Examen de cálculo diferencial e integral

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea la función $f(x)=x^2 sen(x-4)+17$. Demuestra que la función derivada $f'(x)$ posee al menos una raíz real en el intervalo $(0\ ,\ 4)$.

$f(x)$ es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ por ser suma y producto de funciones continuas y derivables; en particular $f(x)$ es continua en $[0,4]$ y derivable en $(0,4)$ y además $f(0)=f(4)$

$f(0)=0^2\cdot sen(0-4)+17=17$

$f(4)=16\cdot sen(0)+17=17$

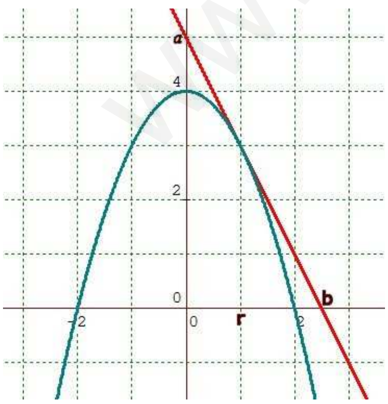
entonces estamos en las condiciones del teorema de Rolle por lo que podemos concluir que existe $x_0\in(0,4)$ tal que $f'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x)$ posee, al menos, una raiz en el intervalo $(0,4)$.

También puede resolverse aplicando el th. de Bolzano a $f'(x)$ en el intervalo $[0,4]$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la parábola $y=4-x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes coordenados y la recta tangente a la parábola en el punto de abscisa $x=r$, con $r>0$.

a. Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.
b. Calcular el área de la región limitada por la parábola, su tangente en el punto de abscisa $x=1$, y el eje vertical.



Calculemos la recta tangente a la parábola en el punto $x=r$

punto de tangencia $P=(r,4-r^2)$; $y'=-2x \Rightarrow m=y'(r)=-2r$

$r_{tg}\equiv y-(4-r^2)=-2r(x-r)\ ,\ r_{tg}\equiv y=-2rx+r^2+4$

cortamos la recta con los ejes de coordenadas

$$a=r_{tg}\cap OY \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2rx+r^2+4 \end{cases} \Rightarrow a=(0,r^2+4)$$

$$b=r_{tg}\cap OX \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-2rx+r^2+4 \end{cases} \Rightarrow b=\left(\frac{r^2+4}{2r},0\right)$$

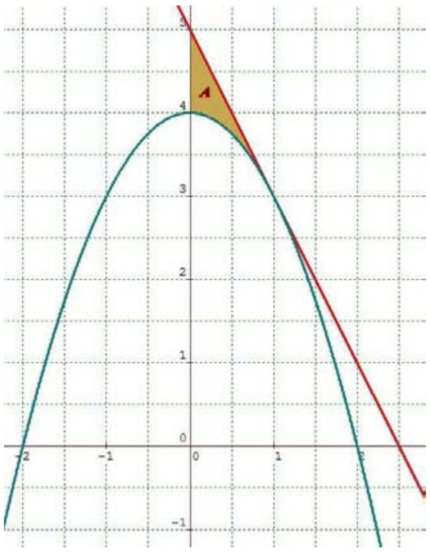
El triángulo $T(r)$ tiene por base b y por altura a

la función área será $A(r)=\dfrac{\frac{r^2+4}{2r}\cdot(r^2+4)}{2}\ ,\ A(r)=\dfrac{(r^2+4)^2}{4r}$

Busquemos el mínimo de la función área ; $A'(r)=\dfrac{16r^2\left(r^2+4\right)-4\left(r^2+4\right)^2}{16r^2}$; $A'(r)=0$

$$16r^2\left(r^2+4\right)-4\left(r^2+4\right)^2=0 \Rightarrow 4\left(r^2+4\right)\left(3r^2-4\right)=0 \Rightarrow 3r^2-4=0 \Rightarrow r=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

como $r>0 \Rightarrow$ *el área del triángulo es mínima cuando* $r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$



La recta tangente a la parábola en el punto $(1,3)$ *es* $y=-2x+5$

el área pedida es la región sombreada A

$$A=\int_0^1\left[(-2x+5)-\left(4-x^2\right)\right]dx=\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula:

$a)\ \displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} x\cdot\sqrt{1+3x^2}\,dx$ $\qquad$ $b)\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}$

$$a)\ \int_0^{\sqrt{5}} x\cdot\sqrt{1+3x^2}\,dx=\frac{1}{6}\int_0^{\sqrt{5}}6x\left(1+3x^2\right)^{1/2}dx=\frac{1}{6}\left[\frac{\left(1+3x^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{5}}=\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{16^3}}{3/2}-\frac{1}{3/2}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{128}{3}-\frac{2}{3}\right)=7$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}=(\text{dividiendo todo por } 6^x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x}{\left(\frac{3}{6}\right)^x+1}=\frac{0+0}{0+1}=0$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

a. Calcula las asíntotas, los puntos extremos y esboza la gráfica de $f(x)$.

b. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y la recta de ecuación $4x+5y-5=0$.

La función $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$ *no tiene asíntotas verticales puesto que* $Dom(f)=\mathbb{R}$, $(4x^2+1\neq 0)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{1}{x^2}}=1 \Rightarrow y=1 \text{ es asíntota horizontal}$$

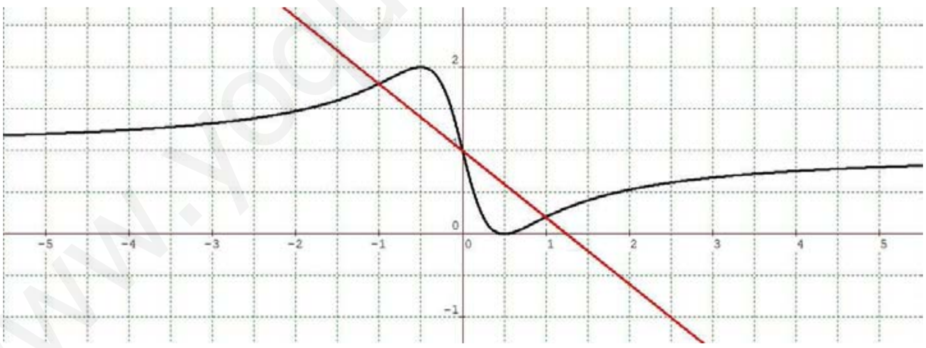
no tiene asíntota oblicua

$$f'(x)=\frac{(8x-4)(4x^2+1)-8x(4x^2-4x+1)}{(4x^2+1)^2}=\frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2}\ ;\ f'(x)=0 \Rightarrow 16x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{32x(4x^2+1)^2-2(4x^2+1)8x(16x^2-4)}{(4x^2+1)^4}=\frac{96x-128x^3}{(4x^2+1)^3}\ ;\ \begin{cases} f''\left(\frac{1}{2}\right)>0 \Rightarrow \text{en } x=\frac{1}{2} \text{ hay un mínimo } \left(\frac{1}{2},0\right) \\ f''\left(-\frac{1}{2}\right)<0 \Rightarrow \text{en } x=-\frac{1}{2} \text{ hay un máximo } \left(-\frac{1}{2},2\right) \end{cases}$$

$f(x)$ *corta a los ejes en los puntos* $(0,1)$ *y* $\left(\frac{1}{2},0\right)$; $f''(x)=0 \Rightarrow 32x(3-4x^2)=0$; *en* $x=0$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ *hay puntos de inflexión.*

Dibujamos las gráficas y calculamos el área pedida.



$$\frac{1}{2}A=\int_0^1\left(\frac{5-4x}{5}\right)dx-\int_0^1\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx=\frac{1}{5}\left[5x-2x^2\right]_0^1-\left[x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\right]_0^1=\frac{3}{5}-\left(1-\frac{\ln 5}{2}\right)=\frac{5\ln 5-4}{10} \Rightarrow A=\frac{5\ln 5-4}{5}$$

$$\int\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx=\int\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx=\int dx-\frac{1}{2}\int\frac{8x}{4x^2+1}dx=x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)$$