GEOMETRÍA ANALÍTICA

NOMBRE Y APELLIDOS____

1) Un segmento tiene por extremos $A(2,4)$ y $B(0,5)$. Calcula las coordenadas de los puntos que lo dividen en cuatro partes iguales.

(1,75 puntos)

2) Calcula:

a) El ángulo formado por las rectas $r: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-4}$ y $s: (x,y) = (-1,2) + t\left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

(1 punto)

b) La distancia del punto $P(-2,3)$ a la recta $y = -4x + 2$

(0,75 puntos)

3) Halla las ecuaciones, paramétricas, continua, punto-pendiente y general de la recta que pasa por el punto $P(5,-1)$ y tiene pendiente $\frac{2}{3}$.

(2 puntos)

4) Calcula el valor de a para que las rectas $r: 3x - 4y + 5 = 0$ y $s: 6x - ay + 3 = 0$ sean:

a) Paralelas

b) Perpendiculares.

c) Se corten en el punto $P(1,2)$

(2,25 puntos)

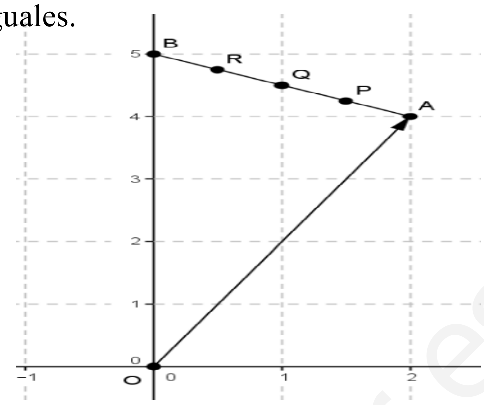
5) Dado el triángulo de vértices $A(1,1)$, $B(1,4)$ y $C(5,2)$, calcula el baricentro (es el punto intersección de las medianas)

<u>Nota</u>: mediana es la recta que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto

(2,25 puntos)

EXAMEN RESUELTO

1) Un segmento tiene por extremos $A(2,4)$ y $B(0,5)$. Calcula las coordenadas de los puntos que lo dividen en cuatro partes iguales.



Solución:

Hallamos el vector $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,5) - (2,4) = (-2,1)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (2,4) + \frac{1}{4}(-2,1) = (2,4) + \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{17}{4}\right) \Rightarrow \boxed{Q = \left(\frac{3}{2}, \frac{17}{4}\right)}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} = (2,4) + \frac{2}{4}(-2,1) = (2,4) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(1, \frac{9}{2}\right) \Rightarrow \boxed{P = \left(1, \frac{9}{2}\right)}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = (2,4) + \frac{3}{4}(-2,1) = (2,4) + \left(\frac{-6}{4}, \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{4}, \frac{19}{4}\right) \Rightarrow \boxed{R = \left(\frac{1}{2}, \frac{19}{4}\right)}$$

2) Calcula:

a) El ángulo formado por las rectas $r : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-4}$ y $s : (x,y) = (-1,2) + t\underbrace{\left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}\right)}_{\overrightarrow{v_s}}$

Solución:

$$\overrightarrow{v_r} = (1,-4)$$

$\overrightarrow{v_s} = \left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ *por lo que también será vector director su doble* $\overrightarrow{v_s} = (5,-3)$

FORMA 1:

$$\cos\left(\widehat{rs}\right) = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{(1,-4)\cdot(5,-3)}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{34}} = \frac{5+12}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{2\cdot 17}} = \frac{17}{17\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces $\widehat{rs} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{45^{o}}$

FORMA 2:

$m_r = -4; \qquad m_s = \frac{-3}{5}$

$$tg\left(\widehat{rs}\right) = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} = \frac{-4+\frac{3}{5}}{1+(-4)\cdot\frac{-3}{5}} = \frac{\frac{-17}{5}}{1+\frac{12}{5}} = \frac{\frac{-17}{5}}{\frac{17}{5}} = -1$$

Entonces $\widehat{rs} = arctg(-1) = -45^{o}$

El ángulo que forman es $\boxed{45^{o}}$, ya que el signo solo indica el sentido en el que estamos midiendo el ángulo.

b) La distancia del punto $P(-2,3)$ a la recta $y = -4x+2$

Solución:

Hallamos la ecuación general de la recta: $-4x - y + 2 = 0$

$$d(P,r) = \frac{|4\cdot(-2)+3-2|}{\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}} = \frac{|-8+3-2|}{\sqrt{17}} = \frac{|-7|}{\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{17}} = \boxed{\frac{7\sqrt{17}}{17}}\,u$$

3) Halla las ecuaciones, paramétricas, continua, punto-pendiente y general de la recta que pasa por el punto $P(5,-1)$ y tiene pendiente $\frac{2}{3}$.

Solución: Como $m = \frac{2}{3} \Rightarrow v = (3,2)$

Ecuaciones paramétricas: $\boxed{\begin{cases} x = 5+3t \\ y = -1+2t \end{cases}; \quad \forall t \in \mathbb{R}}$

Ecuación continua: $\boxed{\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{2}}$

Ecuación punto-pendiente: $\boxed{y+1 = \frac{2}{3}(x-5)}$

Ecuación general (despejando de la continua)

$2x - 10 = 3y + 3 \Rightarrow \boxed{2x - 3y - 13 = 0}$

4) Calcula el valor de a para que las rectas $r: \overbrace{3}^{A}x \overbrace{-4}^{B}y + 5 = 0$ y $s: \overbrace{6}^{A}x \overbrace{-a}^{B}y + 3 = 0$ sean:

a) Paralelas (las coordenadas han de ser proporcionales)

$$\frac{3}{6} = \frac{-4}{-a} \Rightarrow -3a = -24 \Rightarrow a = \frac{-24}{-3} \Rightarrow \boxed{a = 8}$$

b) Perpendiculares (el producto escalar de los vectores directores ha de ser cero)

$$\overrightarrow{v_r} = (-B, A) = (4,3); \qquad \overrightarrow{v_s} = (a,6)$$

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Rightarrow (4,3)\cdot(a,6) = 4a + 18 = 0 \Rightarrow 4a = -18 \Rightarrow a = \frac{-18}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{-9}{2}}$$

c) Se corten en el punto $P(1,2)$

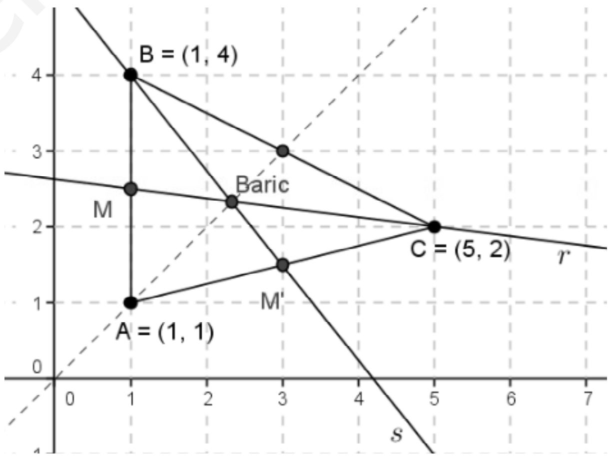
El punto $P(1,2)$ ha de pertenecer a las dos rectas.

Para que $P \in s \ \Rightarrow \ s: 6\cdot 1 - a\cdot 2 + 3 = 0 \ \Rightarrow -2a = -9 \Rightarrow \boxed{a = \frac{9}{2}}$

5) Dado el triángulo de vértices $A(1,1)$, $B(1,4)$ y $C(5,2)$, calcula el baricentro.

Solución:

Como las tres medianas se cortan en el baricentro nos basta con hallar el punto de corte de dos de ellas.



Hallamos la mediana del lado AB (r)

Punto medio del lado AB,

$$M = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MC} = (5,2) - \left(1, \frac{5}{2}\right) = \left(\overbrace{4}^{-B}, \overbrace{\frac{-1}{2}}^{A}\right)$$

Por lo que la mediana que pasa por M y C tiene la ecuación:

$$r: \frac{-1}{2}x - 4y + C = 0 \xrightarrow{C(5,2)\in r} \frac{-1}{2}\cdot 5 - 4\cdot 2 + C = 0$$

$$-\frac{5}{2} - 8 + C = 0 \Rightarrow \frac{-21}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{21}{2}$$

Entonces: $r: \frac{-1}{2}x - 4y + \frac{21}{2} = 0 \ \Rightarrow \ \underline{r: -x - 8y + 21 = 0}$

<u>Hallamos la mediana del lado AC (s)</u>

Punto medio del lado AC, $M' = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+2}{2} \right) = \left(3, \frac{3}{2} \right)$

$$\overrightarrow{M'B} = (1,4) - \left(3, \frac{3}{2} \right) = \left(\overbrace{-2}^{-B}, \overbrace{\frac{5}{2}}^{A} \right)$$

Por lo que la mediana que pasa por M' y B tiene la ecuación:

$$s: \frac{5}{2}x + 2y + C = 0 \xrightarrow{B(1,4)\in s} \frac{5}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 4 + C = 0$$

$$\frac{5}{2} + 8 + C = 0 \Rightarrow \frac{21}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{-21}{2}$$

Entonces: $s: \frac{5}{2}x + 2y - \frac{21}{2} = 0 \ \Rightarrow \ \underline{s: 5x + 4y - 21 = 0}$

<u>Hallamos el baricentro</u>, calculando el punto de corte de las dos medianas:

$$\begin{cases} -x - 8y + 21 = 0 \\ 5x + 4y - 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x - 40y + 105 = 0 \\ \underline{\ 5x + 4y - 21 = 0\ } \end{cases}$$

$$-36y + 84 = 0 \Rightarrow y = \frac{84}{36} = \frac{21}{9} \Rightarrow y = \frac{7}{3}$$

$$-x - 8\frac{7}{3} + 21 = 0 \Rightarrow -\frac{56}{3} + 21 = x \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

Por lo tanto el $\boxed{\textbf{BARICENTRO} \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3} \right)}$