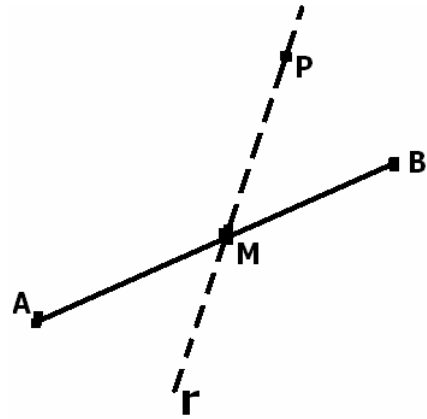


EXAMEN GEOMETRÍA ANALÍTICA

- 1] Dados los vectores $\vec{u} = (3,-5)$, $\vec{v} = (1,2)$ explica porqué forman una base y calcula las componentes del vector $\vec{w} = (7,3)$ en dicha base **(1 punto)**

- 2] Dado el segmento de extremos $A(-5,3)$, $B(1,1)$ y el punto $P(3,6)$



- a) Calcula la ecuación implícita de la recta, r , que pasa por el punto P y por el punto medio del segmento AB **(1,8 puntos)**

b) Halla la longitud del segmento AB, redondeando a las centésimas. **(0,7 puntos)**

3 Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores que cumplen: $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Calcula a) $2\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{u})$ **(1 punto)** b) El ángulo que va de \vec{u} a \vec{v} , redondeando a las décimas **(1 punto)**

4 Sean las rectas r: $y = 2x - 9$, s: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$

a) Estudia su posición relativa **(0,5 puntos)**

b) Calcula el ángulo que forman, redondeando a las décimas **(1 punto)**

c) Halla la ecuación implícita de la recta, t, que pasa por el punto A(2,5) y es perpendicular a r **(1,5 puntos)**

d) Halla la distancia del punto A a la recta s **(1,5 puntos)**

SOLUCIÓN

- 1 Dado los vectores $\vec{u} = (3,-5)$, $\vec{v} = (1,2)$ explica porqué forman una base y calcula las componentes del vector $\vec{w} = (7,3)$ en dicha base **(1 punto)**

Los vectores \vec{u} y \vec{v} forman una base porque son no paralelos, pues sus componentes NO son proporcionales ya que $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-5}$

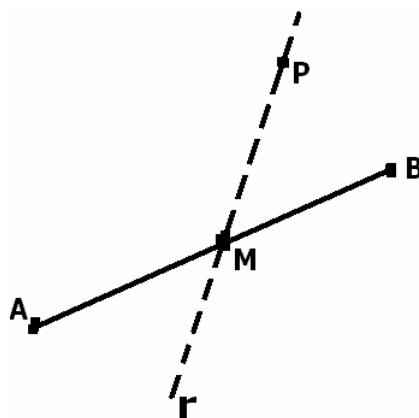
Vamos a calcular las componentes del vector $\vec{w} = (7,3)$ en la base $B = \{ \vec{u} , \vec{v} \}$

$$\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} \rightarrow (7,3) = x \cdot (3,-5) + y \cdot (1,2) = (3x,-5x) + (y,2y) = (3x+y, -5x+2y)$$

Igualando las componentes llegamos al sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 7 = 3x + y \\ 3 = -5x + 2y \end{cases}$. Resolviendo el sistema obtenemos $x = 1, y = 4$

Por tanto, las componentes del vector \vec{w} en la base $B = \{ \vec{u} , \vec{v} \}$ son **(1,4)**

- 2 Dado el segmento de extremos $A(-5,3)$, $B(1,1)$ y el punto $P(3,6)$



- a) Calcula la ecuación implícita de la recta, r , que pasa por el punto P y por el punto medio del segmento AB **(1,8 puntos)**

Para calcular la ecuación de la recta tenemos que tomar un punto cualquiera de la recta y un vector de dirección:

$$P(3,6) \in r$$

\overline{PM} es un vector de dirección de la recta

Hallemos el vector \overline{PM} :

El punto M es el punto medio del segmento AB , luego $M(\frac{-5+1}{2}, \frac{3+1}{2}) \rightarrow M(-2,2)$

$$\text{Por tanto, } \overline{PM} = (-2,2) - (3,6) = (-5,-4) // (5,4)$$

La ecuación de la recta, en forma vectorial es $r: (x,y) = (3,6) + \lambda(5,4) \rightarrow \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = 6 + 4\lambda \end{cases} \rightarrow \frac{x-3}{5} = \frac{y-6}{4}$

$$4(x-3) = 5(y-6) \rightarrow 4x - 12 = 5y - 30 \rightarrow \boxed{r: 4x - 5y + 18 = 0}$$

Otra forma de calcular la ecuación de la recta r

Como $(5,4) // r$, entonces $(-4,5) \perp r$, pues el producto escalar de los dos vectores da 0.

Por tanto, la ecuación normal de la recta r es: $-4(x-3) + 5(y-6) = 0$

Operando los paréntesis se obtiene: $-4x + 12 + 5y - 30 = 0 \rightarrow r: -4x + 5y - 18 = 0$, que es una ecuación equivalente a la obtenida anteriormente

b) Halla la longitud del segmento AB, redondeando a las centésimas. **(0,7 puntos)**

$$\text{La longitud del segmento AB es el módulo del vector } \overline{AB}$$

$$\overline{AB} = (1,1) - (-5,3) = (6,-2) ; \quad |\overline{AB}| = +\sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40}$$

3 Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores que cumplen: $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Calcula a) $2\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{u})$ **(1 punto)** b) El ángulo que va de \vec{u} a \vec{v} , redondeando a las décimas **(1 punto)**

$$\text{a) } 2\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} = 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2|\vec{u}|^2 = 2 \cdot (-6) - 2 \cdot 3^2 = \mathbf{-30}$$

$$\text{b) } \cos(\widehat{u, v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-6}{3 \cdot 5} = -0,4 ; \quad \text{con la calculadora científica, hallamos el ángulo } (\widehat{u, v})$$

$$\text{SHIFT cos } -0,4 = . \text{ Obtenemos } \mathbf{113,6^\circ} \text{ aproximadamente}$$

4 Sean las rectas r: $y = 2x - 9$, s: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$

a) Estudia su posición relativa **(0,5 puntos)**

$$\vec{d}_r = (1,2) = (1,2) ; \quad \vec{d}_s = (3,4) ; \quad r \text{ y } s \text{ son secantes pues los vectores de dirección NO son paralelos}$$

b) Calcula el ángulo que forman, redondeando a las décimas **(1 punto)**

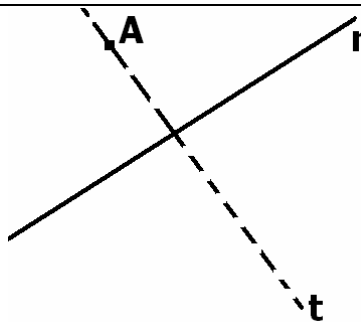
$$\cos(\widehat{r, s}) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s|}$$

$$\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = (1,2) \cdot (3,4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11 ; \quad |\vec{d}_r| = +\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} ; \quad |\vec{d}_s| = +\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\cos(\widehat{r, s}) = \frac{11}{\sqrt{5} \cdot 5} = 0,98386991... ; \quad \text{con la calculadora científica, hallamos el ángulo:}$$

$$\text{SHIFT cos } 0,98386991... = . \text{ Obtenemos } \mathbf{10,3^\circ} \text{ aproximadamente}$$

c) Halla la ecuación implícita de la recta, t, que pasa por el punto A(2,5) y es perpendicular a r **(1,5 puntos)**



Como $A(2,5) \in t$ y el vector $\vec{d}_r = (1,2) \perp t$, entonces la ecuación normal de la recta t es: $1(x - 2) + 2(y - 5) = 0$

$$\text{Operando los paréntesis se obtiene: } x - 2 + 2y - 10 = 0 \rightarrow \mathbf{t: x + 2y - 12 = 0}$$

d) Halla la distancia del punto A a la recta s **(1,5 puntos)**

$$A(2,5) , \quad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} \rightarrow 4(x-2) = 3(y+1) \rightarrow 4x - 8 = 3y + 3 \rightarrow s: 4x - 3y - 11 = 0$$

$$d(A, s) = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 5 - 11|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-18|}{5} = \frac{18}{5} = 3,6$$