GEOMETRÍA ANALÍTICA

<u>EJERCICIO 1</u> :

a) **Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por P(3,2) y tiene la misma dirección que el vector v(1,-2)**
b) **Obtén tres puntos de r**
c) **Comprueba si los puntos A(7,-6) y B(-3,7) pertenecen a r.**

a) r: $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 2 - 2k \end{cases}$

b) Dando valores a "k" obtenemos los puntos $\Rightarrow \begin{cases} k = 1 \to P_1(4,0) \\ k = 2 \to P_2(5,-2) \\ k = -1 \to P_3(6,-4) \end{cases}$

c) A =(7,-6) $\Rightarrow \begin{cases} 7 = 3 + k \to k = 4 \\ -6 = 2 - 2k \to k = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{Como coinciden, A pertenece a r}$

B =(-3,7) $\Rightarrow \begin{cases} -3 = 3 + k \to k = -6 \\ 7 = 2 - 2k \to k = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Como no coinciden, B no pertenece a r}$

<u>EJERCICIO 2</u> : Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por A(-1,3) y B(5,-1)

r: $\begin{cases} \text{Punto}: A(-1,3) \\ \text{Vector}: v = AB = (6,-4) \parallel (3,-2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 3 - 2k \end{cases}$

<u>EJERCICIO 3</u> : Halla una recta paralela y otra perpendicular a r: $\begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$ **que pasen por el punto M(1,-2)**

Paralela: s: $\begin{cases} \text{Punto}: M(1,-2) \\ \text{Vector}: v_s \text{ paralelo } v_r(-2,3) \to v_s(-2,3) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$

Perpendicular: p: $\begin{cases} \text{Punto}: M(1,-2) \\ \text{Vector}: v_p \text{ perpendicular a } v_r(-2,3) \to v_p = (3,2) \end{cases} \Rightarrow p: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

<u>EJERCICIO 4</u> : Dadas las rectas $r_1: \begin{cases} x = 5 - 2k \\ y = 2 + 4k \end{cases}$, $r_2: \begin{cases} x = -4k \\ y = 1 - 2k \end{cases}$ **y** $r_3: \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 6 - 2k \end{cases}$ **estudiar la posición relativa y hallar el punto de corte, si es posible, en los siguientes casos:**

a) r_1 **y** r_2 **b)** r_1 **y** r_3

a) Resolvemos el sistema, cambiando el nombre a un parámetro:

$$\begin{cases} 5 - 2k = -4t \\ 2 + 4k = 1 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2k + 4t = -5 \\ 4k + 2t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4k + 8t = -10 \\ 4k + 2t = -1 \end{cases} \Rightarrow 10t = -11 \Rightarrow t = -\frac{11}{10}$$

Sistema compatible determinado, existe una solución. Se cortan en un punto (secantes)

Para hallar el punto de corte, sustituimos el valor de "t" en r_2:

$$\begin{cases} x = -4.\left(-\frac{11}{10}\right) = \frac{44}{10} = \frac{22}{5} \\ y = 1 - 2.\left(-\frac{11}{10}\right) = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{22}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

b) *Resolvemos el sistema, cambiando el nombre a un parámetro:*

$$\begin{cases} 5 - 2k = 3 + t \\ 2 + 4k = 6 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2k - t = -2 \\ 4k + 2t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4k - 2t = -4 \\ 4k + 2t = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{Sumándolas } 0 = 0$$

Sistema compatible indeterminado, existen infinitas soluciones. Son coincidentes

<u>EJERCICIO 5</u> : Dadas las rectas r: $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$ **y s: 2x – 3y + 9 = 0, halla:**

a) La ecuación implícita de r y su pendiente
b) Las ecuaciones paramétricas de s
c) El punto de corte de r y s

a) $r: \begin{cases} \text{Punto } P(3,5) \\ \text{Vector normal}: v = (-2,3) \to n = (3,2) \end{cases} \Rightarrow 3x + 2y + C = 0 \Rightarrow 9 + 10 + C = 0 \Rightarrow C = -19$

$\Rightarrow$ *3x + 2y – 19 = 0* $\Rightarrow$ *m = -3/2*

b) $s: \begin{cases} \text{Punto}: x = 0, y = 3 \to (0,3) \\ \text{Vector}: n = (2,-3) \to v = (3,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

c) Resolvemos el sistema: 2(3-2t)-3(5+3t)+9 = 0 $\Rightarrow$ *6-4t-15-9t+9=0* $\Rightarrow$ *-13t=0* $\Rightarrow$ *t = 0* $\Rightarrow$ *P(3,5)*

<u>EJERCICIO 6</u> : Dada las rectas r: 3x – 2y + 6 = 0 y el punto P(5,-1), halla las ecuaciones de las rectas s y p que pasen por P y sean:

a) s paralela a r
b) p perpendicular a r

a) 3x – 2y + C = 0 $\Rightarrow$ *15+2+C = 0* $\Rightarrow$ *C = -17* $\Rightarrow$ *3x – 2y – 17 = 0*
b) 2x + 3y + C = 0 $\Rightarrow$ *10 – 3 + C = 0* $\Rightarrow$ *C = -7* $\Rightarrow$ *2x + 3y – 7 = 0*

<u>EJERCICIO 7</u> : Halla el ángulo que forman las rectas r: $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$ **y s: x – y = 0**

$v_r = (1,-2)$, $n_s = (1,-1) \Rightarrow v_s = (1,1)$

$$\cos(r,s) = \cos(v_r,v_s) = \frac{|v_r.v_s|}{|v_r|.|v_s|} = \frac{|1-2|}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = 71^\circ 33' 54''$$

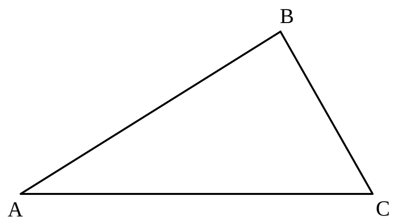
EJERCICIO 8 : Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3,5) y forma un ángulo de 45º con la recta r: 2x + 3y – 6 = 0

$$s:\begin{cases}\text{Punto}: P(3,5)\\ \text{Pendiente}: m_r = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow \text{tag}45^o = \left|\dfrac{m_s - m_r}{1+m_s . m_r}\right| \Rightarrow 1 = \left|\dfrac{m_s + \dfrac{2}{3}}{1 - m_s \cdot \dfrac{2}{3}}\right| \Rightarrow \pm 1 = \dfrac{3m_s + 2}{3 - 2m_s} \left\langle \begin{array}{l} m_s = \dfrac{1}{5} \\ m_s = -5 \end{array}\right. \end{cases}$$

Dos soluciones: $s_1: y-5 = \frac{1}{5}(x-3) \Rightarrow x - 5y + 22 = 0$

$s_2: y - 5 = -5(x-3) \Rightarrow 5x + y - 20 = 0$

EJERCICIO 9 : En el triángulo de vértices A(0,-1), B(8,3) y C(6,-1) calcula la longitud de la altura que parte de B



Altura = $d(B, r_{AC})$

Calculamos la recta r_{AC}*: Recta que pasa por A y C:*

$$r_{AC}\begin{cases}\text{Punto}: A(0,-1)\\ \text{Vector}: v = AC = (6-0,-1+1) = (6,0) \to n = (0,6)\end{cases} \Rightarrow 0x+6y+C=0 \Rightarrow -6 + C = 0$$

$C = 6 \Rightarrow 6y + 6 = 0 \Rightarrow y + 1 = 0$

Altura = $d((8,3), y + 1 = 0) = \dfrac{|3+1|}{\sqrt{0^2+1^2}} = 4$

EJERCICIO 10 : Halla la ecuación de las rectas paralelas a r: 2x – y + 3 = 0 que distan de r $\sqrt{5}$ unidades.

Si son paralelas a r $\Rightarrow r': 2x - y + C' = 0$

$$d(2x-y+3=0;\ 2x-y+C'=0) = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|3-C'|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow |3-C'| = 5 \left\langle \begin{array}{l} 3 - C' = 5 \to C' = -2 \\ 3 - C' = -5 \to C' = 8 \end{array}\right.$$

Dos soluciones: $r_1: 2x - y - 2 = 0$ $\quad r_2: 2x - y + 8 = 0$

EJERCICIO 11 : En el triángulo de vértices A(-2,2), B(6,0) y C(2,-4), halla el circuncentro.

El circuncentro es el punto donde se cortan las mediatrices (rectas perpendicular a un lado por el punto medio.

<u>Mediatriz del lado AB</u>

$$r_1:\begin{cases}\text{Punto}: \text{Punto medio de } AB = \left(\dfrac{-2+6}{2}, \dfrac{2+0}{2}\right) = (2,1)\\ \text{Vector normal}: n = AB = (6+2, 0-2) = (8.,-2) \,||\, (4,-1)\end{cases} \Rightarrow 4x - y + C = 0 \to 8 - 1 + C = 0$$

$\Rightarrow C = -7 \Rightarrow 4x - y - 7 = 0$

<u>Mediatriz del lado AC</u>

$$r_2: \begin{cases} \text{Punto : Punto medio de AC} = \left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{2-4}{2}\right) = (0,-1) \\ \text{Vector normal : n} = \text{AB} = (2+2,-4-2) = (4.,-6) \parallel (2,-3) \end{cases} \Rightarrow 2x - 3y + C = 0 \rightarrow 3 + C = 0$$

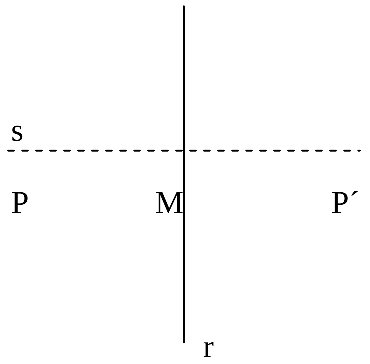
$\Rightarrow C = -3 \Rightarrow 2x - 3y - 3 = 0$

<u>Circuncentro</u> : Intersección de las mediatrices (Resolvemos el sistema)

$$\begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ -4x + 6y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5y - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{1}{5} \rightarrow 4x - \frac{1}{5} - 7 = 0 \rightarrow 20x - 1 - 35 = 0$$

$$x = \frac{36}{20} = \frac{9}{5} \Rightarrow C = \left(\frac{9}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

<u>EJERCICIO 12</u> : Determina el punto P' simétrico de P(3,-2) respecto de la recta r: 2x–y+8 = 0



<u>Paso 1</u> : Hallar la recta s: Perpendicular a r por P

$$s: \begin{cases} \text{Punto : P}(3,-2) \\ \text{Vector : } v_s = n_r = (2,-1) \rightarrow n_s = (1,2) \end{cases}$$

$x + 2y + C = 0 \Rightarrow 3 - 4 + C = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0$

<u>Paso 2</u> : Hallamos el punto M: Intersección de r y s

$$M: \begin{cases} 2x - y + 8 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 8 = 0 \\ -2x - 4y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow -5y + 6 = 0$$

$$y = \frac{6}{5} \rightarrow x = -1 - 2\frac{6}{5} = -\frac{17}{5} \Rightarrow M = \left(-\frac{17}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

<u>Paso 3</u> : M es el punto medio de P y P'

$$\left(-\frac{17}{5}, \frac{6}{5}\right) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right) \Rightarrow P' = \left(-\frac{49}{5}, \frac{22}{5}\right)$$

<u>EJERCICIO 13</u> :Halla el punto de la recta r:y=-3x+2 que equidista de los puntos A(5,1) y B(3,-2)

$$\begin{cases} \text{El punto P(x, y) pertenece a la recta} \rightarrow \text{Cumple la ecuación : } y = -3x + 2 \\ d((x,y),(5,1)) = d((x,y),(3,-2)) \rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema: $P = \left(-\dfrac{1}{14}, \dfrac{31}{14}\right)$