EXAMEN GEOMETRÍA ANALÍTICA

1) Un segmento tiene por extremos A(-1, 6) y B(9, 0). Calcula las coordenadas de los puntos que lo dividen en cuatro partes iguales.

$$\overrightarrow{AB} = (10,-6)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (-1,6) + \frac{1}{4}(10,-6) = (-1,6) + \left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$$

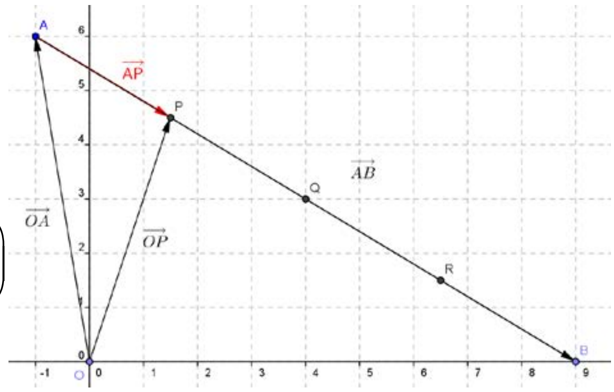
$$\boxed{P = \left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right) = (4,3)$$

$$\boxed{Q = (4,3)}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{AP} = (4,3) + \left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{13}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{R = \left(\frac{13}{2},\frac{3}{2}\right)}$$



2) Calcula el valor de k para que los puntos de coordenadas A (1, 7), B (–3, 4), C (k, 5) estén alineados.

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-4,-3) \\ \overrightarrow{BC} = (k+3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{coordenadas} \\ \text{proporcionales} \end{array}\right) \Rightarrow \frac{-4}{k+3} = \frac{-3}{1} \Rightarrow -4 = -3k-9 \Rightarrow 3k = -5 \Rightarrow \boxed{k = \frac{-5}{3}}$$

3) Halla las ecuaciones, vectorial, paramétrica, continua y general de la recta que pasa por el punto $P(3,-1)$ y $Q(7,5)$.

$$\overrightarrow{PQ} = (4,6)$$

<u>Ecuación vectorial</u>: $\boxed{(x,y) = (3,-1) + \lambda(4,6) \qquad \forall\lambda \in R}$

<u>Ecuaciones paramétricas:</u> $\boxed{\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = -1 + 6\lambda \end{cases} \qquad \forall\lambda \in R}$

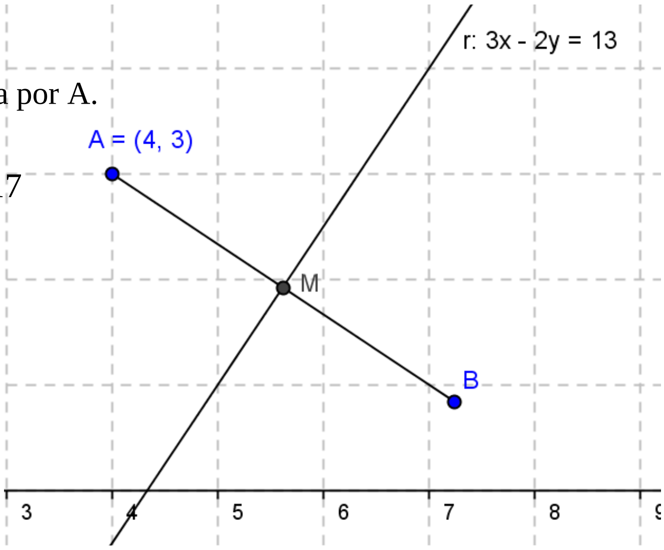
<u>Ecuación continua:</u> $\boxed{\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{6}}$

$$6x-18=4y+4$$

Ecuación general: $$6x-4y-22=0$$

$$\boxed{3x-2y-11=0}$$

4) Calcula el simétrico del punto $A=(4,3)$ respecto de la recta $r:3x-2y-13=0$



1ª FORMA Sea $B(a,b)$ el simétrico:

- Recta, s, perpendicular a r que pasa por A.

$s:2x+3y+C=0$

$(pasa\ por\ A)\to 8+9+C=0\to C=-17$

$s:2x+3y-17=0$

- M es el punto de corte de r y s.

$$\begin{cases} r:3x-2y-13=0 \\ s:2x+3y-17=0 \end{cases} \to \text{Resolviendo}$$

$$x=\frac{73}{13};\ y=\frac{25}{13}\Rightarrow M\left(\frac{73}{13},\frac{25}{13}\right)$$

Por lo tanto:

$$M\left(\frac{73}{13},\frac{25}{13}\right)=\left(\frac{4+a}{2},\frac{3+b}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}146=52+13a\Rightarrow 94=13a\Rightarrow a=\dfrac{94}{13} \\ 50=39+13b\Rightarrow 11=13b\Rightarrow b=\dfrac{11}{13}\end{cases}$$

Así que $\boxed{B=\left(\frac{94}{13},\frac{11}{13}\right)}$

2ª FORMA

Para calcular el simétrico, $B=(a,b)$, se ha de cumplir que $\begin{cases} B\in s \\ d(A,r)=d(B,r) \end{cases}$

- Recta ,s, perpendicular a r que pasa por A:

$$s:2x+3y+C=0 \underset{\substack{pasa \\ por\ A}}{\Rightarrow} 8+9+C=0\Rightarrow C=-17$$

$$s:2x+3y-17=0$$

- $B\in s\Rightarrow \boxed{2a+3b-17=0}$
- $d(A,r)=d(B,r)$

$$\left.\begin{aligned} d(A,r)&=\frac{|12-6-13|}{\sqrt{9+4}}=\frac{7}{\sqrt{13}} \\ d(B,r)&=\frac{|3a-2b-13|}{\sqrt{9+4}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{|3a-2b-13|}{\sqrt{9+4}}=\frac{7}{\sqrt{13}}\Rightarrow|3a-2b-13|=7\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{3a-2b-13=7}$$

- Resolvemos el sistema para hallar a y b

$$\begin{cases} 2a+3b-17=0 \\ 3a-2b-13=7 \end{cases} \Rightarrow (resolviendo) \Rightarrow a=\frac{94}{13},\ b=\frac{11}{13}$$

$$\boxed{B\left(\frac{94}{13},\frac{11}{13}\right)}$$

5) Calcula a para que las rectas $r: 2x-y-4=0$ y $s: ax+3y+2=0$:

a) Sean perpendiculares b) Formen un ángulo de 45º.

a)

$$\overrightarrow{v_r}=(1,2)\Rightarrow m_r=2$$

$$\overrightarrow{u_s}=(-3,a)\Rightarrow m_s=-\frac{a}{3}$$

$$\begin{pmatrix} para\ ser \\ perpendiculares \end{pmatrix} \Rightarrow m_r\cdot m_s=-1\Rightarrow 2\cdot\frac{-a}{3}=-1\Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{2}}$$

b)

$$tg\,\alpha=\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\Rightarrow tg45^{o}=\frac{2-\frac{-a}{3}}{1+2\frac{-a}{3}}\Rightarrow 1=\frac{\frac{6+a}{3}}{\frac{3-2a}{3}}\Rightarrow 1=\frac{6+a}{3-2a}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-2a=6+a\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

2) Sea el triángulo isósceles ABC, cuyo lado desigual es AB. Conocemos $A(-2,2)$, $B(4,0)$ y sabemos que C pertenece a la recta $r: 3x+3y-22=0$

<u>SUBIR NOTA:</u> Halla el área del triángulo

<u>Solución</u>

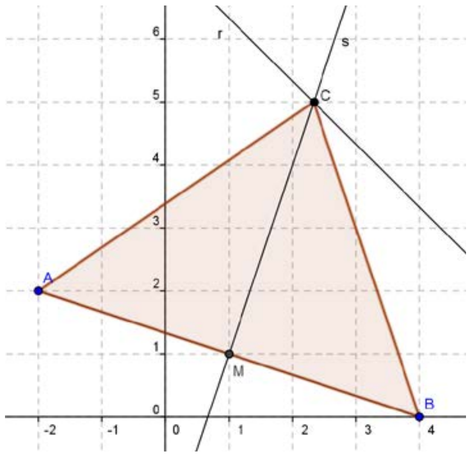
- Calculamos la ecuación de la mediatriz, s, del segmento $\overline{AB}$.

Sea M el punto medio de $\overline{AB}$

$$M=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{2+0}{2}\right)=(1,1)$$

El vector $\overrightarrow{AB}(6,-2)\Rightarrow \underset{-B,A}{\vec{n}}(2,6)$

La ecuación de la recta s será:



$6x-2y+D=0$ (como pasa por M)
$6-2+D=0$
$D=-4$
$\boxed{s: 6x-2y-4=0}$

- C será el punto de corte de r y s $(C = r \cap s)$

$$\left.\begin{array}{l} r: 3x+3y-22=0 \\ s: 6x-2y-4=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -6x-6y+44=0 \\ \underline{\ 6x-2y-4=0\ } \end{array}\right\} \Rightarrow 6x-10-4=0 \Rightarrow 6x=14 \Rightarrow x=\frac{7}{3}$$

$$-8y+40=0 \Rightarrow y=5$$

Por lo tanto el punto $\boxed{C=\left(\frac{7}{3},5\right)}$

<u>SUBIR NOTA:</u>

- La base mide $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
- La altura mide $\left|\overrightarrow{MC}\right| = \left|\left(\frac{4}{3},4\right)\right| = \sqrt{\frac{16}{9}+16} = \sqrt{\frac{160}{9}} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$

Por lo tanto <u>el área del triángulo será</u>:

$$A = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MC}\right|}{2} = \frac{2\sqrt{10} \cdot \frac{4\sqrt{10}}{3}}{2} = \frac{8\sqrt{10^2}}{6} = \frac{4 \cdot 10}{3} = \boxed{\frac{40}{3} u^2}$$