Problema 1 Un cuerpo extraño a nuestra constelación ha irrumpido de forma violenta en ella, penetrando con una velocidad vertiginosa. Diferentes organismos internacionales dedicados al estudio de la astronomía se pusieron en contacto con el observatorio de las Islas Canarias (en el Teide) , desde donde se dio la alarma de este suceso. Dos jóvenes astrónomos , antiguos alumnos del colegio Villaeuropa, era los guardianes del cielo. La comunicación que dieron a la NASA fué bastante precisa; se trata de un cometa que arrastra en su cola un gran cantidad de meteoritos de diferentes tamaños. No existiría ningún riesgo para la Tierra si pasase a un distancia mayor de 2 (unidades astronómicas). También han comprobado que los puntos que recorre este cometa equidistan de la recta $r : x + y = 0$ y del punto $F(1, 0)$. Precisan también que cuando la Tierra se encuentre en el punto $P'(2, 1)$ será cuando estaremos más cerca del cometa.
La situación ya la tenían clara, el estudio de cónicas de 1º de Bachillerato les bastaba para hacer un primer cálculo de aproximación. Su antiguo y pesado profesor les preguntaría:

1. ¿Que curva describe el cometa?
2. Calcular su ecuación general.
3. Calcular las rectas tangente y normal a esta curva en $x = 2$
4. ¿La Tierra se encuentra en peligro?

Solución:

1. Se trata de una parábola.
2. $$d(P, r) = |\overrightarrow{FP}| \Longrightarrow \frac{x+y}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \Longrightarrow x^2+y^2-4x-2xy+2 = 0$$
3. $$y^2 - 4y - 2 = 0 \Longrightarrow y = 4,45,\ \ y = -0{,}45$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x-y-2}{y-x}$$
En el punto $(2; 4, 45) \Longrightarrow m = 1, 8$:
Recta Tangente: $y - 4, 5 = 1, 8(x - 2)$ y la recta Normal: $y - 4, 5 = 0, 56(x - 2)$

En el punto $(2; -0,45) \Longrightarrow m = 0,18$:
Recta Tangente: $y + 0,45 = 0,18(x-2)$ y la recta Normal: $y + 0,45 = -5,56(x-2)$

4. En el punto de abcisa $x = 2$ la Tierra se encuentra en la ordenada $y = 1$, es decir, cuando el cometa pase por el punto $(2; -0,45)$ la distancia será $1 - (-0,45) = 1,45 < 2$ y, por tanto, en peligro.

Problema 2 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(3,-1)$, $B(1,0)$ y $C(0,2)$. Obtener su centro y su radio.

Solución:

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

$$r: \left\{ \begin{array}{r} 3m - n + p = -10 \\ m + p = -1 \\ 2n + p = -4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = -7 \\ n = -5 \\ p = 6 \end{array} \right. \Longrightarrow x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2a = -5 \Longrightarrow a = 5/2 \\ -2b = -7 \Longrightarrow b = 7/2 \\ 6 = (5/2)^2 + (7/2)^2 - r^2 \Longrightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

Problema 3 De una elipse horizontal centrada en el origen se conoce su excentricidad $e = \dfrac{1}{8}$ y su eje mayor de 24 cm. Se pide:

1. Calcular la longitud de sus ejes, la distancia focal, sus vértices y sus focos.

2. Calcular su ecuación general.

Solución:

1. $a = 12$
$$e = \frac{1}{8} = \frac{c}{12} \Longrightarrow c = \frac{3}{2}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = \frac{567}{4} \Longrightarrow b = \frac{\sqrt{567}}{2} = \frac{9}{2}\sqrt{7}$$
Eje Mayor: 24 cm, Eje Menor: $9\sqrt{7}$ cm, Distancia Focal: 3 cm

   Vértices: $A(12,0)$, $A'(-12,0)$, $B\left(0, \dfrac{9}{2}\sqrt{7}\right)$ y $B'\left(0, -\dfrac{9}{2}\sqrt{7}\right)$

   Focos: $F(3/2, 0)$ y $F'(-3/2, 0)$

2. $$\frac{x^2}{144} + \frac{4y^2}{567} = 1 \Longrightarrow 63x^2 + 64y^2 = 9072$$

Problema 4 Sea la recta $r: 2x + y - 3 = 0$ y sea el punto $P(1,1)$. Encontrar los puntos de la recta r que se encuentran a una distancia igual a 5 del punto P.

Solución:

Construimos una circunferencia de centro P y radio 5 y luego calculamos los puntos de corte de esta circunferencia con la recta r.

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25, \quad r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -2) \\ P_r(0, 3) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

$$(\lambda - 1)^2 + (2 - 2\lambda)^2 = 25 \Longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3,236 \\ \lambda_2 = -1,236 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3,236 \\ \lambda_2 = -1,236 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P'(3,236; -3,472) \\ P''(-1,236; 5,472) \end{cases}$$