grado del divisor.

Cociente: grado 3

Resto: grado menor que 3

043 ●

Realiza, aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^5 - x^3 + x^2 - x^4 + 3x - 7) : (x - 2)$

b) $(x^4 + 2x^2 - x - 3) : (x + 1)$

c) $(2x^4 - x^3 - x^2 + x + 3) : (x - 3)$

d) $(x^3 - 8x + x^2 - 7) : (x + 2)$

e) $(x^3 - 4x^2 + 6x - 9) : (x + 4)$

a)

	1	−1	−1	1	3	−7
2		2	2	2	6	18
	1	1	1	3	9	11

→ Cociente: $x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 9$
Resto: 11

b)

	1	0	2	−1	−3
−1		−1	1	−3	4
	1	−1	3	−4	1

→ Cociente: $x^3 - x^2 + 3x - 4$
Resto: 1

c)

	2	−1	−1	1	3
3		6	15	42	129
	2	5	14	43	132

→ Cociente: $2x^3 + 5x^2 + 14x + 43$
Resto: 132

d)

	1	1	−8	−7
−2		−2	2	12
	1	−1	−6	5

→ Cociente: $x^2 - x - 6$
Resto: 5

e)

	1	−4	6	−9
−4		−4	32	−152
	1	−8	38	−161

→ Cociente: $x^2 - 8x + 38$
Resto: −161

044 **Completa estas divisiones y escribe los polinomios dividendo, divisor, cociente y resto.**

a)

	3	**4**	**0**	**1**
−1		−3	−1	1
	3	1	−1	2

Dividendo: $3x^3 + 4x^2 + 1$
Divisor: $x + 1$
Cociente: $3x^2 + x - 1$
Resto: 2

c)

	1	**0**	**−1**	**2**
2		2	4	6
	1	**2**	3	8

Dividendo: $x^3 - x + 2$
Divisor: $x - 2$
Cociente: $x^2 + 2x + 3$
Resto: 8

b)

	4	**3**	**2**	**1**
−1		−4	1	−3
	4	**−1**	3	−2

Dividendo: $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
Divisor: $x + 1$
Cociente: $4x^2 - x + 3$
Resto: -2

d)

	−2	**0**	**0**	**−3**
−4		8	−32	128
	−2	**8**	−32	125

Dividendo: $-2x^3 - 3$
Divisor: $x + 4$
Cociente: $-2x^2 + 8x - 32$
Resto: 125

045 **Halla el valor de *m* para que las divisiones sean exactas.**

a) $(x^2 - 12x + m) : (x + 4)$
b) $(x^3 + 2x^2 + 8x + m) : (x - 2)$
c) $(x^3 - x^2 + 2mx - 12) : (x - 6)$
d) $(x^3 - 2 \cdot (m + 1) \cdot x^2 + m) : (x + 1)$
e) $(x^3 + mx^2 + 2x - 10) : (x - 5)$

a)

	1	−12	m
−4		−4	64
	1	−16	$m + 64$

$\longrightarrow$ $m + 64 = 0$
$\rightarrow$ $m = -64$

b)

	1	2	8	m
2		2	8	32
	1	4	16	$m + 32$

$\longrightarrow$ $m + 32 = 0$
$\rightarrow$ $m = -32$

c)

	1	−1	$2m$	-12
6		6	30	$12m + 180$
	1	5	$2m + 30$	$12m + 168$

$\longrightarrow$ $12m + 168 = 0$
$\rightarrow$ $m = -14$

d)

	1	$-2(m+1)$	0	m
−1		−1	$2m + 3$	$-2m - 3$
	1	$-2m - 3$	$2m + 3$	$-m - 3$

$\longrightarrow$ $-m - 3 = 0 \rightarrow m = -3$

e)

	1	m	2	-10
5		5	$5m + 25$	$25m + 135$
	1	$m + 5$	$5m + 27$	$25m + 125$

$\rightarrow$ $25m + 125 = 0$
$\rightarrow$ $m = -\dfrac{125}{25} = -5$

046 **Obtén el valor de m para que las divisiones tengan el resto indicado.**

a) $(x^5 + 6x^3 + mx + 17) : (x + 1) \rightarrow$ Resto 2

b) $(2mx^3 - 3mx^2 + 8m) : (x - 2) \longrightarrow$ Resto -4

a)

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 6 & 0 & m & 17 \\ -1 & & -1 & 1 & -7 & 7 & -m-7 \\ \hline & 1 & -1 & 7 & -7 & m+7 & \boxed{-m+10} \end{array} \rightarrow -m + 10 = 2 \rightarrow m = 8$$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2m & -3m & 0 & 8m \\ 2 & & 4m & 2m & 4m \\ \hline & 2m & m & 2m & \boxed{12m} \end{array} \rightarrow 12m = -4 \rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

047 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE APLICA LA REGLA DE RUFFINI CUANDO EL DIVISOR ES DEL TIPO $(ax - b)$?

Efectúa esta división por la regla de Ruffini.

$$(x^2 + 2x - 3) : (2x - 6)$$

PRIMERO. Se divide el polinomio divisor, $ax - b$, entre a.

$$(x^2 + 2x - 3) : (2x - 6) \xrightarrow{(2x-6):2} (x^2 + 2x - 3) : (x - 3)$$

SEGUNDO. Se aplica la regla de Ruffini con el nuevo divisor.

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ 3 & & 3 & 15 \\ \hline & 1 & 5 & \boxed{12} \end{array} \rightarrow C(x) = x + 5$$

TERCERO. El cociente de la división inicial será el cociente de esta división dividido entre el número por el que se ha dividido el divisor inicial.

$$\text{Cociente: } x - 5 \xrightarrow{:2} \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

El resto no varía. Resto: 12.

048 **Calcula, utilizando la regla de Ruffini, las siguientes divisiones.**

a) $(x^5 + 1) : (2x + 4)$ **b) $(x^4 - 5x^2 + 2) : (5x - 10)$**

a) $(x^5 + 1) : (2x + 4) \xrightarrow{(2x+4):2} (x^5 + 1) : (x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & \boxed{-31} \end{array}$$

Cociente: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \xrightarrow{:2} \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 8$

Resto: -31

b) $(x^4 - 5x^2 + 2) : (5x - 10) \xrightarrow{(5x-10):5} (x^4 - 5x^2 + 2) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -2 & \boxed{-2} \end{array}$$

Cociente: $x^3 + 2x^2 - x - 2 \xrightarrow{:5} \frac{1}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$

Resto: -2

049 **Utiliza el teorema del resto para calcular estos valores numéricos.**

a) $P(x) = x^2 + 2x - 7$, **para** $x = 1$

b) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 6x + 7$, **para** $x = -2$

c) $P(x) = x^4 - 2$, **para** $x = -1$

d) $P(x) = x^4 - 4x + x^2 - 13$, **para** $x = 3$

a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -7 \\ 1 & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{-4} \end{array} \longrightarrow P(1) = -4$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & -6 & 7 \\ -2 & & -2 & -6 & 24 \\ \hline & 1 & 3 & -12 & \boxed{31} \end{array} \longrightarrow P(-2) = 31$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & \boxed{-1} \end{array} \rightarrow P(-1) = -1$$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 1 & -4 & -13 \\ 3 & & 3 & 9 & 30 & 78 \\ \hline & 1 & 3 & 10 & 26 & \boxed{65} \end{array} \longrightarrow P(3) = 65$$

050 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA EL RESTO DE LAS DIVISIONES CON DIVISOR $(x - a)$?

Calcula, sin realizar la división, el resto de:

$$(2x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x - 2)$$

PRIMERO. Se calcula el valor numérico del dividendo cuando x toma el valor del término independiente del divisor, cambiado de signo.

$$P(2) = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 1 = 32 - 12 + 2 - 1 = 21$$

SEGUNDO. Según el teorema del resto, este es el resto de la división.

El resto que obtenemos al efectuar la división es $R = 21$.

051 **Calcula el resto sin hacer las divisiones.**

a) $(x^6 - x^5 + x^4 - 3x^2 + x - 2) : (x - 2)$

b) $(x^4 - x^3 + 6x + 3) : (x + 1)$

c) $(2x^3 - x^2 + 7x - 9) : (x - 3)$

d) $(5x^4 + 7x^3 - 4x + 2) : (x + 2)$

a) $P(2) = 2^6 - 2^5 + 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 36 \longrightarrow$ Resto: 36

b) $P(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 + 6 \cdot (-1) + 3 = -1 \longrightarrow$ Resto: -1

c) $P(3) = 2 \cdot 3^3 - 3^2 + 7 \cdot 3 - 9 = 57 \longrightarrow$ Resto: 57

d) $P(-2) = 5 \cdot (-2)^4 + 7 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) + 2 = 34 \rightarrow$ Resto: 34

052 **Halla el resto de esta división.**

$$(x^{200} + 1) : (x + 1)$$

$P(-1) = (-1)^{200} + 1 = 2 \rightarrow$ Resto: 2

053 **Responde razonadamente si es verdadero o falso.**

a) Si $P(-2) = 0$, entonces $P(2) = 0$.

b) Si el resto de $P(x) : (x + 2)$ es 3, resulta que $P(3) = 0$.

a) Falso, por ejemplo, en $P(x) = x + 2$, $P(-2) = 0$ y $P(2) = 4$.

b) Falso. Al ser el resto 3, sabemos que $P(-2) = 3$, pero no nos aporta más información.

054 **Comprueba si $x = 3$ y $x = 2$ son raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.**

Como $P(3) = 60$, $x = 3$ no es raíz.

Como $P(2) = 0$, $x = 2$ es raíz del polinomio.

055 **Comprueba que una raíz de $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ es $x = 1$.**

Como $P(1) = 0$, $x = 1$ es raíz del polinomio.

056 **Calcula las raíces de estos polinomios.**

a) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

b) $x^3 - 2x^2 - 3x$

c) $x^4 - x^2 - x + 1$

d) $x^3 + x^2 - 9x - 9$

e) $x^2 - x - 2$

f) $x^2 + x$

g) $4x^2 - 2x$

h) $x^2 - 4x + 4$

a) Raíces: $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$

b) Raíces: $x = 0$, $x = -1$, $x = 3$

c) Raíz: $x = 1$

d) Raíces: $x = -1$, $x = -3$, $x = 3$

e) Raíces: $x = -1$, $x = 2$

f) Raíces: $x = -1$, $x = 0$

g) Raíces: $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$

h) Raíz doble: $x = 2$

057 **Observando el dividendo y el divisor, señala cuáles de estas divisiones no son exactas.**

a) $(x^3 - 3x^2 + 7x - 8) : (x + 2)$

b) $(x^2 + 4x - 5) : (x - 7)$

c) $(x^4 - 9) : (x - 5)$

d) $(x^3 + 16x^2 + 19x + 21) : (x + 4)$

¿Puedes asegurar que las otras divisiones son exactas?

No son exactas las divisiones de los apartados b), c) y d).

Sin hacer más operaciones no es posible asegurar si la división del apartado a) es exacta o no.

058 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULA UN POLINOMIO, CONOCIDAS SUS RAÍCES Y EL COEFICIENTE DEL TÉRMINO DE MAYOR GRADO?

Escribe el polinomio cuyas raíces son 1, 1, 2 y -3, y el coeficiente del término de mayor grado es 5.

PRIMERO. Los divisores del polinomio buscado serán de la forma $(x - a)$, donde a es cada una de las raíces.

Los divisores del polinomio serán:

$$(x - 1),\ (x - 2) \text{ y } (x + 3)$$

SEGUNDO. Se efectúa el producto de los monomios, multiplicando cada uno tantas veces como aparece la raíz.

$$(x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$

TERCERO. Se multiplica por el coeficiente del término de mayor grado.

$$P(x) = 5 \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$$
$$P(x) = 5x^4 - 5x^3 - 35x^2 + 65x - 30$$

059 ●●

¿Qué polinomios tienen estas raíces y coeficientes de mayor grado?

a) $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$ y coeficiente -4.

b) $x = 2$ (raíz doble) y coeficiente 2.

c) $x = -2$, $x = -3$ y coeficiente -1.

a) $P(x) = -4 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) = -4x^3 + 8x^2 + 20x - 24$

b) $P(x) = 2 \cdot (x - 2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$

c) $P(x) = -1 \cdot (x + 2) \cdot (x + 3) = -x^2 - 5x - 6$

060 ●

Efectúa.

a) $(3x + 4)^2$ **b) $\left(4x - \frac{2}{3}\right)^2$** **c) $(2x - 3)^3$** **d) $(x^2 - 2x)^3$**

a) $9x^2 + 24x + 16$

b) $16x^2 + \frac{16}{3}x + \frac{4}{9}$

c) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

d) $x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3$

061 ●●

Desarrolla las siguientes potencias.

a) $(x^2 + x + 2)^2$ **b) $(2x^2 - 3x - 1)^2$** **c) $(3x^2 + x - 2)^3$** **d) $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{5} + 1\right)^3$**

a) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$

b) $4x^4 - 12x^3 + 5x^2 + 6x + 1$

c) $27x^6 + 27x^5 - 45x^4 - 35x^3 + 30x^2 + 12x - 8$

d) $\frac{x^6}{27} - \frac{x^3}{125} + 1 - \frac{x^5}{15} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{25} + \frac{3x^2}{25} + x^2 - \frac{3x}{5} + \frac{2x^3}{5} =$

$$= \frac{x^6}{27} - \frac{x^5}{15} + \frac{28x^4}{75} + \frac{51x^3}{125} + \frac{28x^2}{25} - \frac{3x}{5} + 1$$

062 ●●

Efectúa y reduce términos semejantes.

a) $(x+2)^4+(x-2)^2$

b) $(2x-3)^3-(x^2+4)^2$

c) $(5x-6)^2+(x-1)^3$

d) $(3x+5)^3-(4x-2)^3$

a) $(x^4+8x^3+24x^2+32x+16)+(x^2-4x+4)=x^4+8x^3+25x^2+28x+20$

b) $(8x^3-36x^2+54x-27)-(x^4+8x^2+16)=-x^4+8x^3-44x^2+5x-43$

c) $25x^2-60x+36+x^3-3x^2+3x-1=x^3+22x^2-57x+35$

d) $(27x^3+135x^2+225x+27)-(64x^3-96x^2+48x-8)=$
$=-37x^3+231x^2+177x+35$

063 ●●

Indica si las igualdades son verdaderas o falsas. Razona la respuesta.

a) $(6x+5)^4-(6x+5)^2=(6x+5)^2\cdot(6x+5)^2-1$

b) $(3x+4)^4-(3x+4)^3=(3x+4)^3\cdot(3x+3)$

c) $(2x-3)^2-(4x+2)^2=(6x-1)\cdot(-2x-5)$

d) $(4x-2)^3=8\cdot(2x-1)^3$

e) $(8x^2+4x)^2=4x^2\cdot(2x+1)^2$

a) $(6x+5)^2[(6x+5)^2-1]\neq(6x+5)^2\cdot(6x+5)^2-1 \rightarrow$ Falsa

b) $(3x+4)^3[(3x+4)-1]=(3x+4)^3\cdot(3x+3) \rightarrow$ Verdadera

c) $4x^2-12x+9-16x^2-16x-4=-12x^2-30x+2x+5 \rightarrow$ Verdadera

d) $(4x-2)^3=2^3(2x-1)^3 \rightarrow$ Verdadera

e) $(4x)^2(2x+1)^2\neq 4x^2(2x+1)^2 \rightarrow$ Falsa

064 ●●

Señala cuáles de los siguientes polinomios son el cuadrado de un binomio, e indícalo.

a) $25x^2-70x+49$

b) $x^4-6x^3+9x^2$

c) x^6+4x^3+4

d) x^6-4x^3+4

e) $4x^4-16x^2-16$

f) $9x^4+12x^3+4$

a) $(5x-7)^2$

b) $(x^2-3x)^2$

c) $(x^3+2)^2$

d) $(x^3-2)^2$

e) No es el cuadrado de un binomio.

f) No es el cuadrado de un binomio.

065 ●●

Añade los términos necesarios a cada polinomio para que sea el cuadrado de un binomio.

a) $25x^2+4$

b) $49x^2+36$

c) x^4+10x^3

d) x^6-4x^3

e) $9x^4-24x^3$

f) x^8+x^2

a) $25x^2\pm 20x+4$

b) $49x^2\pm 84x+36$

c) $x^4+10x^3+25x^2$

d) $x^6-4x^3+4x^2$

e) $9x^4-24x^3+16x^2$

f) $x^8+2x^5+x^2$

066 **Descompón en factores los siguientes polinomios, sacando factor común.**

a) $8x^3 - 4x$
b) $18x^3 + 14x^2$
c) $9x^2 + 12x$
d) $x^6 - 4x^3$
e) $x^3 + 7x^2$
f) $x^4 - x^3$

a) $4x \cdot (2x^2 - 1)$
b) $2x^2 \cdot (9x + 7)$
c) $3x \cdot (3x + 4)$
d) $x^3 \cdot (x^3 - 4)$
e) $x^2 \cdot (x + 7)$
f) $x^3 \cdot (x - 1)$

067 **Factoriza estos polinomios, aplicando las igualdades notables.**

a) $x^2 + 2x + 1$
b) $x^2 + 10x + 25$
c) $4x^4 - 16x^2 + 16$
d) $x^2 - 4$
e) $4x^2 - 16$
f) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

a) $(x + 1)^2$
b) $(x + 5)^2$
c) $(2x^2 - 4)^2$
d) $(x + 2) \cdot (x - 2)$
e) $(2x + 4) \cdot (2x - 4)$
f) $(x - 3)^3$

068 **Factoriza los siguientes polinomios.**

a) $x^2 + 5x + 6$
b) $x^2 + x - 12$
c) $x^2 + 11x + 24$
d) $x^2 + 2x - 24$
e) $x^3 - 13x + 12$
f) $x^3 - 5x^2 - x + 5$
g) $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$
h) $x^3 + 8x^2 - 32x - 60$

a) $(x + 3) \cdot (x + 2)$
b) $(x - 3) \cdot (x + 4)$
c) $(x + 3) \cdot (x + 8)$
d) $(x + 6) \cdot (x - 4)$
e) $(x - 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 4)$
f) $(x - 5) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$
g) $(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$
h) No es posible

069 **Descompón factorialmente.**

a) $x^3 + x^2 - 6$
b) $x^4 - x^2$
c) $2x^2 - 3x^3$
d) $3x^2 + 12x + 12$
e) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x$
f) $x^5 - x^4 - 19x^3 + 4x^2$
g) $18x^3 + 48x^2 + 32x$
h) $48x^2 + 24x + 3$

a) No es posible
b) $x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$
c) $x^2 \cdot (2 - 3x)$
d) $3 \cdot (x + 2)^2$
e) $x \cdot (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$
f) $x^2 \cdot (x + 4) \cdot (x^2 - 5x + 1)$
g) $2x \cdot (3x + 4)^2$
h) $3 \cdot (4x + 1)^2$

070 **Escribe como producto de factores.**

a) $7x^3 + 7x^2 + \frac{7}{4}x$

b) $x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{25}x^2$

c) $(2x + 1)^2 - (4x - 3)^2$

d) $(x - 2)^2 - 16x^4$

a) $7x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

b) $x^2 \cdot \left(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25}\right) = x^2 \cdot \left(x + \frac{1}{5}\right)^2$

c) $[(2x + 1) + (4x - 3)] \cdot [(2x + 1) - (4x - 3)] = (6x - 2) \cdot (-2x + 4) =$
$= 4 \cdot (3x - 1) \cdot (-x + 2)$

d) $[(x - 2) + 4] \cdot [(x - 2) - 4] = (x + 2) \cdot (x - 6)$

071 **Escribe tres polinomios de grado 2 y otros tres de grado 3, que sean divisores de:**

a) $P(x) = x^4 + x^3 - 30x^2$

b) $P(x) = x^4 - 6x^3 - 7x^2$

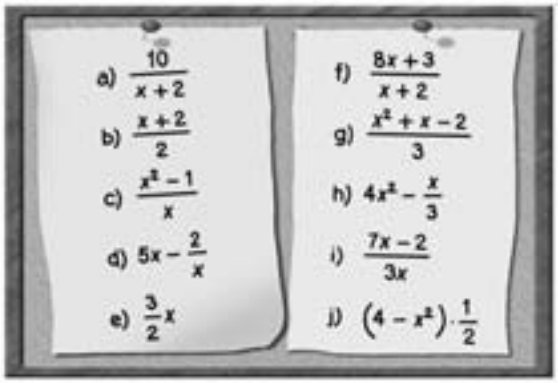
a) $P(x) = x^2(x + 6)(x - 5)$

Grado 2:	Grado 3:
x^2	$x^3 + 6x^2$
$x^2 + 6x$	$x^3 - 5x^2$
$x^2 - 5x$	$x^3 + x^2 - 30x$

b) $P(x) = x^2(x + 1)(x - 7)$

Grado 2:	Grado 3:
x^2	$x^3 + x^2$
$x^2 + x$	$x^3 - 7x^2$
$x^2 - 7x$	$x^3 - 6x^2 - x$

072 **Indica cuáles de las siguientes expresiones son fracciones algebraicas.**



Son fracciones algebraicas las expresiones de: a), c), d), f) e i).

073 **Escribe tres fracciones algebraicas equivalentes a:**

a) $\dfrac{x}{x-2}$ c) $\dfrac{1}{x}$ e) $\dfrac{x^2+1}{x}$

b) $\dfrac{x}{x^2+10}$ d) $\dfrac{x+3}{x-5}$ f) $\dfrac{x-6}{x^3}$

a) $\dfrac{x}{x-2} = \dfrac{x^2}{x^2-2x} = \dfrac{x^2-2x}{(x-2)^2} = \dfrac{x^4}{x^4-2x^3}$

b) $\dfrac{x}{x^2+10} = \dfrac{x^2}{x^3+10x} = \dfrac{x\cdot(x+1)}{(x^2+10)\cdot(x+1)} = \dfrac{x\cdot(x+2)^2}{(x^2+10)\cdot(x+2)^2}$

c) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{x+1}{x^2+x} = \dfrac{x-2}{x^2+2x}$

d) $\dfrac{x+3}{x-5} = \dfrac{x^2+3x}{x^2-5x} = \dfrac{x^2+6x+9}{x^2-2x+15} = \dfrac{x^2-2x+15}{x^2-50x+25}$

e) $\dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{x^3+x}{x^2} = \dfrac{3x^2+3}{3x} = \dfrac{x^4-1}{x^3-x}$

f) $\dfrac{x-6}{x^3} = \dfrac{x^2-6x}{x^4} = \dfrac{8x-48}{8x^3} = \dfrac{x^2-12x+36}{x^4-6x^3}$

074 **Averigua si los siguientes pares de fracciones algebraicas son equivalentes.**

a) $\dfrac{x+2}{x-3}$ y $\dfrac{x^2+2x}{x^2-3x}$ c) $\dfrac{x-1}{x+4}$ y $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$

b) $\dfrac{x}{x^2-5}$ y $\dfrac{x^2+x}{x^3-5}$ d) $\dfrac{x-3}{x^2}$ y $\dfrac{x^3-3x^2}{x^3+2x^2}$

Solo es equivalente el par de fracciones del apartado a).

075 **Halla el valor de $P(x)$ para que las fracciones sean equivalentes.**

a) $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{P(x)}{x^2-2x}$ c) $\dfrac{P(x)}{x} = \dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$

b) $\dfrac{x+4}{x-3} = \dfrac{x^3+4x^2-x-4}{P(x)}$ d) $\dfrac{x^2-10}{P(x)} = \dfrac{x^3+8x^2-10x-80}{x^2+13x+40}$

a) $P(x) = \dfrac{(x+1)\cdot(x^2-2x)}{x} = (x+1)\cdot(x-2) = x^2-x-2$

b) $P(x) = \dfrac{(x-3)\cdot(x^3+4x^2-x-4)}{x+4} = (x-3)\cdot(x^2-1) =$
$= x^3-3x^2-x+3$

c) $P(x) = \dfrac{x\cdot(x^2-16)}{x^2-4x} = x+4$

d) $P(x) = \dfrac{(x^2-10)\cdot(x^2+13x+40)}{x^3+8x^2-10x-80} = x+5$

076 ¿Cuánto debe valer *a* para que las fracciones algebraicas sean equivalentes?

a) $\dfrac{5x}{2x-6} = \dfrac{5x^2+ax}{2x^2+2x-24}$

b) $\dfrac{3x-2}{x^2+4} = \dfrac{38x^2-2x-35}{x^3-x^2+4x-a}$

c) $\dfrac{x-a}{x+2} = \dfrac{x^2-2x-35}{x^2+7x+10}$

d) $\dfrac{x-8}{x+a} = \dfrac{x^2-10x+16}{x^2+x-6}$

a) $a = 20$

b) Sin solución

c) $a = 7$

d) $a = 3$

077 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{8x^3}{24x^4}$

b) $\dfrac{(2x)^4}{(4x^2)^3}$

c) $\dfrac{-6x^3yz}{18xy^3z}$

d) $\dfrac{(x^2y^4)^{-3}}{(x^4y^3)^{-2}}$

a) $\dfrac{8x^3}{24x^4} = \dfrac{1}{3x}$

b) $\dfrac{(2x)^4}{(4x^2)^3} = \dfrac{1}{4x^2}$

c) $\dfrac{-6x^3yz}{18xy^3z} = \dfrac{-x^2}{3y^2}$

d) $\dfrac{(x^2y^4)^{-3}}{(x^4y^3)^{-2}} = \dfrac{x^2}{y^6}$

078 Simplifica estas fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+2}$

c) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$

d) $\dfrac{x^2-x}{x^3-x^2}$

e) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-6x^2+11x-6}$

f) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

g) $\dfrac{x^4+x^3+x^2}{3x^2+3x+3}$

h) $\dfrac{x^3-12x+16}{x^3-10x^2+32x-32}$

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+2} = \dfrac{x+2}{x-2}$

c) $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$

d) $\dfrac{x^2-x}{x^3-x^2} = \dfrac{1}{x}$

e) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-6x^2+11x-6} = \dfrac{1}{x-2}$

f) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} = \dfrac{x-1}{x+1}$

g) $\dfrac{x^4+x^3+x^2}{3x^2+3x+3} = \dfrac{x^2}{3}$

h) $\dfrac{x^3-12x+16}{x^3-10x^2+32x-32} = \dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-4)^2}$

079 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE REDUCEN FRACCIONES ALGEBRAICAS A COMÚN DENOMINADOR?

Reduce a común denominador estas fracciones algebraicas.

$$\frac{2}{x-2} \qquad \frac{3}{x^2-4} \qquad \frac{4}{x^2+4x+4}$$

PRIMERO. Se factorizan los denominadores.

$$x-2 = x-2$$
$$x^2-4 = (x+2)\cdot(x-2)$$
$$x^2+4x+4 = (x+2)^2$$

SEGUNDO. Se calcula el mínimo común múltiplo, que estará formado por los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

$$\text{m.c.m. } (x-2,\ x^2-4,\ x^2+4x+4) = (x+2)^2\cdot(x-2)$$

TERCERO. Se divide el denominador entre el m.c.m., y el resultado se multiplica por el numerador.

$$\frac{2}{x-2} = \frac{2\cdot(x+2)^2}{(x+2)^2\cdot(x-2)} = \frac{2x^2+8x+8}{(x+2)^2\cdot(x-2)}$$
$$\frac{3}{x^2-4} = \frac{3\cdot(x+2)}{(x+2)^2\cdot(x-2)} = \frac{3x+6}{(x+2)^2\cdot(x-2)}$$
$$\frac{4}{x^2+4x+4} = \frac{4\cdot(x-2)}{(x+2)^2\cdot(x-2)} = \frac{4x-8}{(x+2)^2\cdot(x-2)}$$

Las tres fracciones algebraicas tienen el mismo denominador: $(x+2)^2\cdot(x-2)$.

080 **Calcula el mínimo común múltiplo de estos polinomios.**

a) $2x^2$, $10x^3$ **y** $2x$

b) $3x$, x^2-3 **y** $9-3x$

c) x^2+5x, $x+5$ **y** $x^2+10x+25$

d) x^2+x, x^2-1 **y** $3x+3$

e) x^2-x, x^3-x^2 **y** x^3+x^2

f) x^2+2x+1, x^2-1 **y** x^2-5x+6

a) $10x^3$

b) $x\cdot(x+3)\cdot(x-3)$

c) $x\cdot(x+5)^2$

d) $x\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

e) $x^2\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

f) $(x+1)^2\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

081 **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{5x}{x+1} + \dfrac{4x}{x^2-1}$

b) $\dfrac{-3}{x^2-4} + \dfrac{5+2x}{x^2+x-6}$

c) $\dfrac{x+2}{x+2} + \dfrac{1}{x^2+4x+4}$

a) $\dfrac{5x\cdot(x-1)}{x^2-1} + \dfrac{4x}{x^2-1} = \dfrac{5x^2-x}{x^2-1}$

b) $\dfrac{-3\cdot(x+3)}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)} + \dfrac{(5+2x)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)} =$

$= \dfrac{2x^2+6x+1}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}$

c) $\dfrac{(x+2)^2}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$

082 **Realiza estas operaciones y simplifica.**

a) $\dfrac{2}{x^2+2x+1} - \dfrac{3}{x^2-1} - \dfrac{4}{x^2-2x+1}$

b) $\dfrac{5}{4x} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x-3}{x^2+x} - \dfrac{3}{4}$

c) $\dfrac{x-1}{2x+6} + \dfrac{8}{-3x-9} - \dfrac{1}{3x^2}$

d) $\dfrac{x-2}{6x+6} - \dfrac{x+3}{2x+2} + \dfrac{3-x}{4x+4}$

a) $\dfrac{2\cdot(x-1)^2}{(x+1)^2\cdot(x-1)^2} - \dfrac{3\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)^2\cdot(x-1)^2} - \dfrac{4\cdot(x+1)^2}{(x+1)^2\cdot(x-1)^2} =$

$= \dfrac{-5x^2-12x+1}{(x+1)^2\cdot(x-1)^2}$

b) $\dfrac{5\cdot(x+1)}{4x\cdot(x+1)} + \dfrac{4x}{4x\cdot(x+1)} - \dfrac{4\cdot(2x-3)}{4x\cdot(x+1)} - \dfrac{3x\cdot(x+1)}{4x\cdot(x+1)} =$

$= \dfrac{-3x^2-2x+17}{4x\cdot(x+1)}$

c) $\dfrac{3x^2\cdot(x-1)}{6x^2\cdot(x+3)} - \dfrac{2x^2\cdot 8}{6x^2\cdot(x+3)} - \dfrac{2\cdot(x+3)}{6x^2\cdot(x+3)} = \dfrac{3x^3-13x^2-2x-6}{6x^2\cdot(x+3)}$

d) $\dfrac{2\cdot(x-2)}{12\cdot(x+1)} - \dfrac{3\cdot(x+3)}{12\cdot(x+1)} + \dfrac{3\cdot(3-x)}{12\cdot(x+1)} = \dfrac{-13x-1}{12\cdot(x+1)}$

083 **Efectúa las operaciones.**

a) $\dfrac{9x}{3x-3} \cdot \dfrac{x^2-1}{3x^2}$

b) $\dfrac{2x-6}{x^2-4} \cdot \dfrac{x^2+4x+4}{x^2-6x+9}$

c) $\dfrac{x-3}{x} \cdot \dfrac{x^2+3x}{x^2-9}$

d) $\dfrac{x+5}{x-5} \cdot \dfrac{x^2-25}{x^2+25}$

a) $\dfrac{9x \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{9x^2 \cdot (x-1)} = \dfrac{x+1}{x}$

b) $\dfrac{2 \cdot (x-3) \cdot (x+2)^2}{(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-3)^2} = \dfrac{2 \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x-3)}$

c) $\dfrac{(x-3) \cdot x \cdot (x+3)}{x \cdot (x+3) \cdot (x-3)} = 1$

d) $\dfrac{(x+5) \cdot (x+5) \cdot (x-5)}{(x-5) \cdot (x^2+25)} = \dfrac{(x+5)^2}{x^2+25}$

084 **Realiza los productos de fracciones algebraicas y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+11x+24} \cdot \dfrac{x^2-4x-21}{x^2+3x-10}$

b) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2+6x+8} \cdot \dfrac{x^3+x^2}{x^2-3x-40}$

c) $\dfrac{x^2-9}{x^3-x^2} \cdot \dfrac{x^2+6x+8}{x^2-3x}$

a) $\dfrac{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-7) \cdot (x+3)}{(x+3) \cdot (x+8) \cdot (x+5) \cdot (x-2)} = \dfrac{(x-3) \cdot (x-7)}{(x+8) \cdot (x+5)}$

b) $\dfrac{(x-4) \cdot (x+5) \cdot x^2 \cdot (x+1)}{(x+2) \cdot (x+4) \cdot (x+5) \cdot (x-8)} = \dfrac{x^2 \cdot (x-4) \cdot (x+1)}{(x+2) \cdot (x+4) \cdot (x-8)}$

c) $\dfrac{(x+3) \cdot (x-3) \cdot (x+4) \cdot (x+2)}{x^2 \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x-3)} = \dfrac{(x+3) \cdot (x+4) \cdot (x+2)}{x^3 \cdot (x-1)}$

085 **Efectúa estas divisiones de fracciones algebraicas y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+4} : \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

b) $\dfrac{3x+9}{x-3} : \dfrac{x^3+8x^2+21x+18}{x^2-9}$

c) $\dfrac{2x-1}{x^2+2x} : \dfrac{4x}{x^3+2x^2}$

a) $\dfrac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-2)^2} : \dfrac{(x+1)^2}{(x+2) \cdot (x-2)} = \dfrac{(x-1) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x+1)}$

b) $\dfrac{3 \cdot (x+3)}{(x-3)} : \dfrac{(x+2) \cdot (x+3)^2}{(x+3) \cdot (x-3)} = \dfrac{3}{x+2}$

c) $\dfrac{2x+1}{x \cdot (x+2)} : \dfrac{4x}{x^2 \cdot (x+2)} = \dfrac{2x+1}{4}$

086 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) $\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x-3}{x^2-4}\right)\cdot\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x}{2}$

b) $\left(\dfrac{6}{1-x}-\dfrac{5x}{x-1}\right):\dfrac{x^2-1}{2}+\dfrac{3}{x}$

c) $\left(x+1+\dfrac{x^2}{1-x}\right):\left(1-\dfrac{x}{1+x}\cdot\dfrac{x+1}{x^3}\right)+\dfrac{4}{x^2-1}$

d) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3x}\right)\cdot\left(\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x-2}{2x}\right)-\dfrac{1}{x^2-1}$

a) $\left(\dfrac{5}{(x+2)\cdot(x-2)}\right)\cdot\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{5}{x\cdot(x-2)}-\dfrac{x}{2}=$

$=\dfrac{10-x^2\cdot(x-2)}{2x\cdot(x-2)}=\dfrac{10-x^3+2x^2}{2x\cdot(x-2)}$

b) $\left(\dfrac{-5x-6}{x-1}\right):\dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{x}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{-5x^2-6x}{(x+1)\cdot(x-1)^2}+\dfrac{3}{x}=$

$=\dfrac{-5x^3-6x^2+3\cdot(x+1)\cdot(x-1)^2}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)^2}=\dfrac{-2x^3-3x^2-3x-3}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)^2}$

c) $\left(\dfrac{-1}{x-1}\right):\left(\dfrac{x^3-x^2+2x+1}{x^3\cdot(x+1)}\right)+\dfrac{4}{(x+1)\cdot(x-1)}=$

$=\dfrac{-x^3\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x^3-x^2+2x+1)}+\dfrac{4}{(x+1)\cdot(x-1)}=$

$=\dfrac{-x^3\cdot(x+1)^2+4\cdot(x^3-x^2+2x+1)}{(x^3-x^2+2x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$

d) $\left(\dfrac{4}{3x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}=\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}=$

$=-\dfrac{2x^2-2-3x}{3x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$

087 **La torre de una iglesia es un prisma de base cuadrada y de altura 15 m mayor que la arista de la base.**

a) Expresa, en lenguaje algebraico, cuánto miden su superficie lateral y su volumen.

b) Calcula los valores numéricos de la superficie y del volumen para una arista de la base de 5, 6 y 7 m, respectivamente.

a) Arista: x

Altura: $x+15$

$A_{lateral}=4x\cdot(x+15)=4x^2+60x$

$V=x^2\cdot(x+15)=x^3+15x^2$

b)

	$x=5$ m	$x=6$ m	$x=7$ m
$A_{lateral}=4x^2+60x$	400 m^2	504 m^2	616 m^2
$V=x^3+15x^2$	500 m^3	756 m^3	1.078 m^3

088 ●●●

La página de un libro mide el doble de alto que de ancho, y los márgenes laterales miden 2 cm, y los márgenes superior e inferior, 3 cm.

a) Expresa la superficie total de la página en lenguaje algebraico.

b) Haz lo mismo con la superficie útil de papel (lo que queda dentro de los márgenes).

a) Ancho: x
Alto: $2x$
$A = x \cdot 2x = 2x^2$

b) Ancho: $x - 4$
Alto: $2x - 6$
$A = (x - 4) \cdot (2x - 6) = 2x^2 - 14x + 24$

089 ●●●

Mandamos construir un depósito de agua con forma cilíndrica, siendo el área de la base la quinta parte del cubo de la altura.

a) Expresa el volumen del depósito.

b) ¿Cuántos metros cúbicos de agua caben si la altura mide 1 m?

a) Altura: x $\quad A_{base} = \dfrac{x^3}{5} \quad V = x \cdot \dfrac{x^3}{5} = \dfrac{x^4}{5}$

b) $V(1) = \dfrac{1}{5} = 0{,}2 \text{ m}^3$

090 ●●●

El diámetro de la base de un silo cilíndrico mide $\frac{3}{4}$ de la longitud de la altura.

a) Expresa la capacidad del silo en función del diámetro de su base.

b) Queremos pintar el silo y empleamos 1 kg de pintura por cada metro cuadrado. Calcula cuántos kilogramos de pintura necesitamos si el diámetro de la base mide 2 m.

a) Diámetro: x $\quad$ Altura: $\dfrac{4}{3}x \quad V = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{4}{3}x = \pi \cdot \dfrac{x^3}{3}$

b) Diámetro: x $\quad$ Altura: $\dfrac{4}{3}x$

$$A_{lateral} = \pi \cdot x \cdot \frac{4}{3}x = \pi \cdot \frac{4x^2}{3} \xrightarrow{x=2} A_{lateral} = \pi \cdot \frac{4 \cdot 2^2}{3} = 16{,}75 \text{ m}^2$$

Necesitamos 16,75 kg de pintura.

091 ●●●

Si el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $(x - 2)$ es 12, y entre $(x + 2)$ es 4, ¿cuál será el resto de la división de $P(x)$ entre $(x^2 - 4)$?

Como el resto de $P(x)$ entre $(x - 2)$ es 12: $P(x) = (x - 2) \cdot A(x) + 12$

Como el resto de $P(x)$ entre $(x + 2)$ es 4: $P(x) = (x + 2) \cdot B(x) + 4$

Por el teorema del resto: $P(2) = 12$

Sustituyendo en la segunda igualdad: $P(2) = 12 = (2 + 2) \cdot B(2) + 4$
$\rightarrow B(2) = 2$

Como el resto de $B(x)$ entre $(x - 2)$ es 2 $\rightarrow B(x) = (x - 2) \cdot C(x) + 2$

Y sustituyendo:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + 2) \cdot B(x) + 4 = (x + 2) \cdot [(x - 2) \cdot C(x) + 2] + 4 = \\ &= (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot C(x) + 2 \cdot (x + 2) + 4 = \\ &= (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot C(x) + (2x + 8) \end{aligned}$$

El resto de dividir $P(x)$ entre $(x^2 - 4)$ es $2x + 8$.

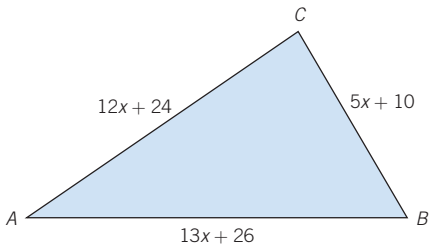
092 ●●●

¿Cuál es el resto de la división de $x^{51} + 51$ entre $(x + 1)$?

El resto es $P(-1) = -1 + 51 = 50$.

093 ●●●

Demuestra que el triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo para cualquier valor de x.

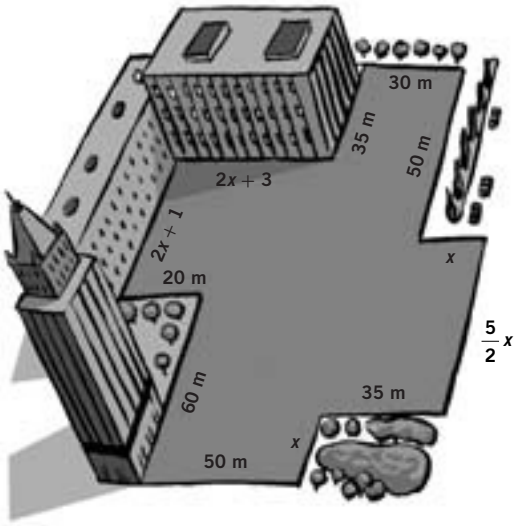


$$(12x + 24)^2 + (5x + 10)^2 = (12^2 + 5^2) \cdot (x + 2)^2 = 13^2 \cdot (x + 2)^2 = (13x + 26)^2$$

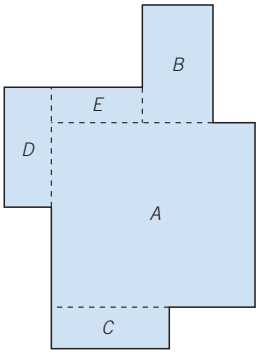
Se cumple el teorema de Pitágoras para cualquier valor de x, y el triángulo es equilátero.

094 ●●●

Calcula el perímetro y el área de la figura, expresando los resultados mediante polinomios.



$$\text{Perímetro} = 50 + x + 35 + \frac{5}{2}x + x + 50 + 30 + 35 + 2x + 3 +$$
$$+ 2x + 1 + 20 + 60 = 284 + \frac{17}{2}x \text{ m}$$



$$A_A = \frac{5}{2}x \cdot (50 + 35) = \frac{425}{2}x \text{ m}^2$$
$$A_B = 30 \cdot 50 = 1.500 \text{ m}^2$$
$$A_C = 50 \cdot x = 50x \text{ m}^2$$
$$A_D = 20 \cdot (2x + 1) = (40x + 20) \text{ m}^2$$
$$A_E = (2x + 3 - 20) \cdot (50 - 35) = (30x - 255) \text{ m}^2$$

$$A = A_A + A_B + A_C + A_D + A_E =$$
$$= \frac{425}{2}x + 1.500 + 50x + 40x + 20 + 30x - 255 = \frac{665}{2}x + 1.265 \text{ m}^2$$

095 **Encuentra los valores de *A*, *B* y *C* para que se cumpla la igualdad.**

$$(Ax - 7) \cdot (5x + B) = Cx^2 - 6x - 14$$

$$\left.\begin{array}{l}(Ax - 7) \cdot (5x + B) = 5Ax^2 + (AB - 35)x - 7B \\ (Ax - 7) \cdot (5x + B) = Cx^2 - 6x - 14\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 7B = 14 \rightarrow B = 2 \\ AB - 35 = -6 \xrightarrow{B=2} A = \dfrac{29}{2} \\ C = 5A \xrightarrow{A=\frac{29}{2}} C = \dfrac{145}{2} \end{array}\right.$$

096 **Halla un polinomio de segundo grado que sea divisible por $(x - 1)$ y que, al dividirlo entre $(x + 1)$ y entre $(x - 2)$, se obtenga como resto 10 y 5, respectivamente.**

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = A + B + C = 0 \\ P(-1) = A - B + C = 10 \end{array}\right\} \rightarrow B = -5$$

$$\left.\begin{array}{l} P(2) = 4A + 2B + C = 5 \xrightarrow{B=-5} 4A + C = 15 \\ P(-1) = A - B + C = 10 \xrightarrow{B=-5} A + C = 5 \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{10}{3} \text{ y } C = \frac{5}{3}$$

$$P(x) = \frac{10}{3}x^2 - 5x + \frac{5}{3}$$

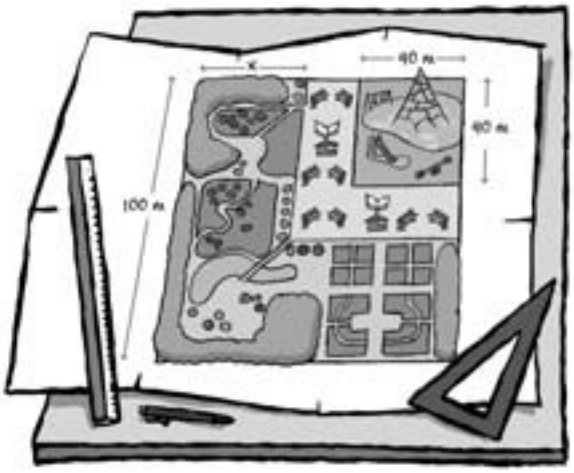
EN LA VIDA COTIDIANA

097

Dentro de los proyectos de conservación de zonas verdes de un municipio, se ha decidido instalar un parque en el solar que ocupaba una antigua fábrica.

El parque tendrá tres áreas delimitadas: la zona de juego, la zona de lectura, que rodeará a la zona de juego, y el resto, que se dedicará a la zona de paseo.

Aún no han hecho mediciones, pero los técnicos han determinado que la zona dedicada a los juegos sea cuadrada y su lado medirá 40 metros.



a) ¿Qué expresión nos da el área de la zona para pasear? ¿Y el área de la zona de lectura?

b) Si deciden que la zona de paseo tenga un ancho de 40 metros, ¿cuáles serán las áreas de cada zona?

a) $A_{juego} = 40^2 = 1.600 \text{ m}^2$

$A_{lectura} = (100 - x)^2 - 40^2 = 8.400 - 200x + x^2$

$A_{paseo} = 100^2 - (100 - x)^2 = 200x - x^2$

b) $A_{juego} = 40^2 = 1.600 \text{ m}^2$

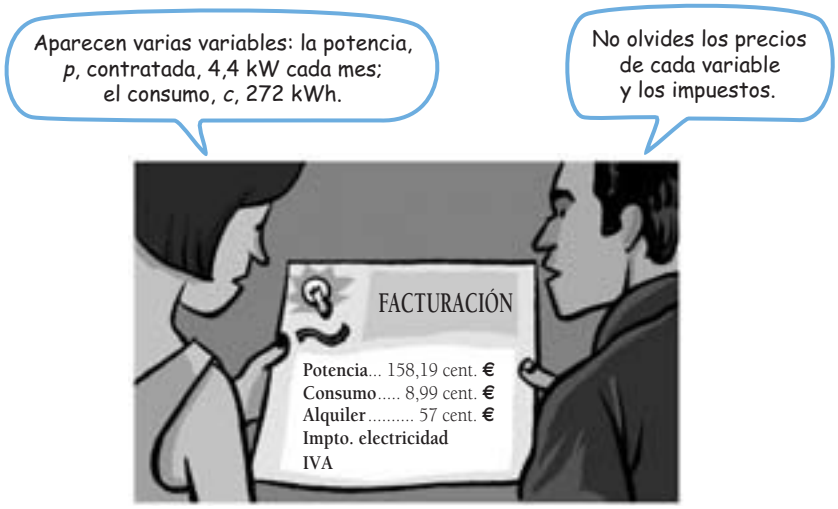
$A_{lectura} = (100 - 40)^2 - 40^2 = 2.000 \text{ m}^2$

$A_{paseo} = 100^2 - 60^2 = 6.400 \text{ m}^2$

098 ●●●

Al recoger el correo, Ana ha recibido la factura de su consumo de luz en los dos últimos meses.

Ana le pide ayuda a su hermano y ambos se disponen a analizar la factura con detalle.



Con esta información, escriben un polinomio:

$$1{,}16 \cdot [1{,}09 \cdot (2px + cy) + 2z]$$

siendo x el importe de la potencia al mes, y el importe de la energía consumida y z el importe mensual del alquiler.

Ahora comprenden por qué la factura ha sido de 49,84 €.

a) Comprueba el importe.

b) Deciden bajar la potencia a 3,5 kW y el consumo aumenta a 315 kWh. ¿Cuánto tendrán que pagar en la factura de los dos próximos meses?

a) Importe $= 1{,}16 \cdot [1{,}09 \cdot (2px + cy) + 2z] =$
$= 1{,}16 \cdot [1{,}09 \cdot (2 \cdot 4{,}4 \cdot 158{,}19 + 8{,}99 \cdot 272) + 2 \cdot 57] =$
$= 4.984{,}18$ céntimos $= 49{,}84$ €

b) El importe de la factura de los dos próximos meses es:
$1{,}16 \cdot [1{,}09 \cdot (2px + cy) + 2z] =$
$= 1{,}16 \cdot [1{,}09 \cdot (2 \cdot 3{,}5 \cdot 158{,}19 + 8{,}99 \cdot 315) + 2 \cdot 57] =$
$= 5.112{,}93$ céntimos $= 51{,}13$ €