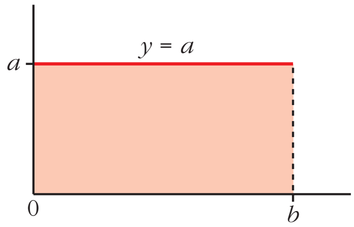
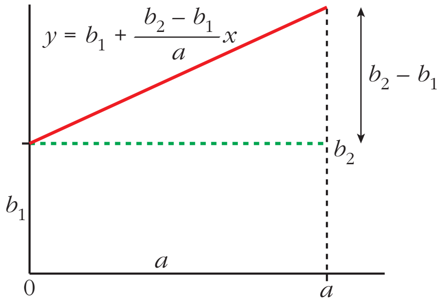
3. Curiosidad teórica: áreas de figuras planas conocidas, mediante integrales

Área de un rectángulo de dimensiones *a*, *b*



$$\text{Área} = \int_0^b a\,dx = a\int_0^b dx = a\,[x]_0^b = a \cdot b$$

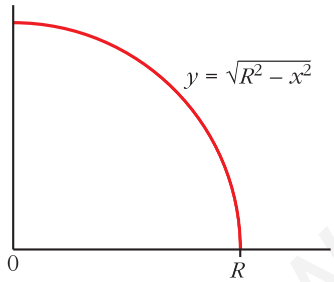
Área de un trapecio rectángulo de bases b_1 y b_2 y altura *a*



$$\text{Área} = \int_0^a \left(b_1 + \frac{b_2 - b_1}{a}x\right) dx = \left[b_1 x + \frac{b_2 - b_1}{2a}x^2\right]_0^a =$$

$$= b_1 a + \frac{b_2 - b_1}{2a}a^2 = b_1 a + \frac{b_2 - b_1}{2}a = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot a$$

Área de un círculo de radio *R*



$$x^2 + y^2 = R^2 \;\rightarrow\; y^2 = R^2 - x^2$$

$$\text{Área} = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

Cambio de variable: $x = R\,sen\,\alpha$, $dx = R\cos\alpha\,d\alpha$

$$\int \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{R^2 - R^2 sen^2\alpha}\;R\cos\alpha\,d\alpha = R^2 \int \sqrt{\cos^2\alpha}\,\cos\alpha\,d\alpha = R^2 \int \cos^2\alpha\,d\alpha =$$

$$= R^2 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2}\right) d\alpha = R^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{sen\,2\alpha}{4}\right) = R^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{sen\,\alpha\,\cos\alpha}{2}\right) = (*)$$

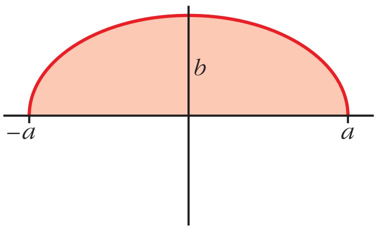
Deshacemos el cambio: $sen\,\alpha = \dfrac{x}{R}$ $\quad \alpha = arc\,sen\,\dfrac{x}{R}$

$$(*) = R^2\left(\frac{1}{2}\,arc\,sen\,\frac{x}{R} + \frac{1}{2}\,\frac{x}{R}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}\right)$$

$$\text{Área} = 4\left[R^2\left(\frac{1}{2}\,arc\,sen\,\frac{x}{R} + \frac{1}{2}\,\frac{x}{R}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}\right)\right]_0^R =$$

$$= 4R^2\left[\left(\frac{1}{2}\,arc\,sen\,1 + \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \sqrt{0}\right) - \left(\frac{1}{2}\,arc\,sen\,0 + \frac{1}{2}\cdot 0 \cdot \sqrt{1}\right)\right] = 4R^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi R^2$$

Área de una elipse de semiejes *a* y *b*

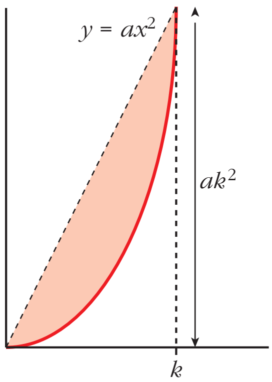


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Procediendo de forma idéntica a la del círculo, se obtiene:

$$\text{Área} = \frac{b}{a}(\pi a^2) = \pi ab$$

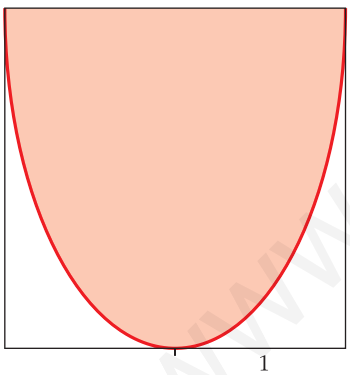
Área de un segmento de parábola



$$\text{Área bajo la curva} = \int_0^k ax^2\, dx = \left[a\frac{x^3}{3}\right]_0^k = \frac{1}{3}\,ak^3$$

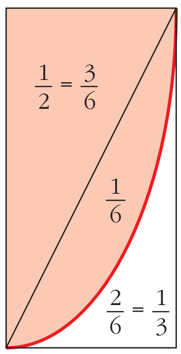
$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}k \cdot ak^2 = \frac{ak^3}{2}$$

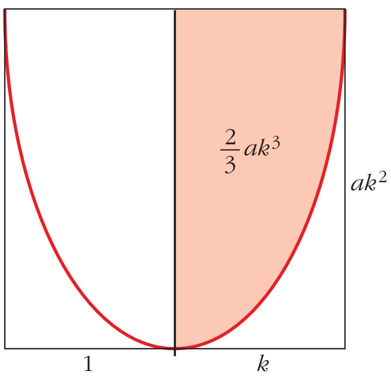
$$\text{Área del segmento de parábola} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) ak^3 = \frac{ak^3}{6}$$



Posiblemente sepas (se dio en 3.er curso de la ESO) que el área señalada en rojo es igual a los $\frac{2}{3}$ del área del rectángulo.

Veamos que ese resultado es coherente con el que acabamos de obtener:





El área coloreada es $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ del área del rectángulo.

En cada una de las dos mitades, el área del rectángulo es $k \cdot ak^2 = ak^3$.

Y el área coloreada es $\frac{2}{3}$ de esa cantidad.