

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_

1º) Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix}$

- a) Discutir el rango en función del parámetro "a" (1'5 p.)  
b) Para  $a = 1$  resolver la ecuación :  $A^t \cdot X = 0$  (1p.)

2º)

a) Resolver la ecuación  $X \cdot A = B - C$  siendo  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1'5 p)

- b) Si A es la matriz  $(F_1 \ F_2 \ F_3)$  y tiene determinante igual a 5, ¿ cuál es el determinante de la matriz  $(3F_1 - F_3 \ F_2 \ 2F_3)$  ? (1 p.)

3º) Si  $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$  se pide:

- a) Calcular  $A^{-1}$ . (0'5 p.)  
b) Estudiar el rango de A. (0'5 p.)  
c) ¿ Cuánto debe valer "a" para que se cumpla que  $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A$  ? (1'5 p.)

4º) Dado el sistema de ecuaciones: 
$$\begin{cases} 3x - y + mz = 0 \\ x + y = m \\ mx - 3y + mz = -2m \end{cases}$$

- a) Discutirlo en función de "m". (2 p.)  
b) Resolverlo para  $m=0$  (0'5 p.)

$$i) \begin{cases} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{cases} \begin{matrix} \swarrow E_3 - E_1, E_2 - E_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 3 & 4 \\ a & 5 & 6 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = a \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \text{rg } A \leq 2. \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \swarrow F_3 - F_1, F_2 - F_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \swarrow F_3 - F_2 \cdot (-2) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Luego  $\text{rg } A = 2$  con independencia de  $a$

$$b) \text{ si } a=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^t \cdot X = 0 \Rightarrow \text{si } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 3x+5y+7z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  Como  $\text{rg } A = \text{rg } A^t$  y el sistema es homogéneo  $\Rightarrow$

$\text{rg } A^t = \text{rg } A^* = 2 \Rightarrow$  S.C.I. Como  $E_3 = E_1 + E_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  el sistema queda  $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \end{cases} \left\{ \text{si } \boxed{z=\lambda} \Rightarrow \right.$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = -\lambda \\ 2x+4y = -6\lambda \end{cases} \Rightarrow 2y = -4\lambda \Rightarrow \boxed{y = -2\lambda} \Rightarrow$$

$E_2 + E_1(-2)$   $\uparrow$

$$\Rightarrow x = -\lambda - y \Rightarrow \boxed{x = \lambda}$$

2°

$$a) X \cdot A = B - C \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (B - C) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = (B - C) \cdot A^{-1}$$

$$|A| = -1; (\text{Adj } A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}; B - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -14 & 24 \end{pmatrix}}$$

$$b) \text{ Si } |F_1 F_2 F_3| = 5 \Rightarrow |3F_1 - F_3 \quad F_2 \quad 2F_3| = 2 \cdot |3F_1 - F_3 \quad F_2 \quad F_3| =$$

$$= 2 \cdot |3F_1 \quad F_2 \quad F_3| = 2 \cdot 3 \cdot |F_1 \quad F_2 \quad F_3| = 2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{\underline{30}}$$

$\uparrow$   
 $1^{\circ} + 3^{\circ}$

$$3^{\circ} a) A = \begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 \Rightarrow \text{ Si } a = 0 \Rightarrow \text{ no existe inversa.}$$

$$\text{ Pero si } a \neq 0 \text{ si existe } A^{-1}. (\text{Adj } A) = \begin{pmatrix} -2a & 2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -a & -2a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2a^2} \cdot \begin{pmatrix} -2a & 2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & -a & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$b) \text{ rg } A: \text{ Si } a \neq 0 \Rightarrow \text{ rg } A = 3 \\ \text{ Si } a = 0 \Rightarrow \text{ rg } A = \text{ rg } \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$(3^{\circ}) \quad c) \quad A^{-1} = \frac{1}{4}A \Rightarrow A^{-1}A = \frac{1}{4} \cdot A \cdot A \Rightarrow I = \frac{1}{4} \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4I = A^2. \quad A^2 = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} =$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 4-2a & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & a-2 & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a^2 = 4, \quad 4-2a = 0, \quad a-2 = 0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$(4^{\circ}) \quad a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & m \\ 1 & 1 & 0 \\ m & -3 & m \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -m^2 + m = m \cdot (-m+1)$$

$$\text{Si } m \neq 0, 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Si } m = 0 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2 = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

$$\text{Si } m = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 2; \quad \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

$C_1 = C_2 + 4C_3$        $\text{punto } 1 \neq 0.$

luego S.I.

$$b) \text{ Si } m = 0 \Rightarrow \text{S.C.I. Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -3y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{matrix}}$$