

1. Hallar todos los vectores perpendiculares a $\vec{u} = (3, -5)$ que tengan módulo 16.

Solución:

Dos vectores perpendiculares a $\vec{u} = (3, -5)$ serán:

$$\vec{v}_1 = (5, 3) \text{ y } \vec{v}_2 = (-5, -3)$$

$|\vec{v}_1| = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$ el vector $\vec{h}_1 = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \left(\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}} \right)$ tiene módulo

uno, luego $\vec{w}_1 = 16 \cdot \vec{h}_1 = \left(\frac{80}{\sqrt{34}}, \frac{48}{\sqrt{34}} \right)$ tiene módulo 16.

$|\vec{v}_2| = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$ el vector $\vec{h}_2 = \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = \left(\frac{-5}{\sqrt{34}}, \frac{-3}{\sqrt{34}} \right)$ tiene módulo

uno, luego $\vec{w}_2 = 16 \cdot \vec{h}_2 = \left(\frac{-80}{\sqrt{34}}, \frac{-48}{\sqrt{34}} \right)$ tiene módulo 16.

2. Calcular la distancia del punto P(3,2) a la recta:

a. $r : 3y = 2x - 5$

b. $r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

c. $r : 2x - 5y + 1 = 0$

Solución:

a. La ecuación general de la recta es $2x - 3y - 5 = 0$

$$d(P, r) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|-5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

b.

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow 2x + y - 3 = 0 \text{ es la ecuación general de la recta.}$$

$$d(P, r) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

c. La ecuación general es $2x - 5y + 1 = 0$

$$d(P, r) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{|-3|}{\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

3. Calcular el ángulo formado por las rectas:

a.

$$r : 3x - y - 1 = 0$$

$$s : x + 2y + 3 = 0$$

b.

$$r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{5}$$

Solución:

a. Las rectas están definidas según su ecuación general

$$r : 3x - y - 1 = 0$$

$$s : x + 2y + 3 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{3 \cdot 1 - 1 \cdot 2}{\sqrt{9 + 1} \sqrt{1 + 4}} = 0,1414 \Rightarrow \alpha = 81^\circ 52' 12''$$

b. Pasamos las rectas a su ecuación general:

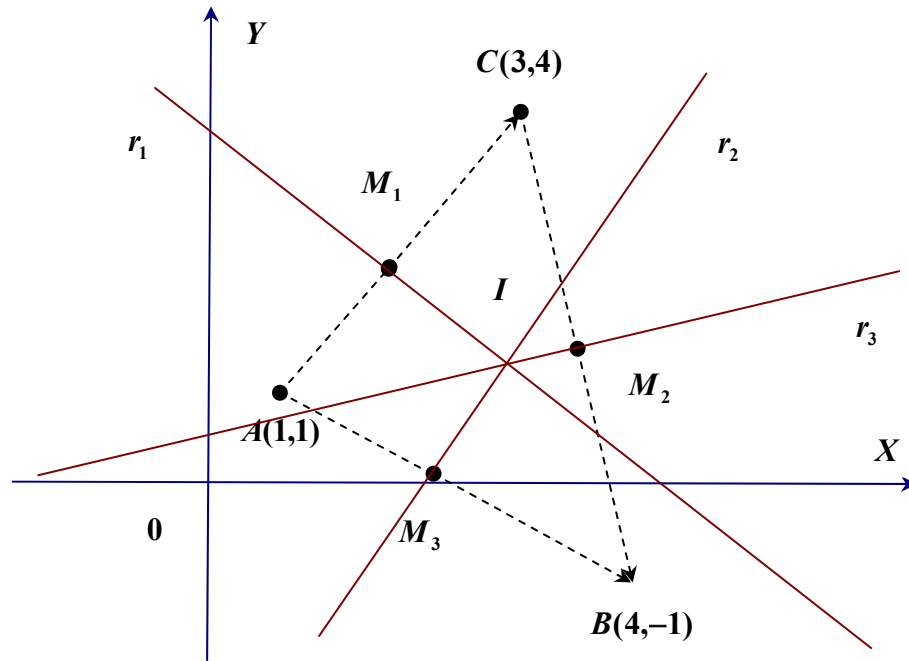
$$r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow 3x + y + 1 = 0$$

$$s : \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{5} \Rightarrow 5x + 2y - 3 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{3 \cdot 5 + 1 \cdot 2}{\sqrt{9 + 1} \sqrt{25 + 4}} = 0,9982 \Rightarrow \alpha = 3^\circ 21' 59''$$

4. Dado el triángulo formado por los puntos $A(1,1)$, $B(4,-1)$ y $C(3,4)$, calcular las ecuaciones de sus mediatrices y el punto en el que se cortan (circuncentro).

Solución:



Calculamos M_1 , M_2 y M_3 :

$$M_1 = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left(2, \frac{5}{2} \right)$$

$$M_2 = \left(\frac{3+4}{2}, \frac{4-1}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$M_3 = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{1-1}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 0 \right)$$

Calculamos los vectores \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{CB} y \overrightarrow{AB}

$$\overrightarrow{AC} = (3,4) - (1,1) = (2,3) \Rightarrow (-3,2) \text{ es un vector perpendicular a } \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CB} = (4,-1) - (3,4) = (1,-5) \Rightarrow (5,1) \text{ es un vector perpendicular a } \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{AB} = (4,-1) - (1,1) = (3,-2) \Rightarrow (2,3) \text{ es un vector perpendicular a } \overrightarrow{AB}$$

Las mediatrices pasarán por los puntos medios, y tendrán por vectores directores los perpendiculares a los lados:

$$r_1 : \frac{x-2}{-3} = \frac{y-\frac{5}{2}}{2} \Rightarrow 4x + 6y - 23 = 0$$

$$r_2 : \frac{x-\frac{7}{2}}{5} = \frac{y-\frac{3}{2}}{1} \Rightarrow x - 5y + 4 = 0$$

$$r_3 : \frac{x-\frac{5}{2}}{2} = \frac{y-0}{3} \Rightarrow 6x - 4y - 15 = 0$$

Las coordenadas del circuncentro serán la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 5y + 4 = 0 \\ 6x - 4y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$