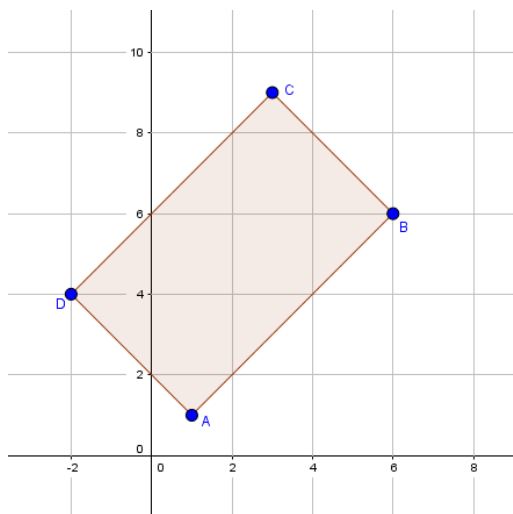


Ficha 5.3: Geometría Analítica Plana

1. Tres vértices consecutivos de un rectángulo son los puntos de coordenadas $(1, 1)$, $(6, 6)$ y $(3, 9)$. Halla las coordenadas del cuarto vértice.
2. Comprueba que el segmento que une los puntos medios de los lados AC y BC del triángulo $A(3, 5)$, $B(-1, -1)$, $C(6, 0)$ es paralelo al lado AB y de módulo su mitad.
3. Un vector tiene por extremos $A(2, 3)$ y $B(8, 6)$. Calcula las coordenadas de los puntos que lo dividen en tres partes iguales.
4. Sean los vectores $\vec{u} = (3, y)$ y $\vec{w} = (x, 5)$. Calcula x e y , de manera que ambos vectores sean perpendiculares y $|\vec{w}| = 13$.
5. Dada la recta de ecuación $2x - 6y + 3 = 0$, escríbela en forma continua, paramétrica, vectorial y explícita.
6. Calcula el valor de a para que la recta de ecuación $ax + 3y - 9 = 0$:
 - a) Pase por el punto $(3, 1)$.
 - b) Tenga de pendiente $m = -1$.
 - c) Uno de sus vectores sea $\vec{u} = (6, -4)$.
7. Halla el área del cuadrado, dos de cuyos lados están en las rectas $4x - y + 5 = 0$ y $8x - 2y + 12 = 0$.
8. Calcula m para que los vectores $\vec{a} = (8, -6)$ y $\vec{b} = (m, 3)$ formen un ángulo de 60° .
9. Calcula un vector \vec{a} que forme un ángulo de 30° con $\vec{b} = (3, -4)$ y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}|\vec{b}|$.
10. Demuestra que el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(9, -1)$ y $C(5, -5)$ es isósceles. ¿Es equilátero? ¿Cuáles son sus lados iguales? Calcula su área.

SOLUCIONES

1. Observamos el dibujo:



Como $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $ABCD$ es un rectángulo, se tiene que

$\overline{AB} = \overline{DC}$ (son equipolentes), luego:

$$(5, 5) = (3 - x, 9 - y) \Rightarrow \begin{cases} 5 = 3 - x \\ 5 = 9 - y \end{cases} \rightarrow (x, y) = (-2, 4)$$

Las coordenadas del punto D son:

$$D(-2, 4)$$

2. El punto medio del lado AC es: $M_{AC}\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$

El punto medio del lado BC es: $M_{BC}\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

El vector que determinan es: $\overline{M_{AC}M_{BC}} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) = (-2, -3)$

El vector \overline{AB} es: $\overline{AB} = (-1, -1) - (3, 5) = (-4, -6)$

Los lados AB y $M_{AB}M_{BC}$ son paralelos si los vectores AB y $M_{AB}M_{BC}$ lo son:

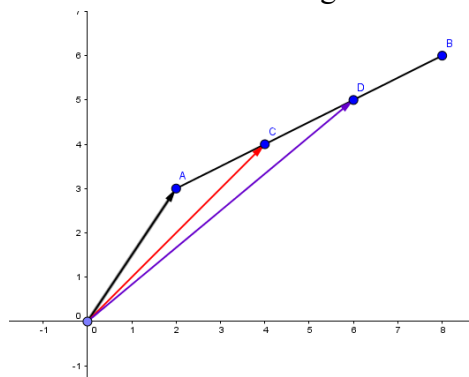
$$\overline{AB} \parallel \overline{M_{AB}M_{BC}} \Leftrightarrow \frac{-4}{-2} = \frac{-6}{-3} \Leftrightarrow 2 = 2$$

que es cierta, luego los lados son paralelos.

Por otro lado,

$$\left. \begin{aligned} |\overline{AB}| &= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = \sqrt{2^2 \cdot 13} = 2\sqrt{13} \\ |\overline{M_{AB}M_{BC}}| &= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\overline{M_{AB}M_{BC}}| = \frac{1}{2} |\overline{AB}|$$

3. Observamos la figura:



Se tiene que:

$$\overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$$

y como $\overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ resulta que:

$$\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$$

$$(2,3) + \frac{1}{3}(6,3) = (c_1, c_2) \text{ donde } C(c_1, c_2)$$

$$(2,3) + (2,1) = (c_1, c_2)$$

$$C(4,4)$$

Por otro lado:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD}$$

y como $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ resulta que:

$$\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OD}$$

$$(2,3) + \frac{2}{3}(6,3) = (d_1, d_2) \text{ donde } D(d_1, d_2)$$

$$(2,3) + (4,2) = (d_1, d_2)$$

$$D(6,5)$$

4. Se tiene que:

$$\begin{cases} \vec{u} = (3, y) \\ \vec{w} = (y, 5) \end{cases} \text{ verifican: } \begin{cases} \vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \\ |\vec{w}| = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ \sqrt{x^2 + 5^2} = 13 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

Despejamos x de la 2ª ecuación: $\sqrt{x^2 + 25} = 13 \Rightarrow x^2 + 25 = 169 \Rightarrow x = \pm 12$
y sustituimos en la primera:

$$y = \frac{-3x}{5} = \begin{cases} \frac{-3 \cdot 12}{5} = -\frac{36}{5} \\ \frac{-3 \cdot (-12)}{5} = \frac{36}{5} \end{cases}$$

Por tanto, las coordenadas que nos piden son:

$$(x, y) = \begin{cases} \left(12, -\frac{36}{5}\right) \\ 0 \\ \left(-12, \frac{36}{5}\right) \end{cases}$$

5. Un punto de la recta es $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y un vector director es $\vec{u} = (-B, A) = (6, 2)$.

Ecuación vectorial de la recta:

$$(x, y) = \left(0, \frac{1}{2}\right) + \lambda(6, 2)$$

Ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{cases} x = 0 + 6\lambda \\ y = \frac{1}{2} + 2\lambda \end{cases}$$

Ecuación continua de la recta:

$$\frac{x}{6} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2}$$

Ecuación punto-pendiente de la recta:

$$\frac{x}{6} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow \frac{2}{6}x = y - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}x = y - \frac{1}{2}$$

Ecuación explícita:

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$$

6. Nos dan $r \equiv ax - 6y + 3 = 0$.

a) Como $P(3,1) \in r$, sus coordenadas verifican la ecuación de la recta:

$$3a - 6 \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow a = 1$$

b) Como $m = -1$ y la ecuación explícita de la recta es $y = \frac{ax+3}{6} = \frac{a}{6}x + \frac{1}{2}$, se tiene que:

$$-1 = m = \frac{a}{6} \Rightarrow a = -6$$

c) Como $\vec{u} = (6, -4)$ es un vector de la recta, tiene que ser proporcional a uno de sus vectores directores, esto es:

$$\vec{u} = (6, -4) = k\vec{u}_r \text{ donde } \vec{u}_r = (-B, A) = (6, a) \text{ es un vector director de la recta}$$

y por tanto:

$$a = -4$$

7. La longitud de lado del cuadrado es la distancia entre las rectas:

$$\begin{cases} r \equiv 4x - y + 5 = 0 \\ s \equiv 8x - 2y + 12 = 0 \end{cases}$$

Se tiene que:

$$d(r, s) = d(P_r, s) \text{ donde } P_r(0, 5) \text{ es un punto cualquiera de la recta } r$$

Por tanto:

$$\text{lado del cuadrado: } l = d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|8 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 12|}{\sqrt{8^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{68}} = \frac{2\sqrt{68}}{68} = \frac{\sqrt{68}}{34} \text{ u}$$

y como consecuencia:

$$\text{área del cuadrado: } l^2 = \left(\frac{\sqrt{68}}{34}\right)^2 = \frac{68}{1156} \text{ u}^2 \approx 0,0588 \text{ u}^2$$

8. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\cos 60^\circ &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8m-18}{10+\sqrt{m^2+9}} \Rightarrow 10+\sqrt{m^2+9} = 2(8m-18) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 255m^2 - 1472m + 2107 = 0 \Rightarrow m = \frac{736 \pm \sqrt{4411}}{255}\end{aligned}$$

9. Al igual que en el ejercicio anterior, si $\vec{a} = (a_1, a_2)$, se tiene que:

$$\cos 60^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a_1 - 4a_2}{5\sqrt{3} + 5} \Rightarrow 15 + 5\sqrt{3} = 6a_1 - 8a_2$$

y por otro lado:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{3}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 15 + 5\sqrt{3} = 6a_1 - 8a_2 \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 5\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{15 + 5\sqrt{3} + a_2}{6} \\ a_1^2 + a_2^2 = 75 \end{cases}$$

$$50a_2^2 + 40\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)a_2 + 75\sqrt{3} - 1200 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{5} \pm \sqrt{\frac{1296 - 27\sqrt{3}}{50}} = \begin{cases} 3,1056 \\ -6,8913 \end{cases}$$

y

$$a_1 = \frac{15 + 5\sqrt{3} + a_2}{6} = \begin{cases} 4,4610 \\ 2,7948 \end{cases}$$

10. Hallamos en primer lugar los vectores formados por los vértices del triángulo:

$$\overline{AB} = (6, -2), \overline{BC} = (-4, -4) \text{ y } \overline{AC} = (2, -6)$$

y en segundo lugar sus módulos:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} \text{ u}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} \text{ u}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{40} \text{ u}$$

Como consecuencia, el triángulo es isósceles y no equilátero.

Por otro lado:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \text{ donde } \begin{cases} b = d(B, C) = |\overline{BC}| = \sqrt{32} \\ h_{BC} = d(A, BC) \end{cases}$$

donde

$$BC: \begin{cases} \text{punto: } B(9, -1) \\ \text{vector director: } \overline{BC} = (-4, -4) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-9}{-4} = \frac{y+1}{-4} \Rightarrow x - y - 10 = 0$$

y por tanto:

$$h_{BC} = d(A, BC) = \frac{|3-1-10|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Así:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{32} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{64} = 2 \cdot 8 = 16 \text{ u}^2$$