LÍMITES RACIONALES

$\boxed{1}$ (1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5x-12}{3x-5} = \dfrac{4+10-12}{3\cdot 2-5} = \dfrac{2}{1} = 2$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x}{7x-3} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}{\frac{7x}{x^2}-\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x}}{\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{3+0^+}{0^+-0} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Alternativa: dividir por el menor de los términos de mayor grado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x}-\frac{5x}{x}}{\frac{7x}{x}-\frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-5}{7-\frac{3}{x}} = \frac{+\infty-5}{7-0^+} = +\infty$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{12x^3-9x}{4x^3+8} = \dfrac{\infty-\infty}{\infty+8} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{12x^3}{x^3}-\frac{9x}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{8}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{12-\frac{9}{x^2}}{4-\frac{8}{x^3}} = \frac{12-0^+}{4-0^+} = \frac{12}{4} = 3$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x-8}{10x^3+8} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x}{x^3}-\frac{8}{x^3}}{\frac{10x^3}{x^3}+\frac{8}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{10+\frac{8}{x^3}} = \frac{0^+-0^+}{10+0^+} = \frac{0}{10} = 0$$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+3)^2+(x-5)^2}{2(x-1)(x+3)} = \dfrac{\infty+\infty}{2\cdot\infty\cdot\infty} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+6x+9+x^2-10x+25}{2(x^2+3x-x-3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-4x+34}{2x^2+4x-12} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{34}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{12}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{4}{x}+\frac{34}{x^2}}{2+\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}} = \frac{2-0+0}{2+0-0} = 1$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+5)(x-5)+3x^4}{(x+2)^2} = \dfrac{\infty+\infty}{\infty} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-25+3x^4}{x^2+2x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^4}{x^4}+\frac{x^2}{x^4}-\frac{25}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}+\frac{2x}{x^4}+4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}-\frac{25}{x^4}}{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+4} = \frac{3+0^+-0^+}{0^++0^++4} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

(7) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x}{x^2-4} = \dfrac{8}{0}$ Indet $<\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}$?

Estudiamos límites laterales

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{4x}{x^2-4} = \frac{8^-}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{4x}{x^2-4} = \frac{8^+}{0^+} = +\infty$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^2-1}{x} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminación

Factorizamos y simplificamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} x+2 = 0+2 = \underline{\underline{2}}$$

(9) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-2x-4} = \dfrac{4+6-10}{8-4-4} = \dfrac{0}{0}$ Indet.

Factorizamos y simplificamos.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & -10 \\ 2 & & 2 & 10 \\ \hline & 1 & 5 & \lfloor 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 2 & -2 & -4 \\ 2 & & 4 & 4 \\ \hline & 2 & 2 & \lfloor 0 \end{array}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{\cancel{(x-2)}(2x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{2x+2} = \frac{7}{6}$$

(10) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminación

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Factorizamos y simplificamos

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} x^2+x+1 = 1+1+1 = \boxed{3}$$

(11) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \dfrac{4-10+6}{4-14+14} = \dfrac{0}{0}$ Indet.

Factorizamos y simplificamos

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & -7 & 10 \\ 2 & & 2 & -10 \\ \hline & 1 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-5)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

(12) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-6x^2+x+14}{x^3+x^2-12} = \dfrac{2^3-6\cdot 2^2+2+14}{2^3+2^2-12} = \dfrac{8-24+16}{8+4-12} = \dfrac{0}{0}$ Ind.

Usamos Ruffini para factorizar (y luego simplificamos)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 1 & 14 \\ 2 & & 2 & -8 & -14 \\ \hline & 1 & -4 & -7 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & 0 & -12 \\ 2 & & 2 & 6 & 12 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2-4x-7)}{\cancel{(x-2)}(x^2+3x+6)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4x-7}{x^2+3x+6} = \frac{4-8-7}{4+12+6} = \frac{-11}{22} = -\frac{1}{2}$$

LÍMITES IRRACIONALES (Ficha 7. Ej. 2)

(1) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$ Indet.

Multiplicamos num y den. por el conjugado

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1-2^2}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\cdot(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{0}{0}$ Indet.

Multiplicamos num. y den. por el conjugado y simplificamos.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

(3) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{4}-2}{\sqrt{1}-1} = \frac{0}{0}$ Indet

Multiplicamos num. y den. por el conjugado y simplificamos

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{3x+1}-2)\cdot(\sqrt{3x+1}+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{3x+1}+2)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x+1-2^2)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(4) $\lim_{x\to 3} \frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9} = \frac{0}{0}$ Indet.

Factorizamos, Multiplicamos num y denom. por el conjugado y simplif.

$$\lim_{x\to 3} \frac{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})}{(x-3)(x+3)(1+\sqrt{x-2})} = \lim_{x\to 3} \frac{1-(x-2)}{(x-3)(x+3)(1+\sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)}{\cancel{(x-3)}(x+3)(1+\sqrt{x-2})} = \lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x+3)(1+\sqrt{x-2})} = \frac{-1}{6\cdot 3} =$$

$$= -\frac{1}{18}$$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-2} - x\right) = \infty - \infty$ Indet.

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2} - x\right)\left(\sqrt{x^2-2} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2-2} + x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2-x^2}{\left(\sqrt{x^2-2} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{x^2-2} + x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\infty+\infty} = \frac{-2}{\infty-\infty} = 0^-$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}\right) = \infty - \infty$ Indet

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}\right)}{\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+3-(x+2)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} = \frac{1}{\infty+\infty} = 0$$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \infty - \infty$ Indet

Multiplicamos y dividimos por el conjugado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Indet}$$

Dividimos por la mayor potencia de x.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x/x}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right) = \infty - \infty$ Indet.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-(x^2-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\infty+\infty} = 0$$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-3}+6x}{2x-5} = \dfrac{\infty+\infty}{\infty}$ Indet

Dividimos num y den por la potencia de x de mayor grado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}+\frac{6x}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{5}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+6}{2-\frac{5}{x}} = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x+1}{\sqrt{25x^2+7}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indet.

Dividimos num y denom. por la máx. potencia de x.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{10x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{25x^2}{x^2}+\frac{7}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{10+\frac{1}{x}}{\sqrt{25+\frac{7}{x^2}}} = \frac{10}{5} = 2$$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+1}+4}{6+\sqrt{x^2-3}} = \dfrac{\infty+4}{6+\infty} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x}}{\frac{6}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x}}{\frac{6}{x}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} = \frac{3+0^+}{0^++1} = 3$$

(12) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+\sqrt{x^2+3}}{8x+\sqrt{16x^2-1}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Indet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}}{\frac{8x}{x}+\sqrt{\frac{16x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{8+\sqrt{16-\frac{1}{x^2}}} = \frac{5+1}{8+4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

FICHA 8

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{2x-1} - \dfrac{x^2+1}{2x+1}\right) = \infty - \infty$ - Indet

Hacemos la operación para convertirla en una racional típica.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2x+1)-(x^2+1)(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x^2-(2x^3-x^2+2x-1)}{4x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-2x+1}{4x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \frac{2-0+0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

LÍMITES EXPONENCIALES (Ficha 8, Ej. 2)

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{2x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{2x-1}\right)^{\lim_{x\to\infty} x+2} = 2^{\infty} = \boxed{\infty}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = 3^{0^+} = \boxed{1}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{2x-1}\right)^{4x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{2x-1}\right)^{\lim_{x\to\infty} 4x} = \infty^{\infty} = \boxed{\infty}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{4x-1}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{4x-1}\right)^{\lim_{x\to\infty} 3x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\infty} = \boxed{0}$

(5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{x^2-2}\right)^{6x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{x^2-2}\right)^{\lim_{x\to\infty} 6x+2} = 0^{\infty} = \boxed{0}$

(6) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{2x^2+1}\right)^{\frac{4x-1}{2x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{2x^2+1}\right)^{\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{2x}} = 0^{2} = \boxed{0}$

(7) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x+3}\right)^{4x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x+3}\right)^{\lim 4x} = 1^{\infty}$ Indet.

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{5}}\right)^{4x\cdot\frac{x+3}{5}\Big/\frac{x+3}{5}} = \lim_{x\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{5}}\right)^{\frac{x+3}{5}}}_{e}\Bigg]^{\frac{20x}{x+3}} = \boxed{e^{20}}$

(8) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{5x-1}\right)^{\frac{2x}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{5x-1}\right)^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}} = 1^{2} = \boxed{1}$

(9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{7x+4}\right)^{\frac{2x^3}{x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{7x+4}\right)^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x+1}} = 1^{\infty}$ Indet.

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{7x+4}{3}}\right)^{\left(\frac{7x+4}{3}\cdot\frac{2x^3}{x+1}\right)\Big/\frac{7x+4}{3}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{7x+4}{3}}\right)^{\frac{7x+4}{3}}\right]^{\frac{6x^3}{(x+1)(7x+4)}} =$

$= e^{\infty} = \boxed{\infty}$

(10) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{\lim_{x\to\infty} 2x} = 1^{\infty}$ Indet.

Aplico la fórmula.

$\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)}_{f(x)}^{2x = g(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} g(x)[f(x)-1]} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{x+1}} = \boxed{e^{6}}$

$g(x)\cdot[f(x)-1] = 2x\cdot\left[\frac{x-2}{x+1}-1\right] = 2x\cdot\left[\frac{x-2-(x+1)}{x+1}\right] =$

$= 2x\cdot\left(\frac{-3}{x+1}\right) = \frac{-6x}{x+1}$

(11) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{5x+1} = 1^{\infty}$ [Indet] $= e^{\lim_{x\to\infty} g(x)\cdot[f(x)-1]}$

$g(x)\cdot[f(x)-1] = (5x+1)\cdot\left[\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right] = (5x+1)\left[\frac{x^2+1-(x^2-2)}{x^2-2}\right] =$

$= (5x+1)\cdot\left[\frac{3}{x^2-2}\right] = \frac{15x+3}{x^2-2}$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{5x+1} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{15x+3}{x^2-2}} = e^{0} = \boxed{1}$

(12) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+7}{5x^2+3}\right)^{2x^3-3} = 1^{\infty}$ [Indet] $= e^{\lim_{x\to\infty} g(x)[f(x)-1]}$

$g(x)[f(x)-1] = (2x^3-3)\cdot\left[\frac{5x^2+7}{5x^2+3}-\frac{5x^2+3}{5x^2+3}\right] =$

$= (2x^3-3)\cdot\left[\frac{4}{5x^2+3}\right] = \frac{8x^3-12}{5x^2+3}$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+7}{5x^2+3}\right)^{2x^3-8} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-12}{5x^2+3}} = e^{\infty} = \underline{\infty}$

3 Hallar "a" para que se verifique

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2}$$

1^{∞} $\qquad$ 1^{∞} Indet.

Calculemos por separado e igualemos al final.

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^{x} = e^{\lim_{x\to\infty} x\cdot\left[\frac{4x+5-(4x+3)}{4x+3}\right]} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x+3}} = e^{\frac{1}{2}}$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2} = e^{\lim_{x\to\infty} ax^2\left[\frac{4x^2+1-(4x^2+\pi)}{4x^2+\pi}\right]} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2(1-\pi)}{4x^2+\pi}} = e^{\frac{a(1-\pi)}{4}}$

$\frac{1}{2} = \frac{a(1-\pi)}{4}$ $\qquad 4 = 2a(1-\pi)$ $\qquad \boxed{a = \frac{4}{2(1-\pi)}}$

4 Hallar k para que $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = e^{2}$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to\infty}(kx+5)\left[\frac{x+3-x}{x}\right]} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3kx+15}{x}} = e^{3k}$

$2 = 3k \iff \boxed{k = \frac{2}{3}}$

Continuidad (Ficha 9)

2

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \le 0 \rightarrow \text{Recta, continua} \\ x^2-3x+2 & \text{si } x > 0 \rightarrow \text{Parábola, continua} \end{cases}$$

Estudiar continuidad en $x=0$ y representarla posteriormente.

$\boxed{x=0}$

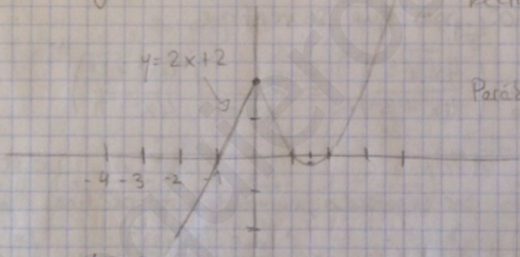
1) $f(0) = 2\cdot 0 + 2 = 2$.

2) ¿$\exists \lim_{x\to 0} f(x)$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) \underset{1^{\text{er}}\text{ tramo}}{=} \lim_{x\to 0^-} 2x+2 = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) \underset{2^{\text{o}}\text{ tramo}}{=} \lim_{x\to 0^+} x^2-3x+2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

3) Como $f(0) = 2 = \lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$.

Representación gráfica



Recta $\begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases}$

Parábola $\begin{cases} a>0 \ \cup \\ \text{Vértice } x=\frac{3}{2} \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + \frac{8}{4} \\ \text{Ptos corte} \\ x^2-3x+2=0 \\ \hookrightarrow x=1,\ x=3 \end{cases}$

3 Sea $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x+1} & \text{si } x<3 \\ \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{si } x>3 \end{cases}$

Estudiar la continuidad en $x=3$, clasificar la discontinuidad.

$\boxed{x=3}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -2 & -3 \\ 3 & & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

1) $\nexists f(3) \Rightarrow$ No es continua

2) ¿$\exists \lim_{x\to 3} f(x)$? $\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x) \overset{1^{\text{er}}\text{ tramo}}{=} \lim_{x\to 3^-} \sqrt{5\cdot 3+1} = 4 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) \underset{2^{\text{o}}\text{ tramo}}{=} \lim_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \dfrac{0}{0} = \end{array}\right.$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3} x+1 = 4.$$

Es una discontinuidad evitable. Bastaría con dar el valor $f(3)=4$ para que f fuese continua en $x=3$.

$\boxed{4}$ $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$ no está definida en $x=3 \Rightarrow$ No es continua

¿Qué valor se le debe dar a $f(3)$ para que f fuese continua?

Dom $f=\mathbb{R}\setminus\{3\} \Rightarrow$ 1) $\nexists f(3)$

2) Veamos si $\exists \lim_{x\to 3} f(x)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\frac{6}{9+9+9}=\frac{6}{27}$$

Factorizamos con Ruffini

	1	0	0	-27
3		3	9	27
	1	3	9	0

3) Bastaría con definir $f(3)=\frac{6}{27}$ y así $f(3)=\lim_{x\to 3} f(x)$ y f sería continua en $x=3$.

$\boxed{5}$ Estudiar si $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-1}$ es continua en $x=1$ y $x=-1$.

Si no, analizar el tipo de discontinuidad.

Dom $f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \Rightarrow f$ no es continua en $x=1$ ni en $x=-1$

$\boxed{x=+1}$

¿$\exists \lim_{x\to 1} f(x)$?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-9}{x^2-1}=\frac{1-9}{0}=\frac{-8}{0}\ \text{Indet.} \begin{cases}-\infty \\ +\infty\end{cases} ?$$

Estudiamos límites laterales

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-9}{x^2-1}=\frac{-8}{0^-}=+\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-9}{x^2-1}=\frac{-8}{0^+}=-\infty$$

Es una discontinuidad no evitable de salto infinito.

$\boxed{x=-1}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-9}{x^2-1}=\frac{+1-9}{0}=\frac{-8}{0}\ \text{Indet.} \begin{cases}+\infty ? \\ -\infty ?\end{cases}$$

Estudiamos límites laterales

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-9}{x^2-1}=\frac{-8}{0^+}=-\infty \qquad \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-9}{x^2-1}=\frac{-8}{0^-}=+\infty$$

Es una discontinuidad no evitable de salto infinito.

6 Sea $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$. Hallar dominio y el valor del límite en los puntos donde f no está definida.

$Dom\, f = \mathbb{R} \setminus \{x^2+x-2=0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$x^2+x-2=0 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 2\cdot 1}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$\boxed{x=-2}$

$\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \frac{4-4-3}{0} = \frac{-3}{0} = \text{Indet.} < {\infty \atop -\infty} ?$

$\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x^2+2x-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x^2+2x-3}{\underbrace{(x+2)(x-1)}_{0^-}} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$

Es una discontinuidad de salto infinito.

$\boxed{x=1}$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \frac{1+2-3}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indet.}$

Factorizamos y simplificamos → Ruffini

$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & -3 \\ 1 & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x-1)} = \frac{4}{3}$

Es una discontinuidad evitable. Bastaría con dar a función el valor $f(1) = \frac{4}{3}$ para que fuera continua.

Ficha 10. Continuidad con parámetros

1 Calcular a para que $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \le 1 \\ 3-ax^2 & si\ x>1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$.

1) $f(1) = 1+1 = 2$.

2) ¿∃ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \underset{1^a\ rama}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} x+1 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \underset{2^a\ rama}{=} \lim\limits_{x\to 1^+} 3-ax^2 = 3-a \end{array}\right\} 2 = 3-a \Rightarrow a=1$

3) Si $a=1 \Rightarrow f(1) = 2 = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y f es continua en $x=1$

$\boxed{2}$ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x}{x} & \text{si } x<0 \\ k & \text{si } x=0 \\ 2x+3 & \text{si } x>0 \end{cases}$ Calcular k para que f sea continua en x=0

1) $f(x)=k$

2) $¿\exists \lim_{x\to 0} f(x)? \iff \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

• $\lim_{x\to 0^-} f(x) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+3x}{x} = \dfrac{0}{0} = \text{Indet} =$ 1ª rama

Factorizamos y simplificamos

$= \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x(x+3)}{x} = \lim_{x\to 0} x+3 = 3$ $\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=3$

• $\lim_{x\to 0^+} f(x) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0^+} 2x+3 = 3$ 3ª rama

3) Para que sea continua en $x=0$ $\lim_{x\to 0} f(x) = 3 = f(0) = k$

$\Rightarrow \boxed{k=3}$

$\boxed{3}$ Calcula a y b para que $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\le x<1 \\ 2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$ sea continua y dibuja la gráfica

f(x) es una función a trozos continua en cada rama: 1ª rama es una parábola, 2ª rama es una recta, 3ª rama es cte. Por tanto sólo se debe estudiar la continuidad en los puntos donde se unen las ramas: $x=0$, $x=+1$

$\boxed{x=0}$ 1) $f(0)=ax+b$ $\Rightarrow 3) f(0) = -1 = \lim_{x\to 0} f(x)$ Cont $x=0$

2) $\lim_{x\to 0^-} f(x) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0^-} x^2+2x-1 = -1$ 1ª rama $\Rightarrow \boxed{b=-1}$

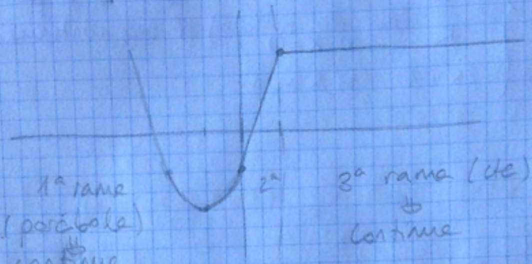
$\lim_{x\to 0^+} f(x) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0^+} ax+b = b$ 2ª rama

$\boxed{x=1}$ 1) $f(1)=2$

2) $\lim_{x\to 1^-} f(x) \overset{2^a \text{ rama}}{=} \lim_{x\to 1^-} ax-1 = a-1$ $\quad a-1=2 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 1^+} 2 = 2$ 3ª rama

Para $a=3$ y $b=-1$, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$



Parábola

$V: x = \frac{-2}{2} = -1$

$V: (-1, -2)$

$x^2 + 2x - 1 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$

$\boxed{4}$ Calcular a y b para que f sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+b}{x-1} & \text{si } x \le 0 \rightarrow \text{Definida en } \mathbb{R}\setminus\{1\} \checkmark \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si } 0 < x < 1 \rightarrow \text{Definida en } \mathbb{R}\setminus\{2\} \checkmark \\ \dfrac{x^2+1}{ax} & \text{si } x \ge 1 \rightarrow \text{Definida en } \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$$

Por tanto $\text{dom } f = \mathbb{R}$ ya que los puntos que anulan los denominadores caen fuera de las ramas.

1ª rama | 0 | 2ª rama | 1 | 3ª rama $\Rightarrow$ Estudiamos $x=0$ $x=1$

continua — cont. — continua

$\boxed{x=0}$ (1) $f(0) = \frac{3\cdot 0 + b}{0-1} = -b$ $\quad f(0) = -2 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (3)

(2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \underset{1^a \text{ rama}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+b}{x-1} = \frac{b}{-1} = -b$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \underset{2^a \text{ rama}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4}{x-2} = \frac{4}{-2} = -2$

$\boxed{b=2}$ f cont. en $x=0$

$\boxed{x=1}$ (1) $f(1) = \frac{1^2+1}{a1} = \frac{2}{a}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \underset{2^a \text{ rama}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{4}{x-2} = \frac{4}{1-2} = -4$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \underset{3^a \text{ rama}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+1}{ax} = \frac{2}{a}$

$\Rightarrow -4 = \frac{2}{a} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$

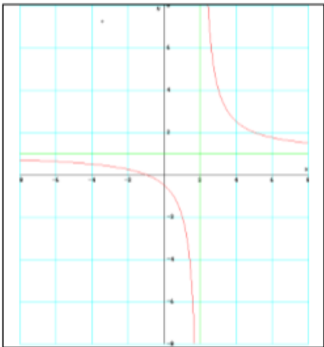
(3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -4 = f(1) = \frac{2}{-1/2} = -4 \checkmark \Rightarrow f$ cont. en $x=1$

5. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones. Representa las asíntotas e intenta esbozar la gráfica de las funciones.

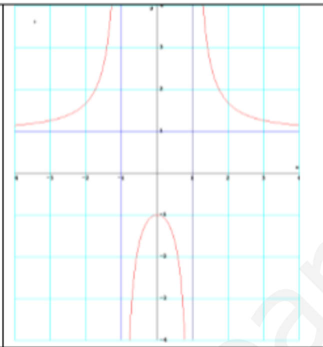
a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ e) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ f) $f(x)=\ln(x^2-4)$

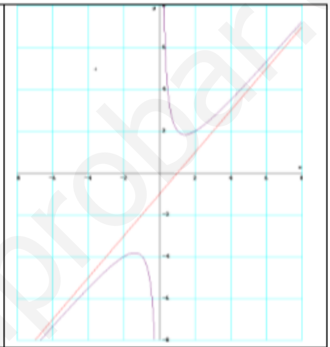
g) $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$ h) $f(x)=e^{-x^2}$ i) $f(x)=\operatorname{cosec}(x)$



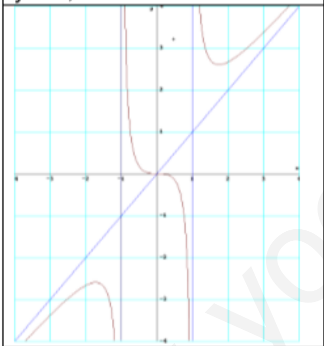
y = 1, x = 2



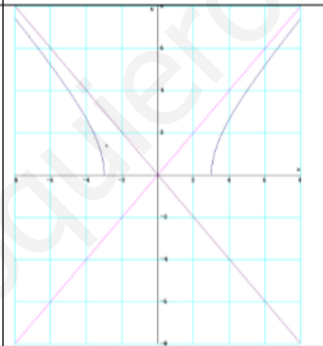
y = 1, x = 1, x = -1



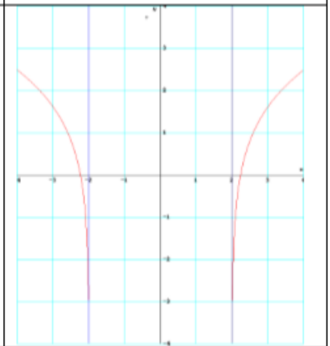
x = 0, y = x - 1



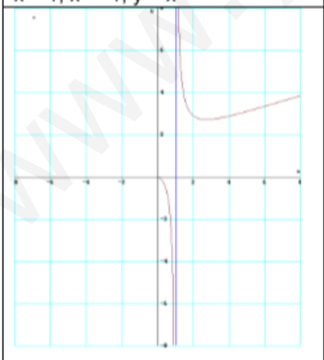
x = 1, x = -1, y = x



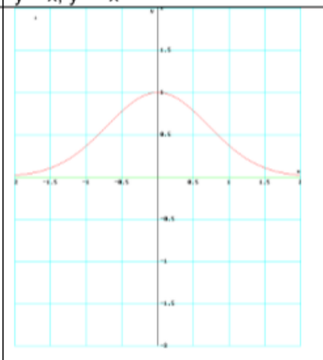
y = x, y = -x



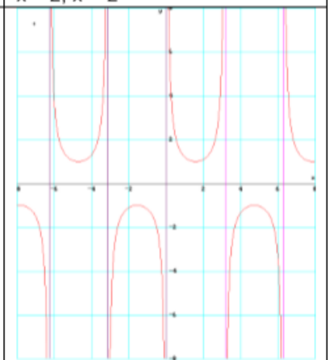
x = 2, x= -2



x = 1



y = 0



X = kπ, para todo k entero