Junio 2018. Ejercicio 2A. Calificación máxima: 2,5 puntos

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2 \operatorname{Ln}(x)dx$, donde Ln significa logaritmo neperiano.

Solución.

b.

$$\int_1^2 x^2 \operatorname{Ln}(x)dx = \left\{\begin{matrix} u = \operatorname{Ln}(x) & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx & v = \frac{x^3}{3} \end{matrix}\right\} = \left[\operatorname{Ln}(x)\cdot\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^3}{3}\operatorname{Ln}(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\operatorname{Ln}(x) - \frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \left[\frac{x^3}{9}(3\operatorname{Ln}(x)-1)\right]_1^2 = \frac{2^3}{9}(3\operatorname{Ln}(2)-1) - \frac{1^3}{9}(3\operatorname{Ln}(1)-1) = \frac{8\operatorname{Ln}2}{3} - \frac{7}{9}$$

Septiembre 2017. Ejercicio 1A. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{\operatorname{Ln}(x+1)}{x+1} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$

donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

c) punto) Calcular $\int_{-1}^0 f(x)dx$

Solución.

c. $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 x\, e^{2x}\, dx$ La integral se resuelve por el método de partes:

$$\int_{-1}^0 x\, e^{2x}\, dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x}dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right\} = \left(x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{1}{2}e^{2x}\, dx = \left(\frac{x}{2}e^{2x}\right]_{-1}^0 - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^{2x}\, dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^0 = \left(\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)\right]_{-1}^0 = \frac{e^{2\cdot 0}}{4}(2\cdot 0-1) - \frac{e^{2\cdot(-1)}}{4}(2\cdot(-1)-1) = -\frac{1}{4} + \frac{3e^{-2}}{4}$$

$$\int_{-1}^0 x\, e^{2x}\, dx = \frac{3e^{-2}}{4} - \frac{1}{4}$$

Junio 2016. Ejercicio 1A. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Ln}(1-x)}{1-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$, donde Ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

c) (1'5 puntos) Calcular $\int_{-1}^1 f(x)dx$

Solución.

c. $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 \frac{\operatorname{Ln}(1-x)}{1-x}dx + \int_0^1 xe^{-x}\, dx$

$$\int_{-1}^0 \frac{\operatorname{Ln}(1-x)}{1-x}dx = \left\{\begin{matrix} \int f^n(x)\cdot f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \\ n = 1 \\ f(x) = \operatorname{Ln}(1-x) \to f'(x) = \frac{-1}{1-x} \end{matrix}\right\} = -1\cdot\int_{-1}^0 \operatorname{Ln}(1-x)\frac{-1}{1-x}dx = \left(-\frac{(L(1-x))^2}{2}\right]_{-1}^0 =$$

$$= -\frac{(L(1-0))^2}{2} - \left(-\frac{(L(1-(-1)))^2}{2}\right) = \frac{\operatorname{Ln}^2 2}{2}$$

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx \overset{\text{PARTES}}{=} \left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x}\end{matrix}\right\} = \left(x\cdot\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx = \left(-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx =$$

$$= \left(-xe^{-x}+\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1 = \left(-e^{-x}(1+x)\right]_0^1 = \left(-e^{-1}(1+1)\right)-\left(-e^{-0}(1+0)\right)=1-\frac{2}{e}$$

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \frac{Ln^2 2}{2}+1-\frac{2}{e}$$

Modelo 2016. Ejercicio 2A. Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} |x| & \text{si} \quad x<1 \\ x\,e^{1-x} & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$$

se pide:

c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 f(x)dx$

Solución.

c. $\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x\,e^{1-x}\,dx$

Primitiva de la función. Se calcula mediante el método de partes $\left(\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du\right)$:

$$\int x\,e^{1-x}dx = \left\{\begin{matrix} u=x & \to & du=dx \\ dv=e^{1-x}dx & \to & x=-e^{1-x}\end{matrix}\right\} = x\cdot\left(-e^{1-x}\right) - \int -e^{1-x}\,dx = -x\,e^{1-x}+\int e^{1-x}\,dx =$$

$$= -x\,e^{1-x}+\left(-e^{1-x}\right)+C = -e^{1-x}(x+1)+C$$

Conocida la primitiva de la función, se calcula la integral definida.

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x\,e^{1-x}\,dx = \left(-e^{1-x}(x+1)\right]_1^2 = -e^{1-2}(2+1)-\left(-e^{1-1}(1+1)\right) = 2-\frac{3}{e}$$

Septiembre 2015. Ejercicio 1B. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} a+xLn(x) & \text{si} \quad x>0 \\ x^2e^x & \text{si} \quad x\leq 0\end{cases}$$

(donde Ln denota logaritmo neperiano y a es un número real) se pide:

c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^0 f(x)dx$

Solución.

c. $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 \left(x^2e^x\right)dx$

La integral indefinida se resuelve por partes, además, teniendo en cuenta que es polinómica por exponencial, la forma más sencilla de aplicar el método es mediante una tabla.

En la columna de la izquierda se pone la función que actúa como u $\left(x^2\right)$ y se va derivando hasta que se anula, en la columna de la derecha se pone la función que actúa como dv $\left(e^x\right)$ y se va integrando.

La solución se obtiene como indican las flechas y los respectivos signos.

u	dv
(+) x^2	e^x
(−) $2x$	e^x
(+) 2	e^x
(−) 0	e^x

$$\int x^2e^xdx = +x^2\cdot e^x - 2x\cdot e^x + 2\cdot e^x + C = \left(x^2-2x+2\right)\cdot e^x + C$$

Si no os convence este método, podéis emplear la forma rigurosa:

$$\int x^2e^xdx = \left\{\begin{matrix} u=x^2 & du=2x\cdot dx \\ dv=e^xdx & v=e^x\end{matrix}\right\} = x^2e^x - \int e^x\,2x\cdot dx = x^2e^x - 2\int x\,e^xdx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x & du = 1 \cdot dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix} \right\} = x^2 e^x - 2 \cdot \left[x\, e^x - \int e^x dx \right] = x^2 e^x - 2x\, e^x + 2\int e^x dx =$$

$$= x^2 e^x - 2x\, e^x + 2\, e^x + C = \left(x^2 - 2x + 2 \right) e^x + C$$

Calculada la primitiva de la función se calcula la integral definida.

$$\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 e^x \right) dx = \left(\left(x^2 - 2x + 2 \right) e^x \right]_{-1}^{0} = \left(0^2 - 2 \cdot 0 + 2 \right) e^0 - \left((-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2 \right) e^{-1} = 2 - \frac{5}{e}$$

Septiembre 2015. Ejercicio 4A. Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Calcular la integral definida $\int_1^4 (1 - x) e^{-x} dx$

Solución.

a. Se empieza por resolver la indefinida. Una vez calculada la primitiva de la función se resuelve la integral definida.

La integral indefinida se resuelve por el método de partes, tomando como u la parte polinómica y como dv la parte exponencial.

$$\int (1 - x) e^{-x} dx = \left\{ \begin{matrix} u = 1 - x & du = -dx \\ dv = e^{-x} dx & v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} = (1 - x) \cdot \left(-e^{-x} \right) - \int \left(-e^{-x} \right) \cdot (-dx) = (x - 1) e^{-x} - \int e^{-x} dx =$$

$$= (x - 1) e^{-x} - \left(-e^{-x} \right) + C = (x - 1) e^{-x} + e^{-x} + C = (x - 1 + 1) e^{-x} + C = x\, e^{-x} + C$$

$$\int_1^4 (1 - x) e^{-x} dx = \left(x \cdot e^{-x} \right]_1^4 = 4 \cdot e^{-4} - 1 \cdot e^{-1} = \frac{4}{e^4} - \frac{1}{e}$$

Junio 2015. Ejercicio 2B. Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función:

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si} & x < 0 \\ x\, e^x + 1 & \text{si} & x \geq 0 \end{matrix} \right.$$

se pide:

c) (1 punto) Calcular $\int_1^3 f(x) dx$

Solución.

c. $\int_1^3 f(x)\, dx = \int_1^3 \left(x\, e^x + 1 \right) dx = \int_1^3 x\, e^x\, dx + \int_1^3 1\, dx$

$$\int x\, e^x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix} \right\} = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C = xe^x - e^x + C = (x - 1) \cdot e^x + C$$

$$\int 1\, dx = x + C$$

$$\int_1^3 f(x)\, dx = \left[(x - 1) \cdot e^x + x \right]_1^3 = (3 - 1) \cdot e^3 + 3 - \left((1 - 1) \cdot e^1 + 1 \right) = 2 \cdot e^3 + 3 - \left(0 \cdot e^1 + 1 \right) = 2\, e^3 + 2$$

Modelo 2015. Ejercicio 2B. Calificación máxima: 3 puntos

Hallar:

b) (1 punto) $\int (3x + 5) \cos x\, dx$

Solución.

b. Integral por partes.

$$\int (3x + 5) \cos x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = 3x + 5 & du = 3 \cdot dx \\ dv = \cos x\, dx & v = \operatorname{sen} x \end{matrix} \right\} = (3x + 5) \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, 3 \cdot dx = (3x + 5) \cdot \operatorname{sen} x - 3\int \operatorname{sen} x\, dx =$$

$$= (3x + 5) \cdot \operatorname{sen} x - 3(-\cos x) + C = (3x + 5) \cdot \operatorname{sen} x + 3 \cos x + C$$

Septiembre 2014. Ejercicio 2B. Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5\,\text{sen}\,x}{2x}+\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x<0\\ a & \text{si} \quad x=0\\ xe^x+3 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

se pide:

c) (1 punto) Calcular la integral: $\int_1^{\text{Ln}5} f(x)\,dx$

Donde Ln denota logaritmo neperiano.

Solución.

c. $$\int_1^{\text{Ln}5} f(x)\,dx=\int_1^{\text{Ln}5}\left(xe^x+3\right)dx=\int_1^{\text{Ln}5}\left(xe^x\right)dx+\int_1^{\text{Ln}5}3\,dx$$

Calculo de la primitiva:

- $$\int xe^x dx \underset{\text{POR PARTES}}{=}\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx\\ dv=e^x dx & v=e^x\end{matrix}\right\}=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=e^x(x-1)+C$$
- $$\int 3dx=3x+C$$

Integral definida:

$$\int_1^{\text{Ln}5}\left(xe^x\right)dx+\int_1^{\text{Ln}5}3\,dx=\left(e^x(x-1)\right]_1^{\text{Ln}5}+\left(3x\right]_1^{\text{Ln}5}=\left(e^x(x-1)+3x\right]_1^{\text{Ln}5}=$$

$$=\left(e^{\text{Ln}5}(\text{Ln}5-1)+3\cdot\text{Ln}5\right)-\left(e^1(1-1)+3\cdot 1\right)=5\text{Ln}5-5+3\text{Ln}5-0-3=8\text{Ln}5-8$$

Modelo 2014. Ejercicio 4A. Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Sea $g(x)$ una función derivable que cumple $g(6)=\int_5^6 g(x)\,dx$. Hallar

$$\int_5^6 (x-5)\,g'(x)\,dx$$

Solución.

a. La integral se resuelve mediante el método de partes:

$$\int_5^6 (x-5)\,g'(x)\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x-5\to du=dx\\ dv=g'(x)dx\to v=g(x)\end{matrix}\right\}=\left((x-5)\cdot g(x)\right]_5^6-\underbrace{\int_5^6 g(x)\cdot dx}_{g(6)}=$$

$$=[(6-5)\cdot g(6)]-[(5-5)\cdot g(5)]-g(6)=[1\cdot g(6)-0\cdot g(5)]-g(6)=g(6)-g(6)=0$$

Septiembre 2012. Ejercicio 2B. Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función $f(x)=x^2\text{sen}\,x$, se pide:

b) (1 punto) Calcular la integral de f en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución.

b. La primitiva de la función f(x) se hace por el método de Partes $\left(\int u dv=uv-\int v du\right)$.

$$\int_0^\pi x^2\text{sen}\,x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x^2 & \text{Diferenciando} & du=2x\,dx\\ dv=\text{sen}\,x\,dx & \text{Integrando} & v=-\cos x\end{matrix}\right\}=\left(x^2\cdot(-\cos x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)\;2x\,dx=$$

$$=\left(-x^2\cos x\right]_0^\pi+2\int_0^\pi x\cos x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x & \text{Diferenciando} & du=dx\\ dv=\cos x\,dx & \text{Integrando} & v=\text{sen}\,x\end{matrix}\right\}=$$

$$=\left(-x^2\cos x\right]_0^\pi+2\cdot\left[\left(x\,\text{sen}\,x\right]_0^\pi-\int_0^\pi\text{senx}\,dx\right]=\left(-x^2\cos x+2x\,\text{sen}\,x\right]_0^\pi-2\int_0^\pi\text{senx}\,dx=$$

$$=\left(-x^2\cos x+2x\,\text{sen}\,x-2\cdot(-\cos x)\right]_0^\pi=\left(-x^2\cos x+2x\,\text{sen}\,x+2\cos x\right]_0^\pi=$$

$$=\left(-\pi^2\cos\pi+2\pi\,\text{sen}\,\pi+2\cos\pi\right)-\left(-0^2\cos 0+2\cdot 0\cdot\text{sen}\,0+2\cos 0\right)=$$
$$=\left(-\pi^2\cdot(-1)+2\pi\cdot 0+2\cdot(-1)\right)-\left(-0^2\cdot 1+2\cdot 0\cdot 0+2\cdot 1\right)=\left(\pi^2-2\right)-(2)=\pi^2-4$$

Junio 2012. Ejercicio 4A. Calificación máxima: 2 puntos.
Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

a) (1 punto) $\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx$

Solución.
a. Para que sea un poco mas sencilla, primero se calcula la primitiva de la función y a continuación se calcula la definida. La integral indefinida se resuelve por el método de partes.

$$\int u\,dv = uv-\int v\,du$$

$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\begin{Bmatrix} u=e^{2x} & du=e^{2x}\cdot 2\,dx\\ dv=\cos x\,dx & v=\text{sen}\,x\end{Bmatrix}=e^{2x}\cdot\text{sen}\,x-\int\text{sen}\,x\cdot e^{2x}\cdot 2\,dx=$$
$$=e^{2x}\text{sen}\,x-2\int\text{sen}\,x\cdot e^{2x}\,dx=\begin{Bmatrix} u=e^{2x} & du=e^{2x}\cdot 2\,dx\\ dv=\text{sen}\,x\,dx & v=-\cos x\end{Bmatrix}=$$
$$=e^{2x}\text{sen}\,x-2\cdot\left(e^{2x}\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)\cdot e^{2x}\cdot 2\,dx\right)$$

Ordenando se llega a una integral iterativa
$$\int e^{2x}\cos x\,dx=e^{2x}\text{sen}\,x+2e^{2x}\cos x-4\int e^{2x}\cos x\,dx$$

Despejando se obtiene la primitiva de la función.
$$\int e^{2x}\cos x\,dx+4\int e^{2x}\cos x\,dx=e^{2x}\text{sen}\,x+2e^{2x}\cos x$$
$$5\int e^{2x}\cos x\,dx=e^{2x}\text{sen}\,x+2e^{2x}\cos x\ ;\quad \int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{e^{2x}}{5}(\text{sen}\,x+2\cos x)+C$$

Conocida la primitiva se calcula la integral definida.
$$\int_0^{\pi}e^{2x}\cos x\,dx=\left[\frac{e^{2x}}{5}(\text{sen}\,x+2\cos x)\right]_0^{\pi}=\frac{e^{2\pi}}{5}(\text{sen}\,\pi+2\cos\pi)-\frac{e^{2\cdot 0}}{5}(\text{sen}\,0+2\cos 0)=$$
$$=\frac{e^{2\pi}}{5}(0+2\cdot(-1))-\frac{1}{5}(0+2\cdot 1)=-\frac{2e^{2\pi}}{5}-\frac{2}{5}=-\frac{2}{5}\left(e^{2\pi}+1\right)$$

Septiembre 2010. F.M. Ejercicio 4A. Calificación máxima: 2 puntos.
Hallar:

b) (1,5 puntos) $\int_9^{11}(x-10)^{19}(x-9)\,dx$

Solución.
b. Integral por partes.
$$\int_9^{11}(x-10)^{19}(x-9)\,dx=\begin{Bmatrix} u=x-9\to du=dx\\ dv=(x-10)^{19}\to v=\dfrac{(x-10)^{20}}{20}\end{Bmatrix}=\left[(x-9)\cdot\frac{(x-10)^{20}}{20}\right]_9^{11}-\int_9^{11}\frac{(x-10)^{20}}{20}dx=$$

$$=\left[\frac{(x-9)\cdot(x-10)^{20}}{20}-\frac{(x-10)^{21}}{20\cdot 21}\right]_9^{11}=\left(\frac{(11-9)\cdot(11-10)^{20}}{20}-\frac{(11-10)^{21}}{20\cdot 21}\right)-\left(\frac{(9-9)\cdot(9-10)^{20}}{20}-\frac{(9-10)^{21}}{20\cdot 21}\right)=$$

$$=\left(\frac{2\cdot 1^{20}}{20}-\frac{1^{21}}{20\cdot 21}\right)-\left(\frac{0\cdot(-1)^{20}}{20}-\frac{(-1)^{21}}{20\cdot 21}\right)=\frac{2}{20}-\frac{1}{420}-\left(0-\frac{-1}{420}\right)=\frac{2}{20}-\frac{1}{420}-\frac{1}{420}=\frac{2}{21}$$

Septiembre 2010. F.G. Ejercicio 4A. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular:

b) (1 punto) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$

Solución.

b. Integral por el método de partes.

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx=\begin{Bmatrix} u=x\to du=dx \\ dv=\cos x\,dx\to v=\operatorname{sen} x\end{Bmatrix}=\left(x\cdot\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx=\left(x\cdot\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi}-\left(-\cos x\right]_0^{\pi}=$$

$$=\left(x\cdot\operatorname{sen} x+\cos x\right]_0^{\pi}=(\pi\cdot\operatorname{sen}\pi+\cos\pi)-(0\cdot\operatorname{sen} 0+\cos 0)=-2$$

Junio 2009. Ejercicio 4A. Calificación máxima: 2 puntos

Calcular la integral:

$$F(x)=\int_0^x t^2e^{-t}dt$$

Solución.

Resuelvo primero la integral indefinida, y con el valor de la primitiva se resuelve la definida.

$$F(x)=\int t^2e^{-t}dt$$

Integral por partes:

$$F(x)=\int t^2e^{-t}dt=\begin{Bmatrix} u=t^2\to du=2t\cdot dt \\ dv=e^{-t}dt\to v=-e^{-t}\end{Bmatrix}=t^2\cdot\left(-e^{-t}\right)-\int\left(-e^{-t}\right)\cdot 2t\cdot dt=$$

$$=-t^2e^{-t}+2\int t\,e^{-t}dt=\begin{Bmatrix} u=t\to du=dt \\ dv=e^{-t}dt\to v=-e^{t}\end{Bmatrix}=-t^2e^{-t}+2\cdot\left[t\cdot\left(-e^{-t}\right)-\int -e^{-t}dt\right]=$$

$$=-t^2e^{-t}-2t\,e^{-t}+2\int e^{-t}dt=-t^2e^{-t}-2t\,e^{-t}-2e^{-t}+C=-e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)+C$$

Calculo de la definida:

$$F(x)=\int_0^x t^2e^{-t}dt=\left(-e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)\right]_0^x=-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)-\left(-e^{-0}\left(0^2+2\cdot 0+2\right)\right)=-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+2$$

$$F(x)=2-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)$$

Junio 2009. Ejercicio 2B. Calificación máxima: 3 puntos

Si la derivada de la función f(x) es:

$$f'(x)=(x-1)^3(x-5)$$

obtener

a) (1 punto).La función f sabiendo que f(0) = 0

Solución.

c. La primitiva de la función se encuentra integrando la derivada. Se puede hacer de dos formas, expandiendo le derivada hasta un polinomio de cuarto grado, ó mediante el método de partes.

Por partes.

$$f(x)=\int(x-1)^3(x-5)\cdot dx=\begin{Bmatrix} u=x-5\to du=1\cdot dx \\ dv=(x-1)^3dx\to v=\dfrac{(x-1)^4}{4}\end{Bmatrix}=(x-5)\frac{(x-1)^4}{4}-\int\frac{(x-1)^4}{4}dx=$$

$$=(x-5)\frac{(x-1)^4}{4}-\frac{(x-1)^5}{20}+C=\frac{(x-1)^4}{20}(5(x-5)-(x-1))+C=\frac{(x-1)^4}{20}(4x-24)+C=$$

$$=\frac{(x-1)^4(x-6)}{5}+C$$

La constante se calcula con el dato f(0) = 0.

$$f(0)=\frac{0^5}{5}-2\cdot 0^4+6\cdot 0^3-8\cdot 0^2+5\cdot 0+C=0\Rightarrow C=0$$

$$f(x)=\frac{x^5}{5}-2x^4+6x^3-8x^2+5x$$

Por el método de partes:

$$f(0)=\frac{(0-1)^4(0-6)}{5}+C=0:-\frac{6}{5}+C=0:C=\frac{6}{5}$$

$$f(x)=\frac{(x-1)^4(x-6)}{5}+\frac{6}{5}$$

Septiembre 2008. Ejercicio 1A. Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función:

$$f(x)=e^{-x}\left(x^2+1\right)$$

se pide:

b) (1 punto). Calcular: $\int_0^1 f(x)\,dx$

Solución.

b. $\int_0^1 e^{-x}\left(x^2+1\right)dx$

Integral por el método de partes, para simplificar los cálculos, primero se calcula la primitiva, y a continuación se calcula la integral definida.

Cálculo de la primitiva

$$\int e^{-x}\left(x^2+1\right)dx=\left\{\begin{array}{l}u=x^2+1\rightarrow {}^*du=2x\,dx\\ dv=e^{-x}\,dx\rightarrow {}^*v=-e^{-x}\end{array}\right\}=\left(x^2+1\right)\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}\,2x\,dx=$$

** Diferenciando u (derivar y multiplicar por su diferencial) se obtiene du, integrando dv se obtiene v.*

$$=-e^{-x}\left(x^2+1\right)+\int e^{-x}\,2x\,dx=\left\{\begin{array}{l}u=2x\rightarrow du=2\,dx\\ dv=e^{-x}\,dx\rightarrow v=-e^{-x}\end{array}\right\}=-e^{-x}\left(x^2+1\right)+\left(-e^{-x}\right)\cdot 2x-\int -e^{-x}\,2\,dx=$$

$$=-e^{-x}\left(x^2+1\right)-2e^{-x}\,x+\int 2\,e^{-x}\,dx=-e^{-x}\left(x^2+1\right)-e^{-x}\,2x-2\,e^{-x}+C=-e^{-x}\left(x^2+2x+3\right)+C$$

Calculo de la integral definida:

$$\int_0^1 e^{-x}\left(x^2+1\right)dx=\left(-e^{-x}\left(x^2+2x+3\right)\right]_0^1=\left(-e^{-1}\left(1^2+2\cdot 1+3\right)\right)-\left(-e^{-0}\left(0^2+2\cdot 0+3\right)\right)=-6\,e^{-1}+3=$$

$$=3-\frac{6}{e}$$

Septiembre 2008. Ejercicio 1B. Calificación máxima: 3 puntos

a) (1,5 puntos). Calcular

$$\int x^3 Ln(x)\,dx$$

Donde Ln (x) es el logaritmo neperiano de x.

Solución.

a. $\int x^3 Ln(x)\,dx$ La integral se resuelve por el método de integración por partes.

$$\int x^3 Ln(x)\,dx=\left\{\begin{array}{l}u=Ln\,x\rightarrow du=\frac{1}{x}\,dx\\ dv=x^3\,dx\rightarrow v=\frac{x^4}{4}\end{array}\right\}=Ln\,x\cdot\frac{x^4}{4}-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^4}{4}Ln\,x-\int\frac{x^3}{4}\,dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}Ln\,x-\frac{x^4}{16}+C=\frac{x^4}{16}\left(4\,Ln\,x-1\right)+C$$

Junio 2005. Ejercicio 1A. Calificación máxima: 2 puntos

Sea f(x) una función derivable en (0,1) y continua en [0,1], tal que f(l) = 0 y $\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizando la fórmula de integración por partes para hallar $\int_0^1 f(x)dx$.

Solución.

Aplicando el método de integración por parte $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$:

$$\int_0^1 f(x)dx = \left\{\begin{matrix} u = f(x) & du = f'(x) \cdot dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix}\right\} = (x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot f'(x) \cdot dx = (x \cdot f(x)]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 2x \cdot f'(x) \cdot dx =$$

$$= (x \cdot f(x)]_0^1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = (1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0)) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$