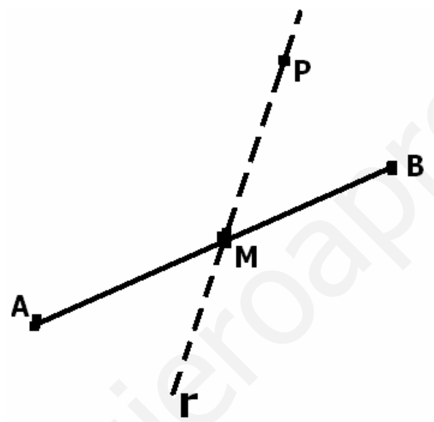
EXAMEN GEOMETRÍA ANALÍTICA

$\boxed{1}$ Dados los vectores $\vec{u} = (3,-5)$, $\vec{v} = (1,2)$ explica porqué forman una base y calcula las componentes del vector $\vec{w} = (7,3)$ en dicha base ***(1 punto)***

$\boxed{2}$ Dado el segmento de extremos A(-5,3) , B(1,1) y el punto P(3,6)



a) Calcula la ecuación implícita de la recta, r , que pasa por el punto P y por el punto medio del segmento AB ***(1,8 puntos)***

b) Halla la longitud del segmento AB, redondeando a las centésimas. ***(0,7 puntos)***

$\boxed{3}$ Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que cumplen: $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Calcula a) $2\vec{u}\,(\vec{v} - \vec{u})$ ***(1 punto)*** b) El ángulo que va de $\vec{u}$ a $\vec{v}$, redondeando a las décimas ***(1 punto)***

$\boxed{4}$ Sean las rectas r: $y = 2x - 9$, s: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$

a) Estudia su posición relativa ***(0,5 puntos)***

b) Calcula el ángulo que forman, redondeando a las décimas ***(1 punto)***

c) Halla la ecuación implícita de la recta, t, que pasa por el punto A(2,5) y es perpendicular a r ***(1,5 puntos)***

d) Halla la distancia del punto A a la recta s ***(1,5 puntos)***

SOLUCIÓN

$\boxed{1}$ Dados los vectores $\vec{u} = (3,-5)$, $\vec{v} = (1,2)$ explica porqué forman una base y calcula las componentes del vector $\vec{w} = (7,3)$ en dicha base ***(1 punto)***

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base porque son no paralelos, pues sus componentes NO son proporcionales ya que $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-5}$

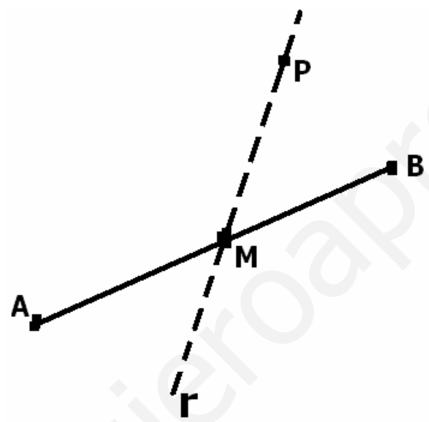
Vamos a calcular las componentes del vector $\vec{w} = (7,3)$ en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$

$\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} \rightarrow (7,3) = x.(3,-5) + y.(1,2) = (3x,-5x) + (y,2y) = (3x+y , -5x+2y)$

Igualando las componentes llegamos al sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 7 = 3x + y \\ 3 = -5x + 2y \end{cases}$. Resolviendo el sistema obtenemos x = 1, y = 4

Por tanto, las componentes del vector $\vec{w}$ en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ son $\boxed{(1,4)}$

$\boxed{2}$ Dado el segmento de extremos A(-5,3) , B(1,1) y el punto P(3,6)



a) Calcula la ecuación implícita de la recta, r , que pasa por el punto P y por el punto medio del segmento AB
(1,8 puntos)

Para calcular la ecuación de la recta tenemos que tomar un punto cualquiera de la recta y un vector de dirección:

$P(3,6) \in r$

$\overrightarrow{PM}$ es un vector de dirección de la recta

Hallemos el vector $\overrightarrow{PM}$:

El punto M es el punto medio del segmento AB, luego $M\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \rightarrow M(-2,2)$

Por tanto, $\overrightarrow{PM} = (-2,2) - (3,6) = (-5,-4) // (5,4)$

La ecuación de la recta, en forma vectorial es r: $(x,y) = (3,6) + \lambda(5,4) \rightarrow \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = 6 + 4\lambda \end{cases} \rightarrow \frac{x-3}{5} = \frac{y-6}{4}$

$4(x-3) = 5(y-6) \rightarrow 4x - 12 = 5y - 30 \rightarrow \boxed{r : 4x - 5y + 18 = 0}$

Otra forma de calcular la ecuación de la recta r

Como (5,4) // r , entonces $(-4,5) \perp r$, pues el producto escalar de los dos vectores da 0.
Por tanto, la ecuación normal de la recta r es: $-4(x-3) + 5(y-6) = 0$

Operando los paréntesis se obtiene: $-4x + 12 + 5y - 30 = 0 \rightarrow$ r: $-4x + 5y - 18 = 0$, que es una ecuación equivalente a la obtenida anteriormente

b) Halla la longitud del segmento AB, redondeando a las centésimas. ***(0,7 puntos)***

La longitud del segmento AB es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = (1,1) - (-5,3) = (6,-2)$; $|\overrightarrow{AB}| = +\sqrt{6^2+(-2)^2} = \boxed{\sqrt{40}}$

$\boxed{3}$ Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores que cumplen: $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6$.

Calcula a) $2\vec{u}\,(\vec{v} - \vec{u})$ ***(1 punto)*** b) El ángulo que va de $\vec{u}$ a $\vec{v}$, redondeando a las décimas ***(1 punto)***

a) $2\vec{u}\,(\vec{v} - \vec{u}) = 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} - 2\,\vec{u}\cdot\vec{u} = 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} - 2\,|\vec{u}|^2 = 2\cdot(-6) - 2\cdot 3^2 = \boxed{\mathbf{-30}}$

b) $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{-6}{3.5} = -0{,}4$; con la calculadora científica, hallamos el ángulo $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$

SHIFT cos -0,4 = . Obtenemos **113,6º** aproximadamente

$\boxed{4}$ Sean las rectas r: $y = 2x - 9$, s: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4}$

a) Estudia su posición relativa ***(0,5 puntos)***

$\overrightarrow{d_r} = (1,m) = (1,2)$; $\overrightarrow{d_s} = (3,4)$; r y s son secantes pues los vectores de dirección NO son paralelos

b) Calcula el ángulo que forman, redondeando a las décimas ***(1 punto)***

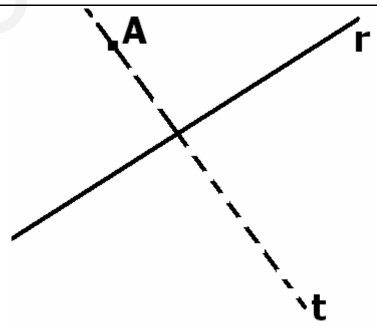
$$\cos\left(\widehat{r\,,s}\right) = \frac{|\overrightarrow{d_r}\cdot\overrightarrow{d_s}|}{|\overrightarrow{d_r}|\cdot|\overrightarrow{d_s}|}$$

$\overrightarrow{d_r}\cdot\overrightarrow{d_s} = (1,2)\cdot(3,4) = 1.3 + 2.4 = 11$; $|\overrightarrow{d_r}| = +\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$; $|\overrightarrow{d_s}| = +\sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\cos\left(\widehat{r\,,s}\right) = \dfrac{11}{\sqrt{5}\,.\,5} = 0{,}98386991\ldots$; con la calculadora científica, hallamos el ángulo:

SHIFT cos 0,98386991… = . Obtenemos **10,3º** aproximadamente

c) Halla la ecuación implícita de la recta, t, que pasa por el punto A(2,5) y es perpendicular a r ***(1,5 puntos)***



Como $A(2,5) \in t$ y el vector $\overrightarrow{d_r} = (1,2) \perp t$, entonces la ecuación normal de la recta t es: $1(x-2) + 2(y-5) = 0$

Operando los paréntesis se obtiene: $x - 2 + 2y - 10 = 0 \rightarrow$ **t: x + 2y − 12 = 0**

d) Halla la distancia del punto A a la recta s ***(1,5 puntos)***

A(2,5) , s: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} \rightarrow 4(x-2) = 3(y+1) \rightarrow 4x - 8 = 3y + 3 \rightarrow$ s: $4x - 3y - 11 = 0$

$$d(A\,,s) = \frac{|4.2 - 3.5 - 11|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|-18|}{5} = \frac{18}{5} = 3{,}6$$