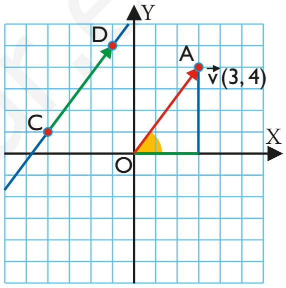
5 Geometría analítica

1. Operaciones con vectores

Piensa y calcula

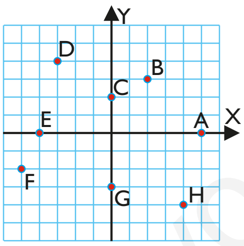
Dado el vector $\vec{v}(3, 4)$ del dibujo siguiente, calcula mentalmente su longitud y la pendiente.



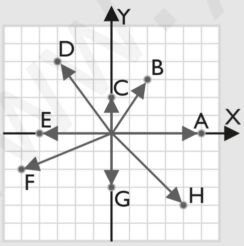
Solución:
Longitud = 5 Pendiente = 4/3

Aplica la teoría

1. Dibuja los vectores de posición de los siguientes puntos:



Solución:



2. Calcula el módulo y el argumento del vector $\vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $\vec{v}(3, 4)$ b) $\vec{v}(-2, 2)$ c) $\vec{v}(-4, -2)$ d) $\vec{v}(2, -5)$

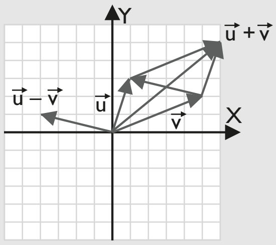
Solución:
a) $|\vec{v}| = 5, \alpha = 53° \, 7' \, 48''$
b) $|\vec{v}| = 2\sqrt{2}, \alpha = 135°$
c) $|\vec{v}| = 2\sqrt{5}, \alpha = 206° \, 33' \, 54''$
d) $|\vec{v}| = \sqrt{29}, \alpha = 291° \, 48' \, 5''$

3. Calcula $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ analítica y gráficamente en los siguientes casos:

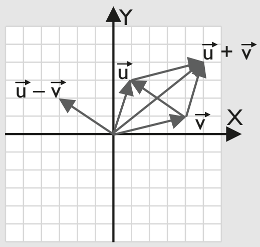
a) $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(5, 2)$

b) $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(4, 1)$

Solución:
a) $\vec{u} + \vec{v} = (6, 5)$
$\vec{u} - \vec{v} = (-4, 1)$



b) $\vec{u} + \vec{v} = (5, 4)$
$\vec{u} - \vec{v} = (-3, 2)$



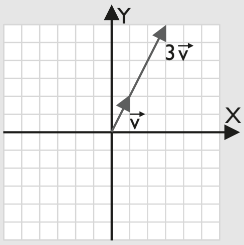
4. Calcula y representa en cada caso los vectores siguientes:

a) Multiplica por 3 el vector $\vec{v}(1, 2)$

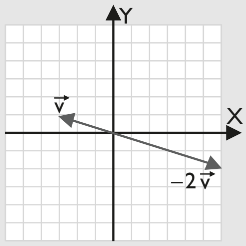
b) Multiplica por –2 el vector $\vec{v}(-3, 1)$

Solución:

a) $3\vec{v} = (3, 6)$



b) $-2\vec{v} = (6, -2)$



5. Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ en los siguientes casos:

a) A(–2, 1), B(3, –2)   b) A(4, 1), B(–3, 5)

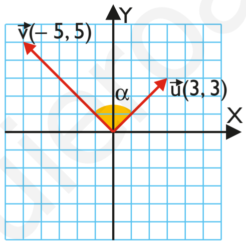
Solución:

a) $\overrightarrow{AB}$ (5, – 3)   b) $\overrightarrow{AB}$ (– 7, 4)

2. Producto escalar de vectores

Piensa y calcula

Calcula de forma razonada y mentalmente el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del dibujo.



Solución:

Como el vector $\vec{u}$ está en la bisectriz del primer cuadrante y el $\vec{v}$ en la del segundo, forman un ángulo de 90°

Aplica la teoría

6. Halla el producto escalar de los vectores siguientes:

a) $\vec{u}(3, 4)$ y $\vec{v}(-2, 5)$

b) $\vec{u}(-2, 0)$ y $\vec{v}(-3, -1)$

Solución:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 14$

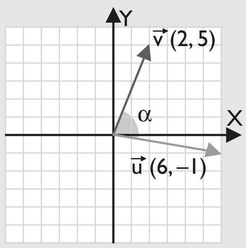
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$

7. Calcula el ángulo que forman los vectores siguientes:

a) $\vec{u}(6, -1)$ y $\vec{v}(2, 5)$

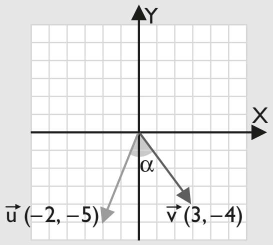
b) $\vec{u}(-2, -5)$ y $\vec{v}(3, -4)$

Solución:



a) $\cos \alpha = \dfrac{6 \cdot 2 - 1 \cdot 5}{\sqrt{6^2 + (-1)^2}\sqrt{2^2 + 5^2}} = 0{,}2137 \Rightarrow$

$\alpha = 77° \ 39' \ 39''$



b) $\cos \alpha = \dfrac{-2 \cdot 3 - 5 \cdot (-4)}{\sqrt{(-2)^2 + (-5)^2}\,\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 0{,}5199 \Rightarrow$

$\alpha = 58°\ 40'\ 17''$

8. Halla el valor de **x** para que los vectores $\vec{u}(2,6)$ y $\vec{v}(x,-3)$ sean perpendiculares.

Solución:
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 2x - 18 = 0 \Rightarrow x = 9$

9. Halla el valor de **x** de forma que el producto escalar de los vectores $\vec{u}(2, 3)$ y $\vec{v}(x, -2)$ sea igual a 4

Solución:
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \Rightarrow 2x - 6 = 4 \Rightarrow x = 5$

10. Escribe las coordenadas de dos vectores perpendiculares a $\vec{v}(5, -3)$

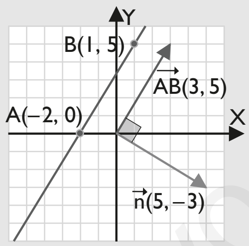
Solución:
$\vec{n}_1(3, 5)$; $\vec{n}_2(-3, -5)$

3. Determinación de una recta

Piensa y calcula

Dibuja la recta que pasa por los puntos A(–2, 0) y B(1, 5) y calcula mentalmente las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y las coordenadas de un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$

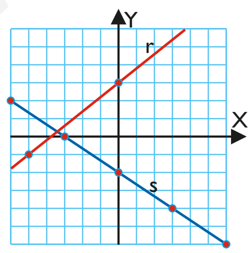
Solución:



$\overrightarrow{AB}(3, 5)$
$\vec{n}(5, -3)$

Aplica la teoría

11. Determina el vector director de las rectas **r** y **s**

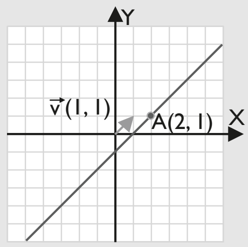


Solución:
Vector director de la recta r: $\vec{v}(5, 4)$
Vector director de la recta s: $\vec{v}(3, -2)$

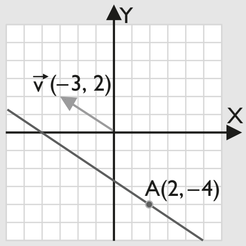
12. Dibuja, en cada caso, la recta que pasa por el punto A y tiene como vector director $\vec{v}$:

a) A(2, 1), $\vec{v}(1, 1)$ b) A(2, –4), $\vec{v}(-3, 2)$
c) A(–2, –4), $\vec{v}(3, 1)$ d) A(–3, 0), $\vec{v}(4, -3)$

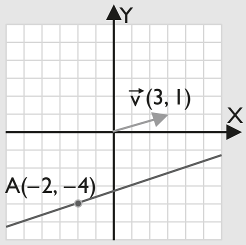
Solución:
a)



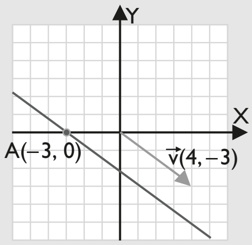
b)



c)



d)



13. Dibuja, en cada caso, la recta que pasa por los puntos A y B, calcula el vector director y la pendiente de la recta:

a) A(1, 2), B(– 4, – 1)

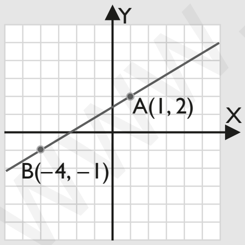
b) A(– 2, 3), B(5, – 1)

c) A(– 1, – 2), B(3, 1)

d) A(– 1, 3), B(5, – 3)

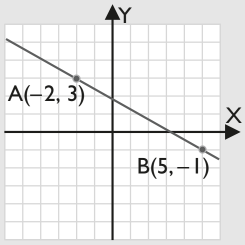
Solución:

a)



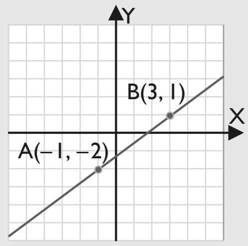
$\vec{v}(5, 3)$
m = 3/5

b)



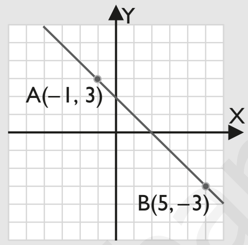
$\vec{v}(7, -4)$
m = – 4/7

c)



$\vec{v}(4, 3)$
m = 3/4

d)



$\vec{v}(6, -6) \parallel (1, -1)$
m = – 1

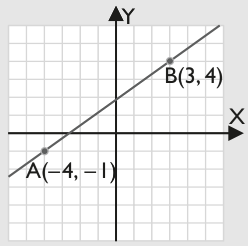
14. Dibuja la recta que pasa por los puntos A y B y calcula un vector director y uno normal a la recta en cada caso:

a) A(– 4, – 1), B(3, 4)

b) A(– 2, 1), B(1, – 3)

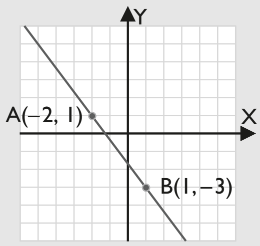
Solución:

a)



$\overrightarrow{AB} = (7, 5)$
$\vec{n}(5, -7)$

b)

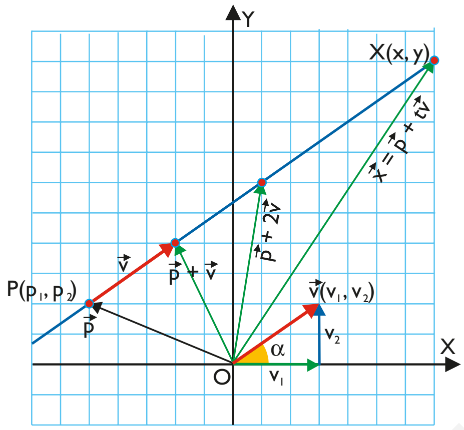


$\overrightarrow{AB} = (3, -4)$
$\vec{n}(4, 3)$

4. La recta en el plano

Piensa y calcula

Calcula mentalmente las coordenadas del punto P, de un vector director, de un vector normal y el valor de la pendiente de la recta del dibujo siguiente.



Solución:

P(– 5, 2) $\vec{v}(3, 2)$ $\vec{n}(2, – 3)$ m = 2/3

Aplica la teoría

15. Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua, general y explícita de la recta determinada por el punto P(–3, 1) y vector director $\vec{v}(2, 3)$

Solución:

Ecuación vectorial:

$(x, y) = (-3, 1) + t(2, 3); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$\left.\begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$

Ecuación continua:

$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3}$

Ecuación general:

$3x - 2y + 11 = 0$

Ecuación explícita:

$y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$

16. Dada la recta $r \equiv 4x + 3y - 6 = 0$

a) halla una recta **s** paralela a **r** que pase por el punto P(3, 4)

b) halla una recta **t** perpendicular a **r** que pase por el punto P(–2, 1)

Solución:

a) $4x + 3y - 24 = 0$ b) $3x - 4y + 10 = 0$

17. Dadas las siguientes rectas, escribe el tipo de ecuación, halla un punto, un vector director y la pendiente:

a) $(x, y) = (-2, 1) + t(3, 2), t \in \mathbb{R}$

b) $\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{5}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = -4 + t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$

d) $3x - 5y + 6 = 0$

e) $y = 3x - 4$

Solución:

a) Vectorial:

P(– 2, 1); $\vec{v}(3, 2)$, m = 2/3

b) Continua:

P(– 5, 2); $\vec{v}(4, 5)$, m = 5/4

c) Paramétricas:

P(– 4, 3); $\vec{v}(1, 2)$, m = 2

d) General:

P(– 2, 0); $\vec{v}(5, 3)$, m = 3/5

e) Explícita:

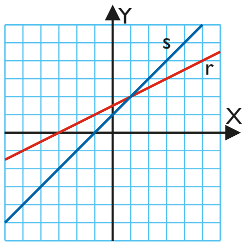
P(0, – 4); $\vec{v}(1, 3)$, m = 3

5. Propiedades afines

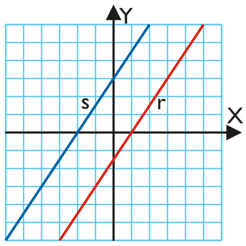
Piensa y calcula

Calcula mentalmente y compara, en cada gráfico, las pendientes de las rectas **r** y **s** y di cuántos puntos tienen en común las rectas.

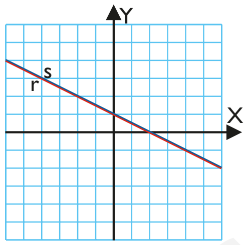
a)



b)



c)



Solución:

a) $m_r = 1/2, m_s = 1$; tienen un punto en común.

b) $m_r = 3/2, m_s = 3/2$; no tienen ningún punto en común.

c) $m_r = -1/2, m_s = -1/2$; tienen todos los puntos en común, son la misma recta.

Aplica la teoría

18. Determina cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $r \equiv 2x - 3y + 4 = 0$:

a) $A(1, 2)$

b) $B(3, 5)$

c) $C(-5, -2)$

d) $D(-1, 4)$

Solución:

a) $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 = 2 - 6 + 4 = 0 \Rightarrow A \in r$

b) $2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 4 = 6 - 15 + 4 = -5 \neq 0 \Rightarrow B \notin r$

c) $2(-5) - 3(-2) + 4 = -10 + 6 + 4 = 0 \Rightarrow C \in r$

d) $2(-1) - 3 \cdot 4 + 4 = -2 - 12 + 4 = -10 \neq 0 \Rightarrow D \notin r$

19. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\left.\begin{aligned} x - 3y &= 2 \\ 3x - 9y &= 6 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 3x - 5y &= 2 \\ 6x - 10y &= 3 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 4x + 2y &= 5 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{-3}{-9} = \dfrac{2}{6} \Rightarrow$ Coincidentes.

b) $\dfrac{3}{6} = \dfrac{-5}{-10} \neq \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ Paralelas.

c) $\dfrac{2}{4} \neq \dfrac{-3}{2} \Rightarrow$ Secantes.

20. Halla la ecuación del haz de rectas paralelas a $r \equiv 3x - 2y + 6 = 0$ y, de ellas, calcula la que pasa por el punto $A(3, 2)$

Solución:

$3x - 2y + K = 0; K \in \mathbb{R}$

$A(2, 3) \Rightarrow 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + K = 0 \Rightarrow 0 + K = 0 \Rightarrow K = 0$

$3x - 2y = 0$

21. Halla la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto $A(1, 2)$ y escribe la ecuación de la que tiene pendiente 3

Solución:

$y - 2 = m(x - 1); m \in \mathbb{R}$

$m = 3 \Rightarrow y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 3x - 3 \Rightarrow$

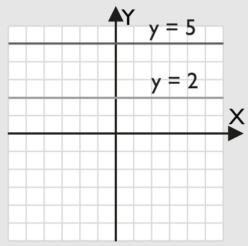
$\Rightarrow y = 3x - 1$

6. Distancias y ángulos en el plano

Piensa y calcula

Dibuja las rectas $y = 2$ e $y = 5$. Halla mentalmente el ángulo que forman y la distancia que hay entre ellas.

Solución:



Las rectas son paralelas; por tanto, forman un ángulo de cero grados.

La distancia entre ellas es de 3 unidades.

Aplica la teoría

22. Halla la distancia que hay entre los puntos A(1, 4) y B(5, 2)

Solución:

$\overrightarrow{AB}(4, -2) \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$ unidades.

23. Halla la distancia que hay del punto P(3, 2) a la recta $r \equiv 4x - 3y + 9 = 0$

Solución:

$$d(P, r) = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 9|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 3 \text{ unidades.}$$

24. Halla la distancia que hay entre las rectas:

$r \equiv x + 3y - 7 = 0 \qquad s \equiv 2x + 6y - 5 = 0$

Solución:

Son paralelas:

$P(7, 0) \in r$

$$d(P, s) = \frac{|2 \cdot 7 + 6 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \frac{9}{\sqrt{40}} = \frac{9}{2\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{20}$$

25. Halla el ángulo que forman las rectas:

$r \equiv 2x - 7y = 4 \qquad s \equiv 3x + 4y = 1$

Solución:

$$\cos \alpha = \frac{|2 \cdot 3 - 7 \cdot 4|}{\sqrt{2^2 + (-7)^2}\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow \alpha = 52° \, 48' \, 55''$$

26. Calcula mentalmente las coordenadas del punto medio del segmento de extremos A(– 4, 3) y B(6, – 5)

Solución:

M(1, – 1)

27. El punto M(1, – 1) es el punto medio del segmento AB. Si A(– 3, – 4), calcula las coordenadas del punto B

Solución:

B(x, y)

$$\frac{-3 + x}{2} = 1 \Rightarrow -3 + x = 2 \Rightarrow x = 5$$

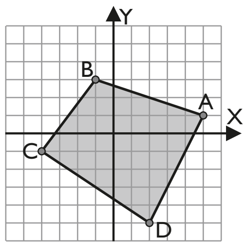
$$\frac{-4 + y}{2} = -1 \Rightarrow -4 + y = -2 \Rightarrow y = 2$$

B(5, 2)

Ejercicios y problemas

1. Operaciones con vectores

28. Dado el cuadrilátero de la figura, calcula:



a) los vectores de posición de los vértices del cuadrilátero.

b) las coordenadas de los vectores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ y $\overrightarrow{DC}$

c) las coordenadas de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ y representa el vector.

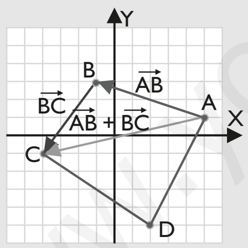
d) las coordenadas de $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$ y representa el vector.

Solución:

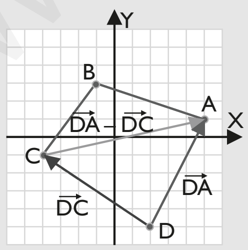
a) $\overrightarrow{OA}(5, 1)$
$\overrightarrow{OB}(-1, 3)$
$\overrightarrow{OC}(-4, -1)$
$\overrightarrow{OD}(2, -5)$

b) $\overrightarrow{AB}(-6, 2)$
$\overrightarrow{BC}(-3, -4)$
$\overrightarrow{DA}(3, 6)$
$\overrightarrow{DC}(-6, 4)$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (-9, -2)$



d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} = (9, 2)$



29. Calcula el módulo y el argumento del vector en los siguientes casos:

a) $\vec{v}(1, 5)$ b) $\vec{v}(-3, 4)$
c) $\vec{v}(-2, -3)$ d) $\vec{v}(3, -5)$

Solución:

a) $|\vec{v}| = \sqrt{26}$, $\alpha = 78° 41' 24''$

b) $|\vec{v}| = 5$, $\alpha = 126° 52' 12''$

c) $|\vec{v}| = \sqrt{13}$, $\alpha = 236° 18' 36''$

d) $|\vec{v}| = \sqrt{34}$, $\alpha = 300° 57' 50''$

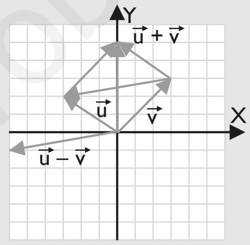
30. Calcula $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ analítica y gráficamente en los siguientes casos:

a) $\vec{u}(-3, 2)$ y $\vec{v}(3, 3)$

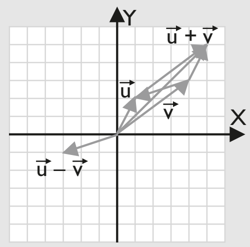
b) $\vec{u}(1, 2)$ y $\vec{v}(4, 3)$

Solución:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (0, 5)$
$\vec{u} - \vec{v} = (-6, -1)$



b) $\vec{u} + \vec{v} = (5, 5)$
$\vec{u} - \vec{v} = (-3, -1)$



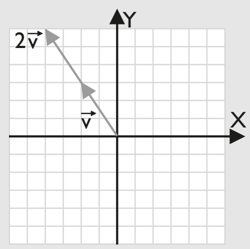
31. Calcula y representa en cada caso los siguientes vectores:

a) Multiplica por 2 el vector $\vec{v}(-2, 3)$

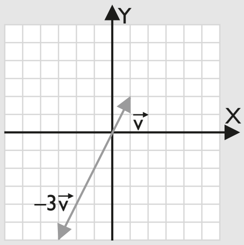
b) Multiplica por -3 el vector $\vec{v}(1, 2)$

Solución:

a) $2\vec{v} = (-4, 6)$



b) $-3\vec{v} = (-3, -6)$



2. Producto escalar de vectores

32. Halla el producto escalar de los vectores siguientes:

a) $\vec{u}(-2, 3)$ y $\vec{v}(4, -7)$

b) $\vec{u}(0, 1)$ y $\vec{v}(-5, 2)$

Solución:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -29$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$

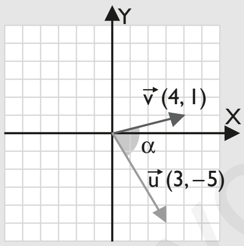
33. Calcula el ángulo que forman los vectores siguientes:

a) $\vec{u}(3, -5)$ y $\vec{v}(4, 1)$

b) $\vec{u}(5, -2)$ y $\vec{v}(-3, 4)$

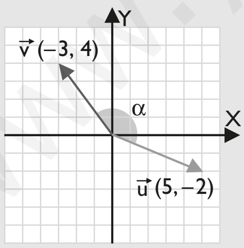
Solución:

a)



$\alpha = 73° \ 4' \ 21''$

b)



$\alpha = 148° \ 40' \ 17''$

34. Halla el valor de **x** para que los vectores $\vec{u}(6, x)$ y $\vec{v}(5, -3)$ sean perpendiculares.

Solución:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 30 - 3x = 0 \Rightarrow x = 10$

35. Halla el valor de **x** de forma que el producto escalar de los vectores $\vec{u}(2, -4)$ y $\vec{v}(1, x)$ sea igual a 6

Solución:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$

$2 - 4x = 6 \Rightarrow x = -1$

36. Analiza si los vectores $\vec{u}(-2, 5)$ y $\vec{v}(3, 2)$ son perpendiculares.

Solución:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 10 = 4 \neq 0$

No son perpendiculares.

37. Escribe las coordenadas de dos vectores perpendiculares a $\vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $\vec{v}(3, -2)$

b) $\vec{v}(-1, -3)$

c) $\vec{v}(0, -1)$

d) $\vec{v}(1, 0)$

Solución:

a) $\vec{n}_1(2, 3)$; $\vec{n}_2(-2, -3)$

b) $\vec{n}_1(3, -1)$; $\vec{n}_2(-3, 1)$

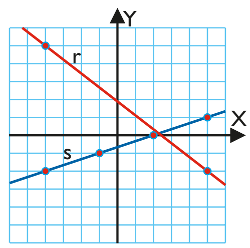
c) $\vec{n}_1(1, 0)$; $\vec{n}_2(-1, 0)$

d) $\vec{n}_1(0, 1)$; $\vec{n}_2(0, -1)$

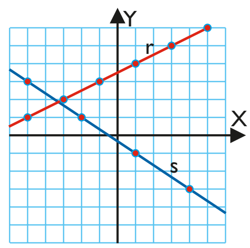
3. Determinación de una recta

38. Determina el vector director de las rectas **r** y **s** en cada caso:

a)



b)



Solución:

a) Vector director de la recta r: $\vec{v}(9, -7)$

Vector director de la recta s: $\vec{v}(3, 1)$

b) Vector director de la recta r: $\vec{v}(2, 1)$

Vector director de la recta s: $\vec{v}(3, -2)$

39. Dibuja, en cada caso, la recta que pasa por el punto A y tiene como vector director $\vec{v}$:

a) $A(5, 1)$, $\vec{v}(-1, 0)$

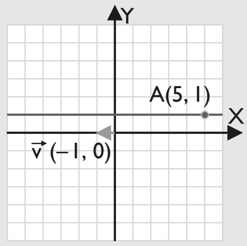
b) $A(-3, 0)$, $\vec{v}(2, 5)$

c) $A(-3, -2)$, $\vec{v}(4, -1)$

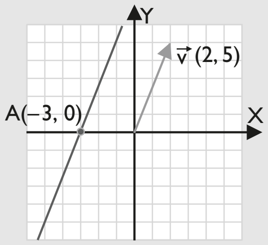
d) $A(2, 1)$, $\vec{v}(-3, 1)$

Solución:

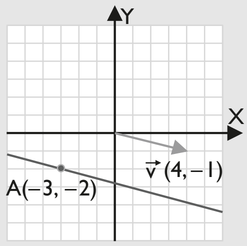
a)



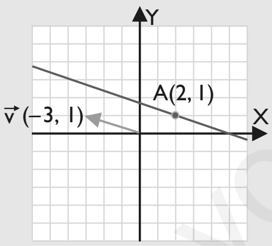
b)



c)

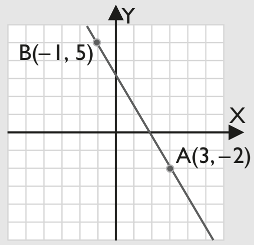


d)



Solución:

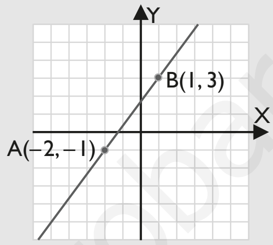
b)



$\vec{v}$ (4, – 7)

m = – 7/4

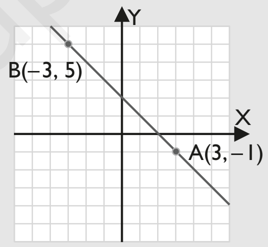
c)



$\vec{v}$ (3, 4)

m = 4/3

d)



$\vec{v}$ (– 6, 6) || (– 1, 1)

m = – 1

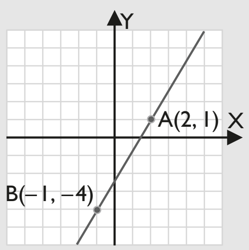
40. Dibuja la recta que pasa por los puntos A y B, y calcula el vector director y la pendiente de la recta en cada caso:

a) A(2, 1), B(– 1, – 4) b) A(3, – 2), B(– 1, 5)

c) A(– 2, – 1), B(1, 3) d) A(3, – 1), B(– 3, 5)

Solución:

a)



$\vec{v}$ (3, 5)

m = 5/3

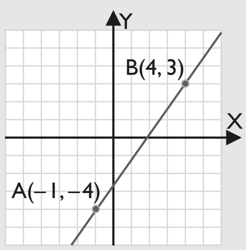
41. Dibuja la recta que pasa por los puntos A y B y calcula un vector normal a la recta en cada caso:

a) A(– 1, – 4), B(4, 3)

b) A(1, – 2), B(– 3, 1)

Solución:

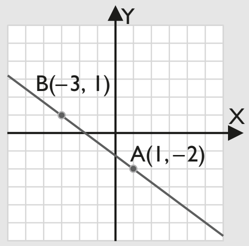
a)



$\vec{v}$ (5, 7)

$\vec{n}$ (7, – 5)

b)



$\vec{v}(4, -3)$

$\vec{n}(3, 4)$

4. La recta en el plano

42. Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua, general y explícita de la recta determinada por el punto A y el vector director:

a) $A(2, 5)$ y $\vec{v}(2, 3)$

b) $A(-1, 3)$ y $\vec{v}(4, -1)$

c) $A(-2, 1)$ y $\vec{v}(2, 1)$

d) $A(0, 3)$ y $\vec{v}(1, -2)$

Solución:

a) Ecuación vectorial:

$(x, y) = (2, 5) + t(2, 3); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 2t \\ y = 5 + 3t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3}$$

Ecuación general:

$3x - 2y + 4 = 0$

Ecuación explícita:

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

b) Ecuación vectorial:

$(x, y) = (-1, 3) + t(4, -1); \ t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 4t \\ y = 3 - t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-1}$$

Ecuación general:

$x + 4y - 11 = 0$

Ecuación explícita:

$$y = -\frac{x}{4} + \frac{11}{4}$$

c) Ecuación vectorial:

$(x, y) = (-2, 1) + t(2, 1); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x+2}{2} = y - 1$$

Ecuación general:

$x - 2y + 4 = 0$

Ecuación explícita:

$$y = \frac{x}{2} + 2$$

d) Ecuación vectorial:

$(x, y) = (0, 3) + t(1, -2); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 3 - 2t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$x = \frac{y-3}{-2}$$

Ecuación general:

$2x + y - 3 = 0$

Ecuación explícita:

$y = -2x + 3$

43. Escribe las ecuaciones vectorial, paramétricas y general de los ejes de coordenadas.

Solución:

Eje de abscisas, X

Ecuación vectorial:

$(x, y) = t(1, 0); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación general:

$y = 0$

Eje de ordenadas, Y

Ecuación vectorial:

$(x, y) = t(0, 1); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación general:

$x = 0$

44. Dadas las siguientes rectas, escribe el tipo de ecuación, halla un punto, un vector director y la pendiente:

a) $(x, y) = (-4, 2) + t(5, 1), t \in \mathbb{R}$

b) $x + 3y + 4 = 0$ c) $y = -2x - 1$

d) $\left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 4 - 2t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$ e) $\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{4}$

Solución:

a) Vectorial:
$A(-4, 2); \vec{v}(5, 1), m = 1/5$

b) General:
$A(-4, 0); \vec{v}(3, -1), m = -1/3$

c) Explícita:
$A(0, -1); \vec{v}(1, -2), m = -2$

d) Paramétricas:
$A(2, 4); \vec{v}(1, -2), m = -2$

e) Continua:
$A(5, -2); \vec{v}(3, 4), m = 4/3$

45. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-4, 5)$ y tiene pendiente -3

Solución:

$y - 5 = -3(x + 4)$

$y = -3x - 7$

46. Dada la recta $r \equiv 3x - 5y + 8 = 0$

a) halla una recta **s** paralela a **r** que pase por el punto $P(3, 2)$

b) halla una recta **t** perpendicular a **r** que pase por el punto $P(-1, 2)$

Solución:

a) $3x - 5y + 1 = 0$

b) $5x + 3y - 1 = 0$

5. Propiedades afines

47. Determina cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $4x + y - 8 = 0$:

a) $A(1, 4)$ b) $B(-2, 0)$

c) $C(3, -4)$ d) $D(-3, 20)$

Solución:

A, C y D

48. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\left.\begin{array}{r} x - 7y = 8 \\ 4x - y = 5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - 6y = 5 \\ -2x + 12y = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\frac{1}{4} \neq \frac{-7}{-1} \Rightarrow$ Secantes.

b) $\frac{1}{-2} = \frac{-6}{12} \neq \frac{5}{3} \Rightarrow$ Paralelas.

49. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - 3y = 1 \\ 8x - 6y = 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x - 6y = 5 \\ -2x + 5y = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\frac{4}{8} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Coincidentes.

b) $\frac{3}{-2} \neq \frac{-6}{5} \Rightarrow$ Secantes.

50. Halla la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto A y escribe la ecuación de la que tiene la pendiente, **m,** que se indica en cada caso:

a) $A(-1, 2)$ y $m = 2$ b) $A(2, 4)$ y $m = -3$

c) $A(-3, -2)$ y $m = 1/2$ d) $A(-1, 3)$ y $m = -2/3$

Solución:

a) $y - 2 = m(x + 1); m \in \mathbb{R}$
$m = 2 \Rightarrow y = 2x + 4$

b) $y - 4 = m(x - 2); m \in \mathbb{R}$
$m = -3 \Rightarrow y = -3x + 10$

c) $y + 2 = m(x + 3); m \in \mathbb{R}$
$m = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

d) $y - 3 = m(x + 1); m \in \mathbb{R}$
$m = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

51. Halla la ecuación del haz de rectas paralelas a la recta $r \equiv 4x + 5y - 2 = 0$ y, de ellas, calcula la que pasa por el punto $A(1, -2)$

Solución:

$4x + 5y + K = 0; K \in \mathbb{R}$

$A(1, -2) \Rightarrow K = 6$

$4x + 5y + 6 = 0$

6. Distancias y ángulos en el plano

52. Halla la distancia que hay entre los puntos A y B en los casos siguientes:

a) $A(2, 5)$ y $B(-3, 1)$ b) $A(-2, 4)$ y $B(2, 0)$

c) $A(3, -2)$ y $B(-3, 4)$ d) $A(3, 0)$ y $B(0, 4)$

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}(-5, -4) \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{41}$ unidades.

b) $\overrightarrow{AB}(4, -4) \Rightarrow d(A, B) = 4\sqrt{2}$ unidades.

c) $\overrightarrow{AB}(-6, 6) \Rightarrow d(A, B) = 6\sqrt{2}$ unidades.

d) $\overrightarrow{AB}(-3, 4) \Rightarrow d(A, B) = 5$ unidades.

53. Halla la distancia del punto P a la recta **r** en cada caso:

a) $P(2, 5)$ y $r \equiv x - 3y + 5 = 0$

b) $P(-1, 3)$ y $r \equiv 3x + 5y - 7 = 0$

c) $P(0, 5)$ y $r \equiv 4x + y + 1 = 0$

d) $P(-2, -3)$ y $r \equiv 2x - 6y + 3 = 0$

Solución:

a) $d(P, r) = \dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ unidades.

b) $d(P, r) = \dfrac{5\sqrt{34}}{34}$ unidades.

c) $d(P, r) = \dfrac{6\sqrt{17}}{17}$ unidades.

d) $d(P, r) = \dfrac{17\sqrt{10}}{20}$ unidades.

54. Halla la distancia que hay entre las rectas **r** y **s** en los casos siguientes:

a) $r \equiv 2x + y - 5 = 0$ y $s \equiv 4x + 2y + 1 = 0$

b) $r \equiv x + 6y + 9 = 0$ y $s \equiv x + y - 6 = 0$

c) $r \equiv 5x - 3y + 7 = 0$ y $s \equiv 15x - 9y - 2 = 0$

d) $r \equiv y - 5 = 0$ y $s \equiv y + 1 = 0$

Solución:

a) Son paralelas:

$P(0, 5) \in r; d(r, s) = d(P, s) = \dfrac{11\sqrt{5}}{10}$

b) Son secantes: $d(r, s) = 0$

c) Son paralelas:

$P(1, 4) \in r; d(r, s) = d(P, s) = \dfrac{23\sqrt{34}}{102}$

d) Son paralelas: $d(r, s) = 6$

55. Halla el ángulo que forman las rectas **r** y **s** en los casos siguientes:

a) $r \equiv x + y - 5 = 0$ y $s \equiv x + 2y + 3 = 0$

b) $r \equiv x - 4y + 9 = 0$ y $s \equiv 2x + 3y - 1 = 0$

c) $r \equiv 3x - 5y + 2 = 0$ y $s \equiv 6x - 10y - 5 = 0$

d) $r \equiv y - 2 = 0$ y $s \equiv x + 3 = 0$

Solución:

a) $\alpha = 18° 26' 6''$

b) $\alpha = 47° 43' 35''$

c) Son paralelas: $\alpha = 0°$

d) Son perpendiculares: $\alpha = 90°$

56. Calcula mentalmente las coordenadas del punto medio del segmento AB:

a) $A(-5, 2)$ y $B(1, -4)$ b) $A(3, 5)$ y $B(-1, -5)$

Solución:

a) $M(-2, -1)$ b) $M(1, 0)$

Para ampliar

57. Dados los vectores $\vec{u}(3, -4)$ y $\vec{v}(-2, 1)$, calcula las coordenadas de los siguientes vectores:

a) $2\vec{u} + \vec{v}$

b) $3\vec{u} - 2\vec{v}$

c) $2(\vec{u} + \vec{v})$

d) $\vec{v} - 2\vec{u}$

e) $3(\vec{u} + \vec{v}) - 2(\vec{u} - \vec{v})$

Solución:

a) $(4, -7)$ b) $(13, -14)$ c) $(2, -6)$

d) $(-8, 9)$ e) $(-7, 1)$

58. Calcula las coordenadas del vector $\vec{u}$ de forma que

$\dfrac{1}{2}\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{w}$

siendo $\vec{v}(2, -1)$ y $\vec{w}(-4, 3)$

Solución:

$\dfrac{1}{2}\vec{u} = \vec{w} - 3\vec{v} \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{w} - 6\vec{v}$

$\vec{u}(-20, 12)$

59. Calcula **x** e **y** para que se cumplan las siguientes igualdades:

a) $2(x, y) = (4, 5)$ b) $-3(x, 2) = 4(9, 2y)$

Solución:

a) $x = 2, y = 5/2$ b) $x = -12, y = -3/4$

60. Dados los vectores $\vec{u}(-2, 3)$, $\vec{v}(5, -1)$ y $\vec{w}(3, 4)$, calcula:

a) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{w}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Solución:

a) 45 b) –7

61. Dados los vectores $\vec{u}(3, 1)$ y $\vec{v}(2, 3)$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$

Solución:

$\vec{u} + \vec{v} = (5, 4)$

$\vec{u} - \vec{v} = (1, -2)$

$\alpha = 102° \ 5' \ 41''$

62. Halla el valor de **x** para que los vectores $\vec{u}(7, x)$ y $\vec{v}(3, -4)$ sean perpendiculares.

Solución:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 21 - 4x = 0 \Rightarrow x = 21/4$

63. Halla el valor de **x** de forma que el producto escalar de los vectores $\vec{u}(-3, -2)$ y $\vec{v}(5, x)$ sea igual a 5

Solución:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \Rightarrow -15 - 2x = 5 \Rightarrow x = -10$

64. Escribe las coordenadas de un vector perpendicular a $\vec{v}$ en los siguientes casos:

a) $\vec{v}(5, -2)$

b) $\vec{v}(-3, -1)$

c) $\vec{v}(0, -4)$

d) $\vec{v}(-3, 5)$

Solución:

a) $\vec{n}(2, 5)$

b) $\vec{n}(1, -3)$

c) $\vec{n}(4, 0) \parallel (1, 0)$

d) $\vec{n}(5, 3)$

65. Dibuja las rectas que pasan por el punto A y tienen como vector director $\vec{v}$, y determina otro punto de la recta en cada caso:

a) $A(-2, 1)$, $\vec{v}(2, 3)$

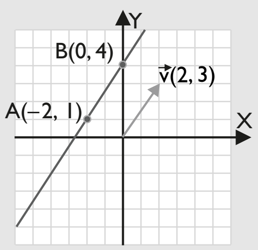
b) $A(0, 3)$, $\vec{v}(2, -1)$

c) $A(-2, -5)$, $\vec{v}(3, 4)$

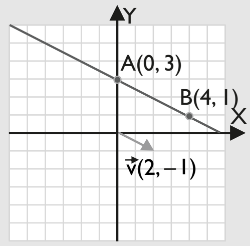
d) $A(2, 3)$, $\vec{v}(1, -2)$

Solución:

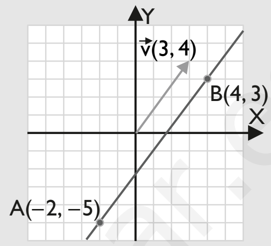
a)



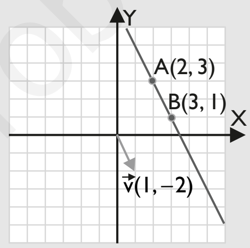
b)



c)



d)



66. Dibuja las rectas que pasan por los puntos A y B, y calcula el vector director y la pendiente de la recta en cada caso:

a) $A(3, 4)$, $B(-5, -1)$

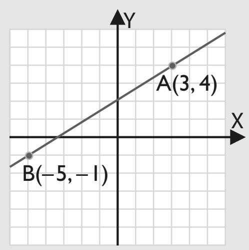
b) $A(-3, 2)$, $B(4, -2)$

c) $A(-2, -3)$, $B(5, 6)$

d) $A(-2, 4)$, $B(3, -2)$

Solución:

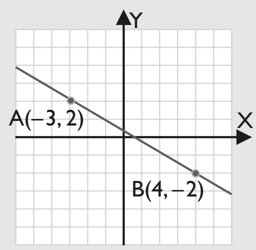
a)



$\vec{v}(8, 5)$

$m = 5/8$

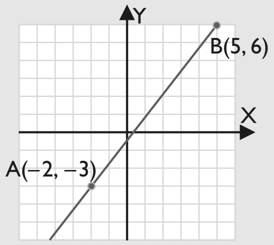
b)



$\vec{v}(7, -4)$

$m = -4/7$

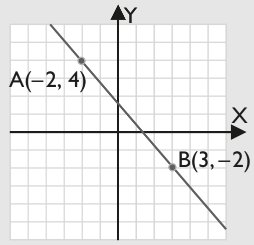
c)



$\vec{v}(7, 9)$

$m = 9/7$

d)

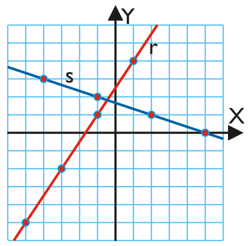


$\vec{v}(5, -6)$

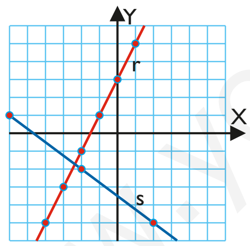
$m = -6/5$

67. Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua, general y explícita de las rectas dibujadas:

a)



b)



Solución:

a) Recta r

$P(1, 4), \vec{v}(2, 3)$

Ecuación vectorial:

$(x, y) = (1, 4) + t(2, 3); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 4 + 3t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3}$$

Ecuación general:

$3x - 2y + 5 = 0$

Ecuación explícita:

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

Recta s

$P(2, 1), \vec{v}(3, -1)$

Ecuación vectorial:

$(x, y) = (2, 1) + t(3, -1); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1}$$

Ecuación general:

$x + 3y - 5 = 0$

Ecuación explícita:

$$y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}$$

b) Recta r

$P(0, 3), \vec{v}(1, 2)$

Ecuación vectorial:

$(x, y) = (0, 3) + t(1, 2); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$x = \frac{y-3}{2}$$

Ecuación general:

$2x - y + 3 = 0$

Ecuación explícita:

$y = 2x + 3$

Recta s

$P(2, -5), \vec{v}(4, -3)$

Ecuación vectorial:

$(x, y) = (2, -5) + t(4, -3); t \in \mathbb{R}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 4t \\ y = -5 - 3t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-3}$$

Ecuación general:

$3x + 4y + 14 = 0$

Ecuación explícita:

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$$

68. Dadas las siguientes rectas, escribe el tipo de ecuación, halla un punto, un vector director y la pendiente:

a) $y = -4x + 5$

b) $2x - 5y + 10 = 0$

c) $\left.\begin{array}{l} x = -4 - 2t \\ y = 3 - 5t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$

d) $\dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y+4}{5}$

e) $(x, y) = (2, 5) + t(-2, 3), t \in \mathbb{R}$

Solución:

a) Explícita:

$A(0, 5)$; $\vec{v}(1, -4)$, $m = -4$

b) General:

$P(-5, 0)$; $\vec{v}(5, 2)$, $m = 2/5$

c) Paramétricas:

$P(-4, 3)$; $\vec{v}(2, 5)$, $m = 5/2$

d) Continua:

$P(-5, -4)$; $\vec{v}(3, 5)$, $m = 5/3$

e) Vectorial:

$P(2, 5)$; $\vec{v}(-2, 3)$, $m = -3/2$

69. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-3, -5)$ y tiene pendiente 4

Solución:

Se aplica la forma punto-pendiente:

$y + 5 = 4(x + 3)$

$y = 4x + 7$

70. Dada la recta $r \equiv 5x + 3y + 1 = 0$

a) halla una recta **s** paralela a **r** que pase por el punto $P(1, 3)$

b) halla una recta **s** perpendicular a **r** que pase por el punto $P(-5, 2)$

Solución:

a) $5x + 3y - 14 = 0$

b) $3x - 5y + 25 = 0$

71. Estudia la posición relativa de los pares de rectas:

a) $r \equiv 2x + 3y - 1 = 0$; $s \equiv 3x - 4y - 5 = 0$

b) $r \equiv x + 5y - 6 = 0$; $s \equiv \dfrac{x-1}{-5} = y + 3$

c) $r \equiv y = -3x + 2$; $s \equiv \left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = -4 + 3t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$

d) $r \equiv x - 4y + 5 = 0$; $s \equiv y = 2x + 1$

Solución:

a) $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{3}{-4} \Rightarrow$ Secantes.

b) $s \equiv x + 5y + 14 = 0$

$\dfrac{1}{1} = \dfrac{5}{5} \neq \dfrac{-6}{14} \Rightarrow$ Paralelas.

c) $r \equiv 3x + y - 2 = 0$

$s \equiv 3x + y - 2 = 0$

$\dfrac{3}{3} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{-2}{-2} \Rightarrow$ Coincidentes.

d) $s \equiv 2x - y + 1 = 0$

$\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-4}{-1} \Rightarrow$ Secantes.

72. Halla la ecuación del haz de rectas que pasan por el punto A y escribe la ecuación de la que tiene la pendiente, **m,** que se indica en cada caso:

a) $A(3, 2)$ y $m = -4$

b) $A(-2, 1)$ y $m = -1/3$

c) $A(-2, 0)$ y $m = -2$

d) $A(-1, 2)$ y $m = 3/2$

Solución:

a) $y - 2 = m(x - 3)$; $m \in \mathbb{R}$

$y = -4x + 14$

b) $y - 1 = m(x + 2)$; $m \in \mathbb{R}$

$y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}$

c) $y = m(x + 2)$; $m \in \mathbb{R}$

$y = -2x - 4$

d) $y - 2 = m(x + 1)$; $m \in \mathbb{R}$

$y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$

73. Halla la ecuación del haz de rectas paralelas a la recta $r \equiv 5x - 3y + 7 = 0$ y, de ellas, calcula la que pasa por el punto $A(2, -3)$

Solución:

$5x - 3y + K = 0$; $K \in \mathbb{R}$

$5x - 3y - 19 = 0$

74. Halla la distancia del punto P a la recta **r** en cada caso:

a) $P(3, 5)$ y $r \equiv 6x - y + 1 = 0$

b) $P(-2, 5)$ y $r \equiv 3x - 4y + 9 = 0$

c) $P(0, -3)$ y $r \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{4}$

d) $P(0, 0)$ y $r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3 + t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$

Solución:

a) $d(P, r) = \frac{14\sqrt{37}}{37}$ unidades.

b) $d(P, r) = \frac{17}{5}$ unidades.

c) $r \equiv 4x - 3y + 11 = 0$

$d(P, r) = 4$ unidades.

d) $r \equiv x - y + 1 = 0$

$d(P, r) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades.

75. Halla la distancia que hay entre las rectas **r** y **s** en los casos siguientes:

a) $r \equiv x + y - 3 = 0$; $s \equiv y = -x + 1$

b) $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3}$; $s \equiv 3x - 4y = 0$

Solución:

a) $s \equiv x + y - 1 = 0$

r y **s** son paralelas.

$P(0, 3) \in r$

$d(r, s) = d(P, s) = \sqrt{2}$

b) $r \equiv 3x - 4y + 5 = 0$

r y **s** son paralelas.

$P(1, 2) \in r$

$d(r, s) = d(P, s) = 1$

76. Halla el ángulo que forman las rectas **r** y **s** en los casos siguientes:

a) $r \equiv y = x/2 + 3$; $s \equiv y = -x + 2$

b) $r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{array}\right\}$; $s \equiv y = 3x - 7$

Solución:

a) $r \equiv x - 2y + 6 = 0$

$s \equiv x + y - 2 = 0$

$\alpha = 71° 33' 54''$

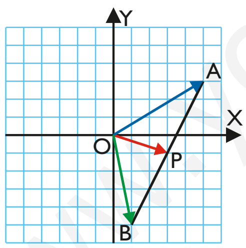
b) $r \equiv x - 2y + 5 = 0$

$s \equiv 3x - y - 7 = 0$

$\alpha = 45°$

Problemas

77. Sea P el punto medio del segmento AB. Expresa $\overrightarrow{OP}$ en función de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$



Solución:

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

78. Se conocen los vectores $\overrightarrow{AB}(3, 1)$, $\overrightarrow{AC}(-4, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Si se tiene que A(1, 2), calcula las coordenadas de los puntos B, C y D

Solución:

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (1, 2) + (3, 1) = (4, 3)$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = (1, 2) + (-4, 1) = (-3, 3)$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = (1, 2) + 2(3, 1) + (-4, 1) = (3, 5)$

79. Sean los vectores $\vec{u}(4, 3)$ y $\vec{v}(-5, x)$. Calcula el valor de **x** para que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ sean ortogonales.

Solución:

$\vec{u} + \vec{v} = (-1, 3 + x)$

$\vec{u} - \vec{v} = (9, 3 - x)$

$-9 + 9 - x^2 = 0$

$x = 0$

80. Halla el valor de **x** para que los vectores $\vec{u}(4, 3)$ y $\vec{v}(x, 1)$ formen un ángulo de 45°

Solución:

$4x + 3 = 5 \cdot \sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{1}{7}$

81. Determina si los tres puntos siguientes están alineados:

a) A(1, 2), B(–2, –4) y C(3, 6)

b) A(0, 1), B(2, –5) y C(–1, 4)

c) A(1, 3), B(–2, 0) y C(4, 5)

d) A(0, 2), B(–3, –1) y C(5, 3)

Solución:

Para que los puntos A, B y C estén alineados, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen que ser paralelos, es decir, sus coordenadas tienen que ser proporcionales.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, -6)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 4)$, A, B y C están alineados.

b) $\overrightarrow{AB} = (2, -6)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 3)$, A, B y C están alineados.

c) $\overrightarrow{AB} = (-3, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 2)$, A, B y C no están alineados.

d) $\overrightarrow{AB} = (-3, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (5, 1)$, A, B y C no están alineados.

82. Halla el valor de **k** para que los siguientes puntos estén alineados:

a) A(1, 4), B(– 2, 1) y C(3, k)

b) A(0, – 1), B(2, – 5) y C(– 1, k)

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, -3), \overrightarrow{AC} = (2, k-4) \Rightarrow \frac{-3}{2} = \frac{-3}{k-4} \Rightarrow k = 6$

b) $\overrightarrow{AB} = (2, -4), \overrightarrow{AC} = (-1, k+1) \Rightarrow \frac{2}{-1} = \frac{-4}{k+1} \Rightarrow k = 1$

83. Calcula el valor de **k** para que el punto P(– 3, 5) pertenezca a la recta determinada por los puntos A(2, 3) y B(– 1, k)

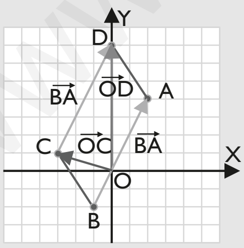
Solución:

Los vectores $\overrightarrow{PA} = (5, -2), \overrightarrow{PB} = (2, k-5)$ tienen que ser paralelos.

$\frac{5}{2} = \frac{-2}{k-5} \Rightarrow k = \frac{21}{5}$

84. Dados los puntos A(2, 4), B(– 1, – 2) y C(– 3, 1), determina las coordenadas del punto D(x, y) de forma que los cuatro puntos formen un paralelogramo.

Solución:



$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = (-3, 1) + (3, 6) = (0, 7)$

85. Halla el valor de **k** para que las rectas:

$r \equiv 4x + ky + 8 = 0$

$s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{4}$

sean paralelas.

Solución:

$s \equiv 2x + y + 5 = 0$

$\frac{4}{2} = \frac{k}{1} \Rightarrow k = 2$

86. Calcula el valor de **a** y **b** para que las rectas:

$r \equiv ax + 3y + 6 = 0$

$s \equiv bx - 2y - 1 = 0$

sean perpendiculares y la recta **r** pase por el punto A(3, 4).

Solución:

$ab - 6 = 0$

$3a + 12 + 6 = 0$

$a = -6, b = -1$

87. Halla la longitud del segmento determinado por los puntos de corte de la recta dada por la ecuación $3x + 5y - 15 = 0$ con los ejes de coordenadas.

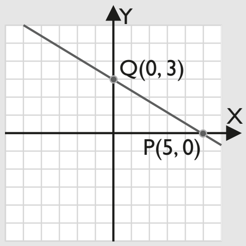
Solución:

Se pasa la ecuación a forma canónica.

Se divide toda ella entre 15

$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$

$p = 5, q = 3 \Rightarrow P(5, 0), Q(0, 3)$



$d(P, Q) = \sqrt{34}$ unidades

88. Calcula el valor de **k** para que la distancia del punto A(2, 1) a la recta $x - 2y + k = 0$ sea 5

Solución:

$\frac{|2 - 2 + k|}{\sqrt{5}} = 5$

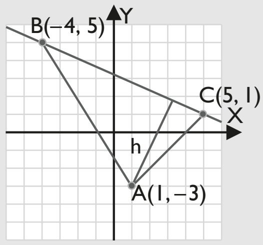
$k = \pm 5\sqrt{5}$

89. Dado el triángulo de vértices A(1, – 3), B(– 4, 5) y C(5, 1), calcula:

a) la longitud de la altura que pasa por el vértice A

b) el área del triángulo.

Solución:



a) Recta que pasa por B y C

$r \equiv 4x + 9y - 29 = 0$

$h = d(A, r) = \dfrac{52}{\sqrt{97}}$ unidades.

b) $d(B, C) = \sqrt{97}$

$\text{Área} = \dfrac{1}{2}\cancel{\sqrt{97}} \cdot \dfrac{52}{\cancel{\sqrt{97}}} = 26$ unidades cuadradas.

Para profundizar

90. Los lados de un triángulo ABC tienen como ecuaciones:

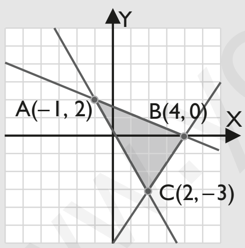
$AB \equiv 2x + 5y - 8 = 0$

$AC \equiv 5x + 3y - 1 = 0$

$BC \equiv 3x - 2y - 12 = 0$

Calcula las coordenadas de los tres vértices.

Solución:



A es la solución del sistema formado por las rectas AB y AC:

A(– 1, 2)

B es la solución del sistema formado por las rectas AB y BC:

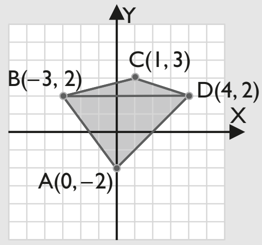
B(4, 0)

C es la solución del sistema formado por las rectas AC y BC:

C(2, – 3)

91. Calcula el área del cuadrilátero A(0, – 2), B(– 3, 2), C(1, 3) y D(4, 2)

Solución:



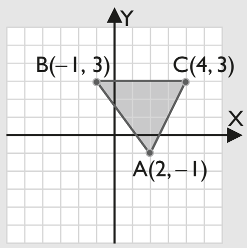
El cuadrilátero se divide en dos triángulos:

ABD y BCD

- Área de ABD:
  $d(B, D) = 7$
  Recta que pasa por BD: $r \equiv y = 2$
  $h = d(A, r) = 4$
  $A_{ABD} = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 = 14\ u^2$
- Área de BCD:
  $d(B, D) = 7$
  Recta que pasa por BD: $r \equiv y = 2$
  $h = d(C, r) = 1$
  $A_{BCD} = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 1 = 7/2\ u^2$
- $A_{ABCD} = 35/2\ u^2$

92. Calcula las amplitudes de los ángulos del triángulo de vértices A(2, – 1), B(– 1, 3) y C(4, 3)

Solución:



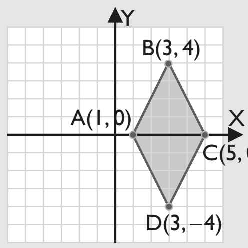
$\overrightarrow{AB}(-3, 4), \overrightarrow{AC}(2, 4) \Rightarrow A = 63°\ 26'\ 6''$

$\overrightarrow{BA}(3, -4),\ \overrightarrow{BC}(5, 0) \Rightarrow B = 53°\ 7'\ 48''$

$C = 180° - (A + B) = 63°\ 26'\ 6''$

93. Halla el área del rombo cuyos vértices son: A(1, 0), B(3, 4), C(5, 0) y D(3, –4)

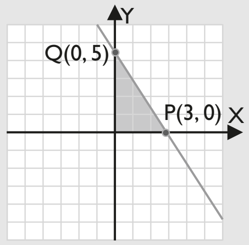
Solución:



Área = D · d/2 = 8 · 4/2 = 16 unidades cuadradas

94. Calcula el área del triángulo formado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de la recta $5x + 3y - 15 = 0$ con los ejes.

Solución:



Se pasa la ecuación a forma canónica.

Se divide toda ella entre 15

$x/3 + y/5 = 1$

$p = 3, q = 5$

Área $= 3 \cdot 5/2 = 15/2 = 7{,}5$ unidades cuadradas.

95. Calcula las coordenadas de un vector de módulo uno de la misma dirección y sentido que $\vec{v}(3, 4)$

Solución:

Se divide entre el módulo, que es 5

$\vec{v}\,(3/5, 4/5)$

96. Halla un punto de la recta $2x - y + 2 = 0$ que equidiste de los puntos $A(1, 0)$ y $B(-2, 0)$

Solución:

$P(x, y) \in r$

$d(A, P) = d(B, P)$

Es la solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 2 = 0 \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \end{array}\right\}$$

$x = -1/2, y = 1$

$P(-1/2, 1)$

97. Halla el haz de rectas que pasan por el origen y calcula la ecuación de la recta del haz, tal que la distancia del punto $P(2, 0)$ a dicha recta sea $\sqrt{2}$

Solución:

La ecuación del haz es:

$y = mx;\ m \in \mathbb{R}$

$d(P, r) = \sqrt{2}$

$mx - y = 0$

$$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{2}$$

$m = \pm 1$

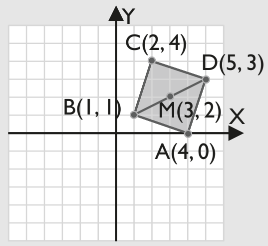
Hay dos ecuaciones del haz que verifican la condición:

$y = x$

$y = -x$

98. Un cuadrado tiene dos vértices opuestos en $B(1, 1)$ y $D(5, 3)$. Calcula las coordenadas de A y C y el área del cuadrado.

Solución:



El centro del cuadrado es el punto medio de la diagonal BD: $M(3, 2)$

El vector $\overrightarrow{MB}$ es $(-2, -1)$, que es una semidiagonal. Las otras dos semidiagonales perpendiculares son:

$\overrightarrow{MA}(1, -2)$ y $\overrightarrow{MC}(-1, 2)$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = (3, 2) + (1, -2) = (4, 0) \Rightarrow A(4, 0)$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = (3, 2) + (-1, 2) = (2, 4) \Rightarrow C(2, 4)$

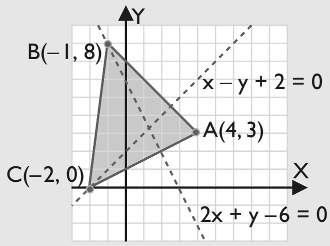
Área $= (\text{lado})^2$; lado $= d(A, B)$

Lado $= \sqrt{10}$ unidades.

Área = 10 unidades cuadradas.

99. Calcula los vértices del triángulo ABC, del que se conocen las coordenadas del punto $A(4, 3)$ y las ecuaciones de las alturas: $x - y + 2 = 0$, $2x + y - 6 = 0$

Solución:



La recta que contiene al lado AB pasa por A y es perpendicular a la recta $x - y + 2 = 0$

$A(4, 3), m_{AB} = -1$

$y - 3 = -(x - 4)$

$x + y - 7 = 0$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 7 = 0 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{array}\right\} \text{ se obtiene el vértice: } B(-1, 8)$$

La recta que contiene al lado AC pasa por A y es perpendicular a la recta $2x + y - 6 = 0$

$A(4, 3), m_{AC} = 1/2$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

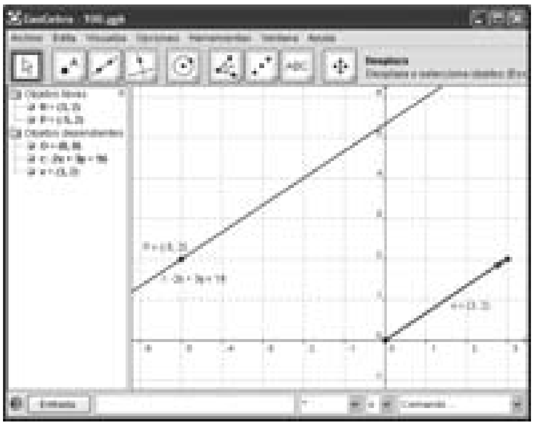
$x - 2y + 2 = 0$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + 2 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{array}\right\} \text{ se obtiene el vértice: } C(-2, 0)$$

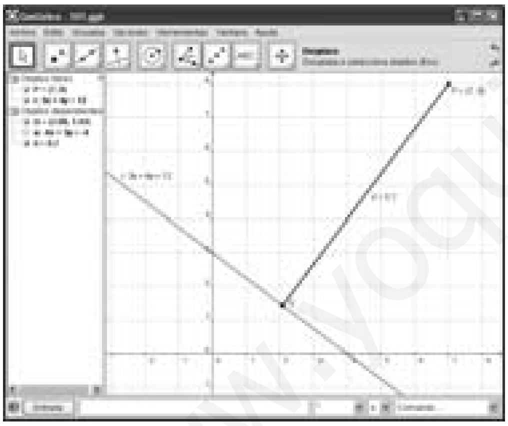
Paso a paso

100. Dibuja la recta que pasa por el punto P(– 5, 2) y tiene de vector director **v**(3, 2). Halla la ecuación de la recta.



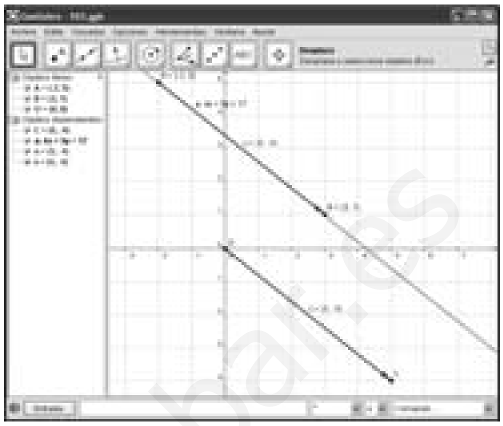
Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

101. Halla la distancia del punto P(7, 8) a la recta r ≡ 3x + 4y – 12 = 0



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

102. Dibuja la recta que pasa por los puntos A(– 2, 5) y B(3, 1). Halla la ecuación de la recta y el vector director.

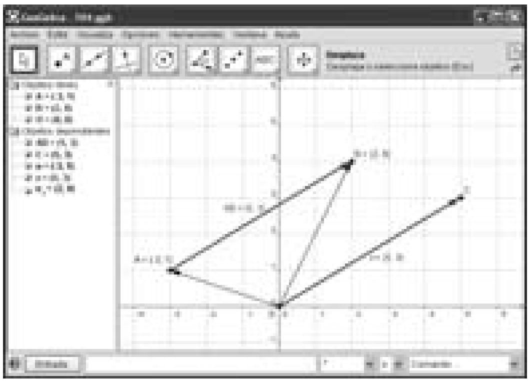


Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

103. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

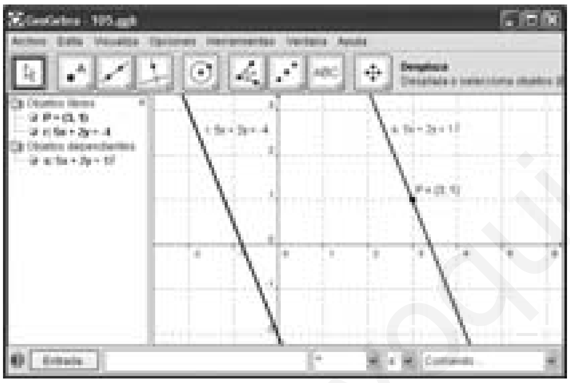
Practica

104. Dados los puntos A(– 3, 1) y B(2, 4), calcula el vector $v = \overrightarrow{AB}$



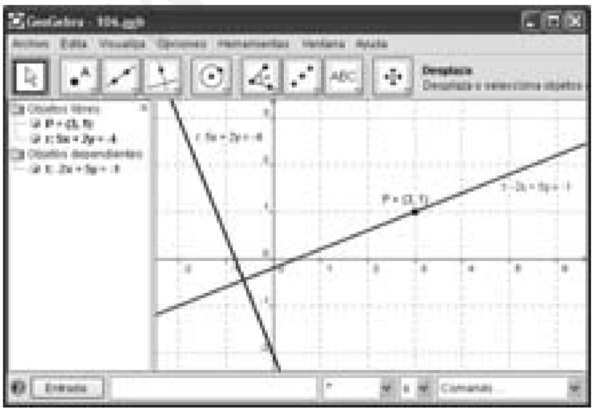
Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

105. Dada la recta $r \equiv 5x + 2y + 4 = 0$, halla una recta **s** paralela a **r** que pase por el punto P(3, 1)



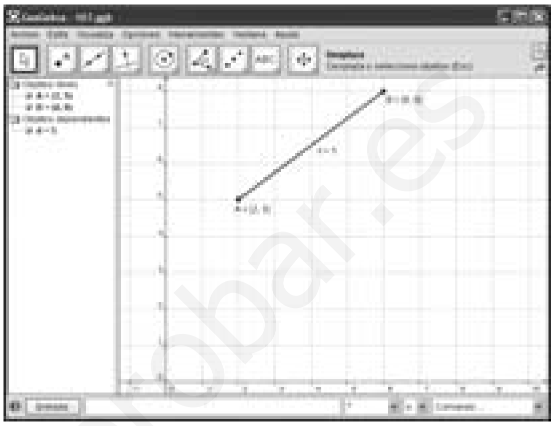
Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

106. Dada la recta $r \equiv 5x + 2y + 4 = 0$, halla una recta **t** perpendicular a **r** que pase por el punto P(1, 4)



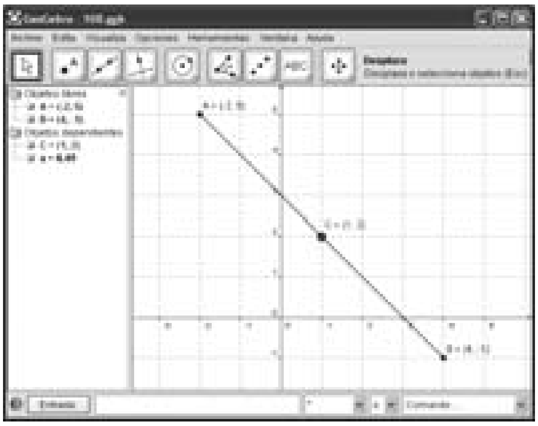
Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

107. Halla la distancia que hay entre los puntos A(2, 5) y B(6, 8)



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

108. Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos A(– 2, 5) y B(4, – 1)



Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.