GEOMETRÍA ANALÍTICA

Ejercicio 1º.-

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas, si son secantes calcula el punto de corte y si son paralelas la distancia entre ellas:

a)
$$r \equiv \begin{cases} x = -2 - 7t \\ y = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$
$$s \equiv 6x + 2y - 2 = 0$$

b)
$$r \equiv -x + 2y + 1 = 0$$
$$s \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Ejercicio 2º.-

Determina el un valor de k en la recta $r \equiv 3x + ky - 8 = 0$ para que la distancia al punto $A(2,-3)$ sea 3

Ejercicio 3º [2,00 puntos]

Calcula el ortocentro H del triángulo de vértices $A(2,4)$ $B(-4,2)$ y $C(1,-3)$.

Nota: Recuérdese que el ortocentro es el punto de corte de las tres rectas altura del triángulo y que bastan dos de ellas para calcularlo. La recta altura es la perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto.

Ejercicio 4º [2,00 puntos]

Calcula el ángulo α que forma las rectas $r \equiv \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{8}$ $\quad s \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{4}$

Ejercicio 5º [2,00 puntos]

Dada la recta r: $x + y + 2 = 0$ calcular las ecuaciones de las dos rectas s y s' que pasando por el punto $A(2,2)$ forman con r un ángulo de $30°$

Ejercicio 1º [2,00 puntos]

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas, si son secantes calcula el punto de corte y si son paralelas la distancia entre ellas:

a) $r \equiv \begin{cases} x = -2-7t \\ y = 1+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$s \equiv 6x+2y-2=0$

b) $r \equiv -x+2y+1=0$

$s \equiv y = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

Apartado A

Pasamos r a forma continua y de ahí a forma general, la recta s ya está en forma general:

$$\frac{x+2}{-7} = \frac{y-1}{1} \quad \Rightarrow \quad x+2 = -7y+7 \quad \Rightarrow \quad x+7y-5=0$$

Aplicamos el criterio de posición relativa de la forma general:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv x+7y-5=0 \\ s \equiv 6x+2y-2=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6} \neq \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad r \text{ y } s \text{ son secantes}$$

Calculamos el punto de corte aplicando el método de doble reducción:

$$\left.\begin{array}{l} x+7y=5 \\ 6x+2y=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{(1^a Ec.)\cdot(+6)} \\ \xrightarrow{(2^a Ec.)\cdot(-1)} \end{array} \left.\begin{array}{r} 6x+42y=30 \\ -6x-2y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 40y=28 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{28}{40} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=\frac{7}{10}}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{(1^a Ec.)\cdot(+2)} \\ \xrightarrow{(2^a Ec.)\cdot(-7)} \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x+14y=10 \\ -42x-14y=-14 \end{array}\right\} \Rightarrow -40x=-4 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-4}{-40} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\frac{1}{10}}$$

El punto de corte es el punto $\left(\frac{1}{10}; \frac{7}{10}\right)$

Apartado B

Pasamos s a forma general, la recta r ya está en forma general:

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}=0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{Multiplico \\ por\ 2}} \quad x-2y+1=0$$

Aplicamos el criterio de posición relativa de la forma general:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv -x+2y+1=0 \\ s \equiv x-2y+1=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{1}=\frac{2}{-2}=-1 \neq \frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad r \text{ y } s \text{ son paralelas}$$

Calculamos la distancia entre ambas usando la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{|C'-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Recordad que para poder aplicar esta fórmula, ambas rectas en forma general deben de tener los mismos coeficientes A y B, sólo pueden diferir en el C

Forzamos la coincidencia de los coeficientes A y B multiplicando r por (-1)

$$r \equiv -x+2y+1=0 \quad \xrightarrow{r\cdot(-1)} \quad x-2y-1=0$$

Entonces:

$$d(r,s) = \frac{|-1-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

La distancia entre ambas rectas es de $\frac{2}{\sqrt{5}}$ unidades.

Ejercicio 2º [2,00 puntos]

Determina el un valor de k en la recta $r \equiv 3x+ky-8=0$ para que la distancia al punto $A(2,-3)$ sea 3

Tenemos el punto $A(2,-3)$ y la recta $r: 3x+ky-8=0$ en forma general luego puedo aplicar la fórmula de la distancia punto-recta:

$$3=\frac{|3\cdot 2+k\cdot(-3)-8|}{\sqrt{3^2+k^2}} \quad \Leftrightarrow \quad 3\sqrt{9+k^2}=\pm(6-3k-8) \quad \Leftrightarrow \quad 3\sqrt{9+k^2}=\pm(-2-3k)$$

Resolvemos las dos ecuaciones posibles (de hecho ambas nos dan la misma solución)

$$3\sqrt{9+k^2}=-2-3k \quad \Rightarrow \quad 9(9+k^2)=4+9k^2+12k \quad \Rightarrow \quad 81\cancel{+9k^2}=4\cancel{+9k^2}+12k$$

$$81-4=12k \quad \Rightarrow \quad \boxed{k=\frac{77}{12}}$$

Ejercicio 3º [2,00 puntos]

Calcula el ortocentro H del triángulo de vértices $A(2,4)$ $B(-4,2)$ y $C(1,-3)$.

Nota: Recuérdese que el ortocentro es el punto de corte de las tres rectas altura del triángulo y que bastan dos de ellas para calcularlo. La recta altura es la perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto.

En primer lugar comprobemos que esos tres puntos NO estan alineados y que por tanto forma un triángulo

Para ello se calculan dos vectores formados por esos tres puntos y se comprueba que son Linealmente Independientes, o lo que es igual que NO son proporcionales y para ello lo más rápido es comprobar que el producto en cruz de sus componentes NO es igual.

Vector lado	**AB = (**	*-6*	*-2*	**)**
Vector lado	**BC = (**	*5*	*-5*	**)**

El producto en cruz de las componentes es es DISTINTO

Puntos NO alineados, luego forman un triángulo

Recta Altura del vértice A (h-A):

Vector Director del lado BC (Vector BC)	**d-BC = (**	*5*	*-5*	**)**					
Vector Normal al lado BC	**n-BC = (**	*-5*	*-5*	**)**					
Ecuación general de la recta altura **h-A** que pasa por el vértice **A(**		*2*	*4*	**)**	con vector director	**n-BC = (**	*-5*	*-5*	**)**
		h-A:	*-5,00*	*** X**	*+5,00*	*** Y**	*-10,00*	**= 0**	

Recta Altura del vértice B (h-B):

Vector Director del lado AC (Vector AC)	**d-AC = (**	*-1*	*-7*	**)**					
Vector Normal al lado AC	**n-AC = (**	*-7*	*1*	**)**					
Ecuación general de la recta altura **h-B** que pasa por el vértice **B(**		*-4*	*2*	**)**	con vector director	**n-AC = (**	*-7*	*1*	**)**
		h-B:	*+1,00*	*** X**	*+7,00*	*** Y**	*-10,00*	**= 0**	

CALCULAMOS EL PUNTO ORTOCENTRO H:

El ortocentro es el punto de corte de las tres alturas y para calcularlo basta con tomar dos de ellas y calcular su punto de corte ya que la tercera altura tambien pasará por ese punto.

El sistema formado por las ecuaciones generales de las rectas h-A y h-B se ha resuelto por el método de Cramer, si el alumno todavia no lo conoce puede aplicar cualquier otro método de resolución para un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Planteo y resuelvo el sistema de ecuaciones formado por la h-A y la h-B

h-A:	*-5,00*	*** X**	*+5,00*	*** Y**	*-10,00*	**= 0**	***x*** =	*+20,00*	/	*-40,00*	=	*-0,50*
h-B:	*+1,00*	*** X**	*+7,00*	*** Y**	*-10,00*	**= 0**	***y*** =	*-60,00*	/	*-40,00*	=	*+1,50*

El **ortocentro** del triángulo dado de vértices **A**, **B**, **C** es el punto **H** de coordendas:

H (***-0,50*** ***+1,50*** **)**

Es decir el punto $H\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

Ejercicio 4º [2,00 puntos]

Calcula el ángulo α que forma las rectas $r\equiv\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{8}$ $\quad s\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{4}$

Calculamos el ángulo que forma sus vectores directores:

$$\vec{d_r}=(-2;\,8) \qquad \vec{d_s}=(1;\,4)$$

Usando las dos fórmulas del producto escalar:

$$\vec{d_r}\bullet\vec{d_s}=\left|\vec{d_r}\right|\cdot\left|\vec{d_s}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$-2\cdot 1+8\cdot 4=\sqrt{(-2)^2+8^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2}\cdot\cos\alpha$$

$$-2+32=\sqrt{68}\cdot\sqrt{17}\cdot\cos\alpha$$

$$30=\sqrt{1156}\cdot\cos\alpha$$

$$30=34\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{30}{34}=\cos\alpha$$

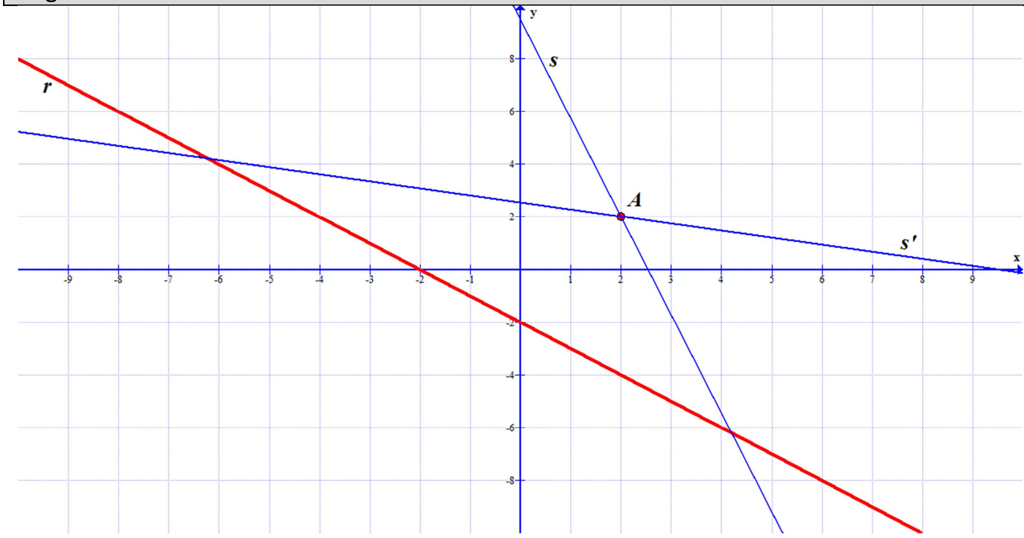
$$\alpha=\arccos\left(\frac{30}{34}\right)$$

$$\boxed{\alpha=28{,}07^\circ}$$

Como es un ángulo en el intervalo $[0^\circ,90^\circ]$ coincide con el ángulo de las rectas (si no fuera así bastaría restar 90°)

Ejercicio 5º [2,00 puntos]

Dada la recta $r: x+y+2=0$ calcular las ecuaciones de las dos rectas s y s' que pasando por el punto $A(2,2)$ forman con r un ángulo de 30°



La inclinación de la recta r es de 135 luego la inclinación de las rectas buscadas será:

- S con inclinación $135° - 30° = 105°$ y por tanto su ecuación en forma punto pendiente será:

  $$s \equiv \qquad y-2=\tan\left(105°\right)\cdot\left(x-2\right)$$

- S' con inclinación $135° + 30° = 165°$ y por tanto su ecuación será:

  $$s' \equiv \qquad y-2=\tan\left(165°\right)\cdot\left(x-2\right)$$