Ficha 5.3: Geometría Analítica Plana

1. Tres vértices consecutivos de un rectángulo son los puntos de coordenadas (1, 1), (6, 6) y $(3,9)$. Halla las coordenadas del cuarto vértice.

2. Comprueba que el segmento que une los puntos medios de los lados *AC* y *BC* del triángulo $A(3,5)$, *B* (–1, –1), *C* (6, 0) es paralelo al lado *AB* y de módulo su mitad.

3. Un vector tiene por extremos *A* (2, 3) y *B* (8, 6). Calcula las coordenadas de los puntos que lo dividen en tres partes iguales.

4. Sean los vectores $\vec{u}=(3,y)$ y $\vec{w}=(x,5)$. Calcula *x* e *y*, de manera que ambos vectores sean perpendiculares y $|\vec{w}|=13$.

5. Dada la recta de ecuación $2x - 6y + 3 = 0$, escríbela en forma continua, paramétrica, vectorial y explícita.

6. Calcula el valor de *a* para que la recta de ecuación $ax+3y-9=0$:
a) Pase por el punto (3, 1).
b) Tenga de pendiente $m=-1$.
c) Uno de sus vectores sea $\vec{u}=(6,-4)$.

7. Halla el área del cuadrado, dos de cuyos lados están en las rectas $4x-y+5=0$ y $8x-2y+12=0$.

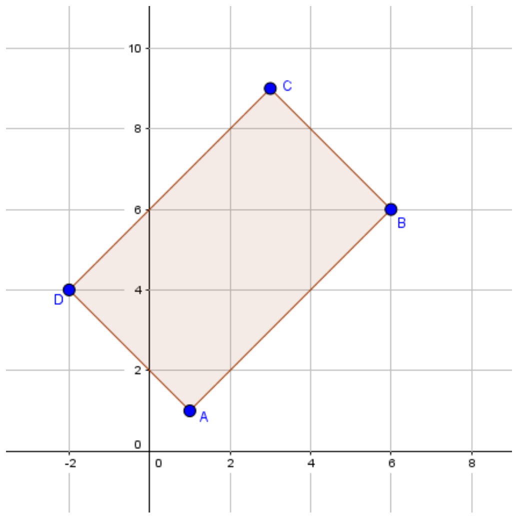
8. Calcula m para que los vectores $\vec{a}=(8,-6)$ y $\vec{b}=(m,3)$ formen un ángulo de 60º.

9. Calcula un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 30º con $\vec{b}=(3,-4)$ y tal que $|\vec{a}|=\sqrt{3}\,|\vec{b}|$.

10. Demuestra que el triángulo de vértices $A(3,1)$, $B(9,-1)$ y $C(5,-5)$ es isósceles. ¿Es equilátero? ¿Cuáles son sus lados iguales? Calcula su área.

SOLUCIONES

1. Observamos el dibujo:



Como $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ y $ABCD$ es un rectángulo, se tiene que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (son equipolentes), luego:

$$(5,5) = (3-x, 9-y) \Rightarrow \begin{cases} 5 = 3-x \\ 5 = 9-y \end{cases} \rightarrow (x,y) = (-2,4)$$

Las coordenadas del punto D son:

$$D(-2,4)$$

2. El punto medio del lado AC es: $M_{AC}\left(\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right)$

El punto medio del lado BC es: $M_{BC}\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$

El vector que determinan es: $\overrightarrow{M_{AC}M_{BC}} = \left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right) = (-2,-3)$

El vector $\overrightarrow{AB}$ es: $\overrightarrow{AB} = (-1,-1) - (3,5) = (-4,-6)$

Los lados AB y $M_{AB}M_{BC}$ son paralelos si los vectores AB y $M_{AB}M_{BC}$ lo son:

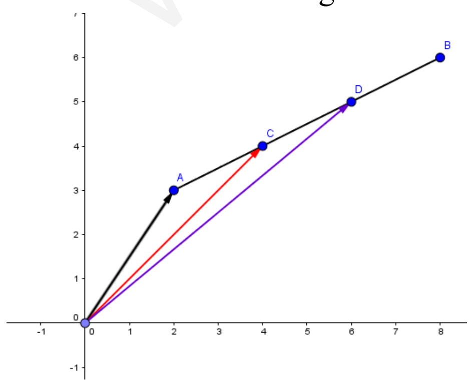
$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} \Leftrightarrow \frac{-4}{-2} = \frac{-6}{-3} \Leftrightarrow 12 = 12$$

que es cierta, luego los lados son paralelos.

Por otro lado,

$$\left.\begin{array}{l} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = \sqrt{2^2 \cdot 13} = 2\sqrt{13} \\ \left|\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$$

3. Observamos la figura:



Se tiene que:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

y como $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ resulta que:

$$\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$$

$(2,3)+\frac{1}{3}(6,3)=(c_1,c_2)$ donde $C(c_1,c_2)$

$$(2,3)+(2,1)=(c_1,c_2)$$

$$C(4,4)$$

Por otro lado:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}$$

y como $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ resulta que:

$$\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}$$

$(2,3)+\frac{2}{3}(6,3)=(d_1,d_2)$ donde $\mathrm{D}(d_1,d_2)$

$$(2,3)+(4,2)=(d_1,d_2)$$

$$D(6,5)$$

4. Se tiene que:

$$\begin{cases}\vec{u}=(3,y)\\ \vec{w}=(y,5)\end{cases} \text{ verifican: } \begin{cases}\vec{v}\perp\vec{w}\Leftrightarrow\vec{v}\cdot\vec{w}=0\\ \left|\vec{w}\right|=13\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x+5y=0\\ \sqrt{x^2+5^2}=13\end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

Despejamos x de la 2ª ecuación: $\sqrt{x^2+25}=13\Rightarrow x^2+25=169\Rightarrow x=\pm 12$
y sustituimos en la primera:

$$y=\frac{-3x}{5}=\begin{cases}\frac{-3\cdot 12}{5}=-\frac{36}{5}\\ \frac{-3\cdot(-12)}{5}=\frac{36}{5}\end{cases}$$

Por tanto, las coordenadas que nos piden son:

$$(x,y)=\begin{cases}\left(12,-\frac{36}{5}\right)\\ \text{o}\\ \left(-12,\frac{36}{5}\right)\end{cases}$$

5. Un punto de la recta es $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y un vector director es $\vec{u}=(-B,A)=(6,2)$.

Ecuación vectorial de la recta:

$$(x,y)=\left(0,\frac{1}{2}\right)+\lambda(6,2)$$

Ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{cases} x = 0 + 6\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} + 2\lambda \end{cases}$$

Ecuación continua de la recta:

$$\frac{x}{6} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2}$$

Ecuación punto-pendiente de la recta:

$$\frac{x}{6} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow \frac{2}{6}x = y - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}x = y - \frac{1}{2}$$

Ecuación explícita:

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$$

6. Nos dan $r \equiv ax - 6y + 3 = 0$.

a) Como $P(3,1) \in r$, sus coordenadas verifican la ecuación de la recta:

$$3a - 6 \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow a = 1$$

b) Como $m = -1$ y la ecuación explícita de la recta es $y = \dfrac{ax+3}{6} = \dfrac{a}{6}x + \dfrac{1}{2}$, se tiene que:

$$-1 = m = \frac{a}{6} \Rightarrow a = -6$$

c) Como $\vec{u} = (6,-4)$ es un vector de la recta, tiene que ser proporcional a uno de sus vectores directores, esto es:

$\vec{u} = (6,-4) = k\overrightarrow{u_r}$ donde $\overrightarrow{u_r} = (-B, A) = (6, a)$ es un vector director de la recta

y por tanto:

$$a = -4$$

7. La longitud de lado del cuadrado es la distancia entre las rectas:

$$\begin{cases} r \equiv 4x - y + 5 = 0 \\ s \equiv 8x - 2y + 12 = 0 \end{cases}$$

Se tiene que:

$d(r,s) = d(P_r, s)$ donde $P_r(0,5)$ es un punto cualquiera de la recta r

Por tanto:

lado del cuadrado: $l = d(r,s) = d(P_r, s) = \dfrac{|8 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 12|}{\sqrt{8^2 + (-2)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{68}} = \dfrac{2\sqrt{68}}{68} = \dfrac{\sqrt{68}}{34}$ u

y como consecuencia:

área del cuadrado: $l^2 = \left(\dfrac{\sqrt{68}}{34}\right)^2 = \dfrac{68}{1156}\ \text{u}^2 \simeq 0{,}0588\ \text{u}^2$

8. Se tiene que:

$$\cos 60^o = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8m-18}{10+\sqrt{m^2+9}} \Rightarrow 10+\sqrt{m^2+9} = 2(8m-18) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 255m^2 - 1472m + 2107 = 0 \Rightarrow m = \frac{736 \pm \sqrt{4411}}{255}$$

9. Al igual que en el ejercicio anterior, si $\vec{a} = (a_1, a_2)$, se tiene que:

$$\cos 60^o = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a_1 - 4a_2}{5\sqrt{3}+5} \Rightarrow 15 + 5\sqrt{3} = 6a_1 - 8a_2$$

y por otro lado:

$$\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{3}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 15+5\sqrt{3} = 6a_1 - 8a_2 \\ \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} = 5\sqrt{3} \end{cases} \to \begin{cases} a = \dfrac{15+5\sqrt{3}+a_2}{6} \\ {a_1}^2 + {a_2}^2 = 75 \end{cases}$$

$$50a_2^2 + 40\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)a_2 + 75\sqrt{3} - 1200 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{5} \pm \sqrt{\frac{1296-27\sqrt{3}}{50}} = \begin{cases} 3{,}1056 \\ -6{,}8913 \end{cases}$$

y

$$a_1 = \frac{15+5\sqrt{3}+a_2}{6} = \begin{cases} 4{,}4610 \\ 2{,}7948 \end{cases}$$

10. Hallamos en primer lugar los vectores formados por los vértices del triángulo: $\overrightarrow{AB} = (6,-2)$, $\overrightarrow{BC} = (-4,-4)$ y $\overrightarrow{AC} = (2,-6)$

y en segundo lugar sus módulos:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} \text{ u}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} \text{ u}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4+16} = \sqrt{40} \text{ u}$$

Como consecuencia, el triángulo es isósceles y no equilátero.

Por otro lado:

$$A = \frac{b\cdot h}{2} \text{ donde } \begin{cases} b = d(B,C) = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{32} \\ h_{BC} = d(A, BC) \end{cases}$$

donde

$$BC: \begin{cases} \text{punto: } B(9,-1) \\ \text{vector director: } \overrightarrow{BC} = (-4,-4) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-9}{-4} = \frac{y+1}{-4} \Rightarrow x - y - 10 = 0$$

y por tanto:

$$h_{BC} = d\left(A, BC\right) = \frac{\left|3-1-10\right|}{\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Así:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{32}\cdot 4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{64} = 2\cdot 8 = 16 \text{ u}^2$$